

Абуталиев.

АКАДЕМИЯ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР

Центральный Трудового Красного Знамени Институт кибернетики с ВЦ

Ф. Б. АБУТАЛИЕВ

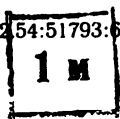
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ

**ЧИСЛЕННЫЕ
И АНАЛИТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО „ФАН“ УЗБЕКСКОЙ ССР

Ташкент — 1972



В монографии разработаны экономичные, эффективно реализуемые на ЭВМ, численные методы решения задач неуставившейся фильтрации в многослойных пластах; построены алгоритмы, основанные на конечно-разностной аппроксимации систем дифференциальных уравнений в частных производных, получены аналитические решения класса задач неуставившейся фильтрации

Книга может быть рекомендована специалистам научно-исследовательских институтов, занимающимся вопросами вычислительной и прикладной математики, инженерам проектных организаций, проектирующим гидромелиоративные сооружения, а также аспирантам и студентам старших курсов вузов физико-математического профиля.

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук

А. Н. ФИЛАТОВ

ВВЕДЕНИЕ

Совершенствование электронно-вычислительных машин и развитие численных методов, эффективно реализуемых на ЭВМ, привели к созданию нового мощного средства научного исследования. Численные решения в этом случае становятся не только способом получения количественных характеристик, но и методом установления закономерностей изучаемого процесса. Так, на базе той или иной физической модели, охватывающей основные стороны процесса, можно получить соответствующую математическую модель в виде некоторой системы уравнений, которые решаются численными методами с применением ЭВМ.

Успех численного решения конкретной задачи невозможен без четкой физической и математической постановки, без знания параметров и исходных данных задачи, в том числе степени их достоверности.

При численном методе решения должны привлекаться все доступные способы изучения задачи (аналитические средства): точные и автомодельные решения, получаемые при специальных предположениях, асимптотические оценки, размерный анализ, а также экспериментальные факты.

В результате численного решения можно выявить существенные закономерности процесса, исследовать влияние на него различных параметров и т. п. Затем можно перейти к другим, более сложным, физическим моделям.

Численные методы, которые реализуются на ЭВМ, должны быть экономичными, т. е. затрачивать минимальное число арифметических операций; универсальными, т. е. пригодными для широкого класса прикладных задач, и просто реализуемыми на ЭВМ. Естественно, что в круг таких свойств входят сходимость и устойчивость численного метода.

В последние годы трудами советских исследователей: А. Н. Тихонова, А. А. Самарского, А. А. Дородницына, Н. Н. Яненко, Г. М. Марчука и других, а также зарубежных иссле-

дователей: Д. Дугласа, Д. Писмена, Р. Рихтмайера и других разработаны численные методы для различных классов прямых и обратных задач математической физики и прикладной математики.

А. Н. Тихонов и А. А. Самарский построили однородные разностные схемы для решения класса дифференциальных уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Этими схемами не предусматривается выделение точек разрыва коэффициентов, что позволяет вести вычисления во всей области по одним и тем же формулам [88].

А. Н. Тихонов разработал эффективные методы для решения некорректно поставленных задач [89—93], успешно реализуемых в самых широких областях науки и техники [15, 16, 31, 35, 63].

А. А. Самарский обосновал метод суммарной аппроксимации (конструктивного построения экономичных разностных схем) для многомерных уравнений математической физики. Им введено понятие аддитивности схемы как системы операторно-разностных уравнений, аппроксимирующей исходное дифференциальное уравнение в суммарном смысле. Он же предложил достаточно общие эвристические приемы получения сходящихся экономичных схем. Методы А. А. Самарского широко используются как для исследования сложных задач теоретической физики, так и для больших региональных задач прогноза колебания уровня грунтовых вод и оптимального проектирования мощных газовых месторождений (месторождение Газли в Бухаро-Хивинской газоносной провинции, Уренгой на севере Тюменской области).

А. А. Дородницын со своими учениками О. М. Белоцерковским, П. И. Чушкиным и другими разработал и внедрил метод интегральных соотношений, позволивший решить целый класс сложных задач газовой динамики. Н. Н. Яненко [106, 107] предложил метод дробных шагов для решения многомерных задач математической физики. В работах Г. М. Марчука [66, 67] даны методы численного решения сложных задач математической физики и метеорологии. Д. Дуглас, Д. Писмен [108, 109] разработали методы переменных направлений.

Определенный вклад в развитие и обоснование метода секток внесли Б. М. Будак, С. К. Годунов, В. С. Рябенкий, А. Ф. Филиппов, В. К. Саульев, Е. Г. Дьяконов, И. В. Фрязинов, В. Б. Андреев и др.

В настоящей монографии рассматривается применение численных и точных аналитических методов к решению задач фильтрации воды при неустановившемся режиме движения в двумерной и квазитрехмерной постановке в многосвязной области с краевыми условиями первого и второго рода.

Численные методы, предлагаемые в данном исследовании, основаны на работах А. А. Самарского. Они реализованы на ЭВМ типа «М-20» и «Минск-22». Наряду с этим в работе приводятся точные аналитические решения для класса задач с вертикальной неоднородностью (многослойные задачи) [4—34].

Построение точных аналитических решений, наряду с разработанными нами эффективными численными методами решения таких задач, необходимо потому, что они позволяют провести качественные исследования процесса; они могут быть использованы для проверки численных алгоритмов, применены в виде тестов; наконец, имея точные решения, можно поставить и решить (на основании опытных наблюдений) обратные задачи, т. е. задачи по определению параметров, входящих в математическую модель.

Одним из технически совершенных приемов мелиорации засоленных и заболоченных земель является вертикальный дренаж, позволяющий сочетать задачу мелиорации с использованием подземных вод на орошение.

Многочисленные исследования гидрогеологических разрезов пластов показывают, что в большинстве случаев основной водоносный горизонт, из которого производится откачка, перекрыт сверху малопроницаемой покровной толщей, а снизу подстилается слабопроницаемой прослойкой, через которую осуществляется связь с нижележащими водоносными слоями.

До недавнего времени придерживались представления о несжимаемости слабопроницаемых прослоек, содержащих подземные воды, или, в лучшем случае, признавали наличие в них упругих запасов, считая их незначительными.

Мур, Шильсюиз, Херст и Маскет, разработавшие гидродинамическую теорию упругого режима, учитывали только упругость жидкости, но не учитывали упругости пласта. Расхождение теоретических подсчетов с фактическими данными привело к необходимости создания более точного представления об упругом режиме фильтрации в пористой среде.

В природных условиях пласты находятся в сжатом состоянии. С началом откачки подземных вод скважиной происходит понижение давления около нее. В процессе откачки размеры зоны понижения давления вырастают, в результате чего зона сжатия пластов и расширения воды захватывает все новые и новые области. Освободившаяся вода за счет упругих запасов снижает эффективность работы скважины. Учет этой воды дает возможность более точно отразить физическую картину движения подземных вод в слоистых грунтах. Дальнейшая разработка этих вопросов и внедрение их в гидрогеологическую практику весьма важны и диктуются возросшими потребностями гидрогеологии.

В настоящее время имеется достаточное количество фундаментальных работ, например, В. Н. Щелкачева [103], В. М. Шестакова [102], Н. Н. Веригина [48], И. А. Чарного [100] и т. д., в которых учитывается упругий режим фильтрации в слоях. Учет же упругого режима в слабопроницаемых прослойках был произведен М. С. Хантушем [97].

Следует отметить, что схемы потока, рассмотренные М. С. Хантушем, не предусматривают наличия свободной поверхности грунтовых вод, расположенных в покровных суглинках, перекрывающих водоносный пласт, из которого ведется откачка.

В первой главе настоящей монографии рассматривается нестационарный поток грунтовых вод к скважинам вертикального дренажа, когда основной водоносный горизонт лежит под малопроницаемой покровной толщей, а снизу подстилается слабопроницаемой прослойкой, через которую происходит связь с нижележащим слоем [7, 17, 18, 38].

Считается, что справедлива гипотеза Мятиева—Гиринского [52, 72], по которой движение в слабопроницаемых слоях происходит преимущественно по вертикали, а в основном, хорошо проницаемом горизонте, — в горизонтальном направлении. Тогда, с учетом упругого режима фильтрации в слабопроницаемой прослойке, такой процесс сводится к решению системы трех дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \mu_b \frac{\partial H_1}{\partial t} &= -k_b \frac{H_1 - H}{H_1} + q \\ \mu \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \\ &\quad - k_n \frac{\partial H_2 (x_1 y_1 - m_1 t)}{\partial z} + k_b \frac{H_1 - H}{H_1} \\ \frac{1}{a_n} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где H_1 — глубина грунтовых вод от свободной поверхности до кровли основного водоносного горизонта;

H — напор основного водоносного горизонта;

μ_b — коэффициент водоотдачи или недостаток насыщения покровной толщи;

k_b, k, k_n — коэффициенты фильтрации покровной толщи, основного пласта и слабопроницаемой прослойки соответственно;

$T = km$ — фильтрационная проводимость основного горизонта;

$$a = \frac{T}{\mu^*} \quad \text{и} \quad a_n = \frac{k_n m_n}{\mu_n^*} - \text{коэффициенты пьезопрово-}$$

дности основного пласта и слабопроницаемой прослойки соответственно;

m, m_n — мощности основного пласта и слабопроницаемой прослойки соответственно;

μ^*, μ_n^* — коэффициенты упругой водостдачи;

H_2 — напор в пределах слабопроницаемой прослойки;

x, y — горизонтальные, а z — вертикальная координаты.

Предполагается, что напор в горизонтах, расположенных ниже слабопроницаемой прослойки H , практически не зависит от работы скважины и остается постоянным за все время ее работы. Интенсивность инфильтрации q в общем случае является переменной величиной, зависящей от H_1 .

Система (1) — нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных, точное решение которой удастся получить лишь при некоторых допущениях.

Дано точное решение задачи о неустановившемся притоке воды к совершенной скважине, пробуренной в основной напорный слой, работающий с постоянным расходом Q_c и постоянной инфильтрацией. Дан трехслойный пласт (круговой, радиусом R_k), ограниченный в плане, скважина находится в центре пласта. При этом установлено, что дебит скважины не может быть произвольным:

$$Q_c \leq \frac{2\pi T \left(H_0 + m_n \frac{q}{k_n} + H_1 \operatorname{erf} \frac{q}{k_n} \right) I_1 \left(\frac{R_k}{B_n} \right)}{k_1 \left(\frac{R_k}{B_n} \right) I_0 \left(\frac{r}{B_n} \right) + k_0 \left(\frac{r}{B_n} \right) I_1 \left(\frac{R_k}{B_n} \right)};$$

здесь

$$B_n^2 = \frac{m_n T}{k_n}$$

Если инфильтрация является переменной, зависящей от глубины залегания грунтовых вод, т. е. когда используется, например, теория Крылова—Аверьянова, то даже в линеаризированной постановке не удастся получить точное решение. В этом случае эффективным оказалось применение численных методов с использованием электронно-вычислительных машин. С помощью неявной конечно-разностной схемы решения нелинейной системы уравнений (1) получено реше-

ние задачи о притоке жидкости к одной центральной скважине в пласте ограниченной протяженности с учетом испарения.

На основании численных экспериментов нами показано влияние параметров испарения $H_{кр}$, q_0 , n на распределения напоров, уровней и перетоков воды из слоев.

Рассматривается неустановившийся приток к батареям (галереям) вертикальных дрен в слоистом пласте. Эта задача формулируется следующим образом.

Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \mu_b \frac{\partial H_1}{\partial t} &= -k_b \frac{H_1 - H}{H_1} + q \\ \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \\ &+ \frac{k_b}{T} \cdot \frac{H_1 - H}{H_1} - \frac{k_n}{T} \cdot \frac{\partial H_2 (r_1 - m_1 t)}{\partial z} \\ \frac{1}{a_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

с начальными и краевыми условиями

$$H_1(r, 0) = H(r, 0) = H_2(r, z, 0) = H_0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial H(0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial H(R_k, t)}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H(R_r + 0, t)}{\partial r} - \frac{\partial H(R_r - 0, t)}{\partial r} = \frac{Q_r}{(2\pi R_c)^a T e^{1-a}}, \quad (5)$$

$$H_2(r, -m - m_n, t) = H_0, \quad (6)$$

$$H_2(r, -m, t) = H(r, t), \quad (7)$$

где r — расстояние от центра пласта, $r = R_k$ — граница пласта, R_r — положение галереи, Q_r — расход воды на галерею.

Дано точное аналитическое решение системы уравнений (2) в линеаризованной постановке при $q = \text{const}$ с условиями (3) — (7). Решение получено в форме быстросходящихся рядов по специальным функциям. Отдельно выписываются решения при $k_n = 0$.

Для решения системы (2) с условиями (3) — (7) в случае испарения по теории Крылова—Аверьянова разработан численный метод, реализованный на ЭВМ.

Приводятся два численных метода для задачи (2) — (7). По первому способу строится такая конечно-разностная схема этой задачи, которая явно зависит от положения галереи. Во втором способе конечно-разностная схема не зависит от местоположения галереи, т. е. применяется метод сквозного счета.

Контроль точности расчета проводится всеми доступными средствами. При массовых расчетах широко использовались уравнения материального баланса.

Анализ численных расчетов этой модели слоистого пласта позволил установить характер процесса перетоков жидкости в слоях при разных значениях параметров испарения по теории Крылова—Аверьянова [17, 57, 58].

Во второй главе исследуется неустановившееся течение многослойного пласта модели Хантуша. Согласно этой модели многослойный пласт состоит из хорошо проницаемого слоя и двух плохо проницаемых (покровного и нижнего) пропластков. Хантуш рассмотрел радиальный приток к одной совершенной скважине в пласте неограниченной протяженности. В этой же главе рассматриваются задачи о неустановившемся притоке жидкости к батареям (галереям) вертикальных дрен (скважин) в ограниченном пласте модели Хантуша.

Задача о неустановившемся притоке к системе галерей в ограниченном пласте модели Хантуша формулируется так.

Найти решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2}, \\ \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{1}{\xi^a} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^a \frac{\partial H}{\partial \xi} \right) + \\ + \frac{k_1}{T} \cdot \frac{\partial H_1(r, m + m'', t)}{\partial z} - \frac{k_2}{T} \cdot \frac{\partial H_2(r, m'', t)}{\partial z}, \\ \frac{1}{a_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

с начальными и краевыми условиями

$$H_1(\xi, z, 0) = H(\xi, 0) = H_2(\xi, z, 0) = H_0,$$

$$H_1(\xi, m + m' + m'', t) = H_0,$$

или

$$\frac{\partial H_1(\xi, m + m' + m'', t)}{\partial z} = 0,$$

$$H_1(\xi, m + m'', t) = H(\xi, t),$$

$$\frac{\partial H(0, t)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial H(\xi_k, t)}{\partial \xi} = 0,$$

$$\frac{\partial H(\xi_{rl} + 0, t)}{\partial \xi} - \frac{\partial H(\xi_{rl} - 0, t)}{\partial \xi} =$$

$$= \frac{Q_i}{(2\pi\xi_{rl})^a T e^{1-a}} \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

$$H_2(\xi, m'', t) = H(\xi, t),$$

$$H_2(\xi, 0, t) = H_0,$$

или

$$\frac{\partial H_2(\xi, 0, t)}{\partial z} = 0,$$

где при $\alpha = 1$ наблюдается плоскорадиальный поток, $\xi = r$ — расстояние от центра пласта, $\xi_k = R_k$ — его граница; при $\alpha = 0$ имеем плоскопараллельный поток, $\xi = x$ — расстояние от границы полособразного пласта протяженностью $\xi = L$ и шириной l , ξ_{ri} — положение i -й галереи, Q_i — расход i -й галереи, s — число галерей.

В § 1 дано точное аналитическое решение шести задач.

Наряду с указанными точными решениями изложен эффективный метод численного решения рассмотренных задач, реализованный на ЭВМ.

При разработке численного решения весьма целесообразным оказалось применение метода сквозного счета, когда условия на галерее удовлетворяются точно и получаются такие формулы, которые оказываются одинаковыми во всей области, независимо от того, где расположены галереи. Точность расчетов при использовании метода сквозного счета оказалась выше. Это проверено экспериментально при расчетах разнообразных задач на ЭВМ [30, 69].

В третьей главе исследуется неустановившийся приток к галереям вертикальных дрен во взаимодействующих напорных слоях, связанных между собой слабопроницаемой перемычкой. Здесь же даны точные аналитические и численные решения задач о неустановившемся притоке жидкости к круговым и прямолинейным галереям с учетом упругого режима в слабопроницаемом слое.

Задача, для которой получено точное решение, может быть сформулирована следующим образом.

Найти решение системы уравнений

$$\frac{1}{a_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{1}{\xi^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^\alpha \frac{\partial H_1}{\partial \xi} \right) - k \frac{\partial H(\xi, m + m'', t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \frac{\partial^2 H}{\partial z^2},$$

$$\frac{1}{a_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{1}{\xi^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^\alpha \frac{\partial H_2}{\partial \xi} \right) + k \frac{\partial H(\xi, m'', t)}{\partial z}$$

с начальными и граничными условиями

$$H_1(\xi, 0) = H_{10},$$

$$H(\xi, z, 0) = H_0,$$

$$H_2(\xi, 0) = H_{20},$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H_1(0, t)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial H_1(\xi_k, t)}{\partial \xi} = 0, \\
& \frac{\partial H_1(\xi_{rl} + 0, t)}{\partial \xi} - \frac{\partial H_1(\xi_{rl} - 0, t)}{\partial \xi} = \\
& = \frac{Q_{1i}}{(2\pi\xi_{rl})^\alpha T e^{1-\alpha}} \quad (i = 1, 2, \dots, n_1), \\
& H(\xi, m + m'') = H_1(\xi, t), \\
& H(\xi, m'', t) = H_2(\xi, t), \\
& \frac{\partial H_2(0, t)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial H_2(\xi_k, t)}{\partial \xi} = 0, \\
& \frac{\partial H_2(\xi_{rl} + 0, t)}{\partial \xi} - \frac{\partial H_2(\xi_{rl} - 0, t)}{\partial \xi} = \\
& = \frac{Q_{2i}}{(2\pi\xi_{rl})^\alpha T e^{1-\alpha}} \quad (i = 1, 2, \dots, n_2),
\end{aligned}$$

где $\alpha=1$ соответствует радиальному потоку, $\xi=r$ — расстояние от центра пласта, $\xi_k=R_k$ — граница пласта, $\alpha=0$ соответствует плоскопараллельному потоку, $\xi=x$ — расстояние от границы полосообразного пласта протяженностью L и шириной l .

Для этой задачи разработан универсальный численный метод сквозного счета, реализованный на ЭВМ, с помощью которого можно исследовать неустановившееся течение для притока жидкости к одной скважине, питающейся от одного или двух пластов; к системе круговых галерей, работающих раздельно, а также к системе прямолинейных галерей [26, 27, 68].

Результаты расчетов рассмотренных задач позволили установить степень влияния упругого режима фильтрации в слабопроницаемом слое на перетоки жидкости в соседних слоях.

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТАХ С УЧЕТОМ ИСПАРЕНИЯ В ПОКРОВНОМ СЛОЕ

Многочисленные исследования гидрогеологических разрезов пластов, например в Голодной степи Узбекистана, свидетельствуют о том, что напорный водоносный горизонт перекрыт сверху малопроницаемым слоем, а снизу подстилается слабопроницаемой прослойкой, через которую осуществляется связь с нижележащими водоносными слоями.

В некоторых случаях встречаются пласты, когда основной напорный горизонт покрыт сверху и снизу слабопроницаемыми прослойками, через которые происходит связь с остальными водоносными горизонтами и т. д.

Большой вклад в развитие теории упругого режима в пластах и исследование вопросов перетекания жидкости в слоях внесли В. Н. Щелкачев [103—105], М. А. Гусейн-заде [50, 51, 104], В. М. Шестаков [102], Н. Н. Веригин [48], И. А. Чарный [100], Ф. М. Бочеввер [43, 44] и др. Среди зарубежных исследователей следует отметить М. С. Хантуша [97], С. Е. Жакоба [110], впервые, по-видимому, указавших на необходимость учета упругого режима в слабопроницаемой прослойке.

В зависимости от гидрогеологического характера слоев и режима их эксплуатации могут быть построены разные гидромеханические модели движения жидкости в многослойном пласте и соответствующие им математические модели.

В этой главе изучаются некоторые гидромеханические модели движения жидкости в многослойных пластах с учетом испарения с зеркала грунтовых вод покровного слоя. Испарение учитывается по теории Крылова—Аверьянова, т. е. интенсивность его зависит от глубины залегания уровня грунтовых вод. Вид этой зависимости берется в форме

$$q = q_0 \left(1 - \frac{m_b - H_1}{m_b - H_{кр}} \right)^n,$$

где q_0 — интенсивность испарения на дневной поверхности, $H_{кр}$ — критическая глубина стояния грунтовых вод, n — параметр.

В § 1 дан вывод уравнений движения жидкости, когда трехслойный пласт состоит из покровного слоя, среднего хорошо проницаемого слоя и слабопроницаемой перемычки.

Далее приводится аналитическое решение задачи о неустановившемся притоке к одной центральной совершенной скважине в трехслойном ограниченном пласте, пробуренной в хорошо проницаемый слой. Получить аналитическое решение удастся тогда, когда инфильтрация с зеркала грунтовых вод постоянна.

В § 2 исследуются численные методы решения задачи неустановившегося притока к вертикальной скважине в трехслойном ограниченном пласте с учетом испарения с зеркала грунтовых вод по теории Крылова—Аверьянова и упругого режима в слабопроницаемой прослойке. Дается алгоритм численного решения этой задачи, который проиллюстрирован на конкретном примере. Точность предлагаемого метода контролируется по уравнениям материального баланса.

В § 3 приведено аналитическое решение задачи неустановившегося притока к батареям (галереям) вертикальных дрен в трехслойном ограниченном пласте. При этом инфильтрация считается постоянной.

В § 4 дается численный метод решения задачи неустановившегося притока к батареям (галереям) вертикальных дрен в трехслойном ограниченном пласте с учетом испарения по теории Крылова—Аверьянова и упругого режима в слабопроницаемой прослойке. Предлагаемый метод иллюстрируется примерами. Точность численного метода контролируется по уравнениям материального баланса.

§ 1. НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ ПРИТОК ЖИДКОСТИ К СКВАЖИНЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ДРЕНАЖА В ОГРАНИЧЕННОМ ПЛАСТЕ

Рассмотрим нестационарный поток грунтовых вод в трехслойном пласте, когда основной напорный водоносный горизонт лежит под малопроницаемой покровной толщей, а снизу подстилается слабопроницаемой прослойкой, через которую происходит связь с нижележащим слоем.

Будем считать, что справедлива гипотеза Мятлева—Гиринского. Это значит, что в покровном и слабопроницаемом слоях превалирует движение только по вертикали, тогда как горизонтальными составляющими скорости фильтрации можно пренебречь, а в основном напорном слое преобладают лишь горизонтальные движения. Уравнение неразрывности в покровном слое запишется так:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (1.1.1)$$

здесь $w(x, y, z, t)$ — вертикальная составляющая скорости фильтрации.

Подставляя в (I. 1. 1.) выражение для w по закону Дарси и учитывая условие неразрывности напоров на подошве покровного слоя, получаем

$$\mu_b \frac{\partial H_1}{\partial t} = -k_b \frac{H_1 - H}{H_1} + q, \quad (I.1.2)$$

где $H_1(x, y, t)$ — уровень грунтовых вод;

μ_b — свободная водоотдача или недостаток насыщения;

k_b — коэффициент фильтрации в покровном слое;

$H(x, y, t)$ — напор в среднем слое;

$q(x, y, H_1, t)$ — суммарная инфильтрация, характеризующая собственно инфильтрацию и испарение с поверхности уровня грунтовых вод.

Уравнение для напорного водоносного слоя получается на основе теории упругого режима [103] с учетом перетекания с покровного и слабопроницаемого слоев:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + k_b \frac{H_1 - H}{H_1} - k_n \frac{\partial H_2(x, y, z, t)}{\partial z}, \quad (I.1.3)$$

где x и y — координаты горизонтальной плоскости, μ — коэффициент упругой водоотдачи, $T = km$ — фильтрационная проводимость, k — коэффициент фильтрации, m — мощность слоя среднего водоносного горизонта хорошо проницаемого слоя, k_n — коэффициент фильтрации, $H_2(x, y, z, t)$ — напор в слабопроницаемой прослойке, z — координата по вертикали.

В слабопроницаемой перемычке с учетом упругого режима фильтрации уравнение запишется таким образом:

$$\frac{1}{a_n} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2}, \quad (I.1.4)$$

где $a_n = \frac{k_n m_n}{\mu_n}$ — коэффициент пьезопроводности;

μ_n — коэффициент упругой водоотдачи;

m_n — мощность слабопроницаемого слоя.

Таким образом, система дифференциальных уравнений в частных производных (I. 1.2)—(I. 1.4) описывает движение воды в трехслойном пласте. Для однозначного решения этой системы необходимо добавить к ней начальные и краевые условия.

Рассмотрим неустановившийся приток воды к совершенной скважине, пробуренной в основной напорный пласт с постоянным расходом Q_c . Положим, что суммарная инфильтрация постоянна, пласт (круговой, радиусом R_k) ограничен в плане, а скважина находится в центре пласта.

Тогда в силу радиальной симметрии систему уравнений (I. 1. 2)—(I. 1. 4) после линеаризации можно записать так:

$$\mu_b \frac{\partial H_1}{\partial t} = -k_b \frac{H_1 - H}{H_{1\text{cp}}} + q, \quad (\text{I.1.5})$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{k_b}{T} \cdot \frac{H_1 - H}{H_{1\text{cp}}} - \frac{k_n}{T} \frac{\partial H_2(r, -m, t)}{\partial z}, \quad (\text{I.1.6})$$

$$\frac{1}{a_n} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} \quad (\text{I.1.7})$$

(a — пьезопроводность основного напорного горизонта).

Положим

$$H_1(r, t) = H_0 + m_n \frac{q}{k_n} + H_{1\text{cp}} \frac{q}{k_b} + u, \quad (\text{I.1.8})$$

$$H(r, t) = H_0 + m_n \frac{q}{k_n} + v, \quad (\text{I.1.9})$$

$$H_2(r, z, t) = H_0 + (z + m + m_n) \frac{q}{k_n} + w, \quad (\text{I.1.10})$$

где H_0 — постоянный напор в горизонтах ниже слабопроницаемой прослойки.

Тогда уравнения (I.1.5)—(I.1.7) можно записать как

$$\mu_b \frac{\partial u}{\partial t} = -k_b \frac{u - v}{H_{1\text{cp}}}, \quad (\text{I.1.11})$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{k_b}{T} \cdot \frac{u - v}{H_{1\text{cp}}} - \frac{k_n}{T} \cdot \frac{\partial w(r, -m, t)}{\partial z}, \quad (\text{I.1.12})$$

$$\frac{1}{a_n} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \quad (\text{I.1.13})$$

Считая, что работа скважины не влияет на H_0 , начальные и краевые условия будут

$$u(r, 0) = v(r, 0) = w(r, z, 0) = 0, \quad (\text{I.1.14})$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{Q_c}{2\pi T}, \quad (\text{I.1.15})$$

$$\frac{\partial v(R_k, t)}{\partial r} = 0, \quad (I.1.16)$$

$$w(r, -m - m_n, t) = 0, \quad (I.1.17)$$

$$w(r, -m, t) = v. \quad (I.1.18)$$

Система уравнений (I.1.11)–(I.1.13) после преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \bar{f}$$

примет вид

$$\left. \begin{aligned} p\bar{u} &= -a_b(\bar{u} - \bar{v}) \\ \frac{p}{a}\bar{v} &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) - \\ &- \frac{k_n}{T} \frac{d\bar{v}(r, -m, p)}{dz} + \frac{a_b \mu_b}{T} (\bar{u} - \bar{v}) \\ \frac{p}{a_n} \bar{w} &= \frac{\partial^2 \bar{w}}{dz^2} \end{aligned} \right\} \quad (I.1.19)$$

Переходя к изображениям в соотношениях (I.1.14)–(I.1.18), находим граничные условия, которым должна удовлетворять система (I.1.19):

$$\bar{w}(r, -m, p) = \bar{v}(r, p), \quad (I.1.20)$$

$$\bar{w}(r, -m - m_n, p) = 0, \quad (I.1.21)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{d\bar{v}}{dr} = \frac{Q_c}{2\pi T p}, \quad (I.1.22)$$

$$\frac{d\bar{v}(R_k, t)}{dr} = 0. \quad (I.1.23)$$

Исключая функции $\bar{u}$ и $\bar{w}$ из второго уравнения системы (I.1.19), получаем уравнение Бесселя для определения $\bar{v}$:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}}{dr} \right) - \omega^2(p) \bar{v} = 0, \quad (I.1.24)$$

где

$$\omega^2(p) = \frac{p}{a} + \frac{1}{B_b^2} + \frac{p}{p + a_b} + \frac{1}{B_n^2} m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \operatorname{cth} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right). \quad (I.1.25)$$

Функции $\bar{u}$ и $\bar{w}$ связаны с функцией $\bar{v}$ формулами

$$\bar{u} = \frac{a_b}{p + a_b} \bar{v}, \quad (I.1.26)$$

$$\bar{w} = \frac{\operatorname{sh} \left\{ (z + m + m_n) \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right\}}{\operatorname{sh} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right)} \bar{v}, \quad (I.1.27)$$

где

$$a_b = \frac{k_b}{\mu_b H_1 \text{ cp}}, \quad B_b^2 = \frac{T}{a_b \mu_b}, \quad B_n^2 = \frac{m_n T}{k_n}.$$

Применим к уравнению (I.1.24) преобразование Ханкеля с конечными пределами

$$H[\bar{v}] = \int_0^{R_k} r \bar{v}(r, p) J_0(r, \xi_i^*) dr = \bar{v}. \quad (I.1.28)$$

В дальнейшем параметр преобразования $\xi_i^* = \frac{\xi_i}{R_k}$ будет выбран надлежащим образом.

На основании (I.1.28) имеем

$$\begin{aligned} H \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}}{dr} \right) \right] &= \int_0^{R_k} r \left(\frac{d^2 \bar{v}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{v}}{dr} \right) J_0(r \xi_i^*) dr = \\ &= \left\{ r \frac{d\bar{v}}{dr} J_0(r \xi_i^*) \right\}_0^{R_k} - \int_0^{R_k} \frac{d\bar{v}}{dr} \left\{ \frac{d}{dr} [r J_0(r \xi_i^*)] - J_0(r \xi_i^*) \right\} dr. \end{aligned}$$

Используя граничные условия

$$\frac{d\bar{v}(R_k, p)}{dr} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{d\bar{v}}{dr} = \frac{Q_c}{2\pi T p},$$

найдем

$$H \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}}{dr} \right) \right] = -\frac{Q_c}{2\pi T p} - \xi_i^* \int_0^{R_k} r \frac{d\bar{v}}{dr} J_0'(r \xi_i^*) dr. \quad (I.1.29)$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям:

$$\int_0^{R_k} r \frac{d\bar{v}}{dr} J_0'(r \xi_i^*) dr = r J_0'(r \xi_i^*) \bar{v} \Big|_0^{R_k} -$$

$$- \int_0^{R_k} \bar{v} \left[J_0' (r \xi_i^*) + r \xi_i^* J_0' (r \xi_i^*) \right] dr.$$

Далее воспользуемся тем обстоятельством, что бесселева функция $J_0(r \xi_i^*)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$J_0'' (r \xi_i^*) + \frac{1}{r \xi_i^*} J_0' (r \xi_i^*) + J_0 (r \xi_i^*) = 0.$$

Тогда

$$\int_0^{R_k} r \left(\frac{d^2 \bar{v}}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \bar{v}}{dr} \right) J_0 (r \xi_i^*) dr = - \frac{Q_c}{2\pi T p} - \\ - \xi_i^* R_k \bar{v} (R_k, p) J_0' (R_k \xi_i^*) - \xi_i^{*2} \int_0^{R_k} r \bar{v} J_0 (r \xi_i^*) dr.$$

Выберем значения ξ_i^* так, чтобы $J_0' (R_k \xi_i^*) = 0$, или

$$J_1 (R_k \xi_i^*) = J_1 (\xi_i) = 0. \quad (I.1.30)$$

Окончательно выражение (I.1.29) с учетом (I.1.30) будет

$$H \left[\frac{d^2 \bar{v}}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \bar{v}}{dr} \right] = - \frac{Q_c}{2\pi T p} - \xi_i^{*2} \bar{v}. \quad (I.1.31)$$

Следовательно, после применения преобразования Ханкеля уравнение (I.1.24) имеет простой вид:

$$- \frac{Q_c}{2\pi T p} - \xi_i^{*2} \bar{v} - \omega^2 (p) \bar{v} = 0,$$

откуда

$$\bar{v} = - \frac{Q_c}{2\pi T p} \cdot \frac{1}{\xi_i^{*2} + \omega^2 (p)}.$$

Воспользуемся теоремой о том, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле в замкнутом интервале $(0, R_k)$ и если ее трансформанта Ханкеля с конечными пределами определяется при помощи равенства

$$H[f(x)] = \bar{f}(\xi_i^*) = \int_0^{R_k} x f(x) J_\mu(x \xi_i^*) dx,$$

в котором ξ_i^* — корень трансцендентного уравнения

$$\xi_i^* J_\mu'(R_k \xi_i^*) + J_\mu(R_k \xi_i^*) = 0, \quad (I.1.32)$$

то в каждой точке интервала, в которой функция $f(x)$ непрерывна, будем иметь

$$f(x) = \frac{2}{R_k^2} \sum_l \frac{\xi_l^{*2} f(\xi_l^*)}{l^2 + \left(\xi_l^{*2} - \frac{\mu^2}{R_k^2} \right)} \cdot \frac{J_\mu(x \xi_l^*)}{[J_\mu(R_k \xi_l^*)]^2}$$

(сумма берется по всем положительным корням уравнения (I.1.32)).

Чтобы выполнялось соотношение (I.1.30), необходимо положить $\mu = l = 0$. Тогда для функции v можно записать

$$\bar{v} = - \frac{Q_c}{\pi T R_k^2 p} \sum_l \frac{1}{\xi_l^{*2} + \omega^2(p)} \cdot \frac{J_0(r \xi_l^*)}{[J_0(R_k \xi_l^*)]^2},$$

или

$$\bar{v} = - \frac{Q_c}{\pi T p} \sum_l \frac{1}{\xi_l^2 + \omega^2(p) R_k^2} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_l\right)}{J_0^2(\xi_l)}. \quad (I.1.33)$$

Из формулы (I.1.33) легко найти v при стационарном режиме. Для этого воспользуемся известным из теории интегрального преобразования Лапласа предельным соотношением между изображением и оригиналом —

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \bar{v} = \lim_{t \rightarrow \infty} v. \quad (I.1.34)$$

В результате получим

$$v = - \frac{Q_c}{\pi T} \sum_l \frac{1}{\xi_l^2 + \frac{R_k^2}{B_n^2}} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_l\right)}{J_0^2(\xi_l)}. \quad (I.1.35)$$

Сумму ряда в формуле (I.1.35) определим следующим образом. Общий интеграл уравнения (I.1.24) равен

$$\bar{v} = A I_0(\omega r) + B k_0(\omega r).$$

Определяя постоянные A и B из граничных условий (I.1.22) и (I.1.23), будем иметь

$$\bar{v} = - \frac{Q_c}{2\pi T p} \cdot \frac{k_1(\omega R_k) I_0(\omega r) + k_0(\omega r) I_1(\omega R_k)}{I_1(\omega R_k)}.$$

При стационарном режиме эта формула запишется так:

$$v = - \frac{Q_c}{2\pi T} \cdot \frac{k_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right) I_0\left(\frac{r}{B_n}\right) + k_0\left(\frac{r}{B_n}\right) I_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right)}{I_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right)}.$$

Сравнивая последнюю формулу с соотношением (I.1.35), получаем искомую сумму ряда

$$\sum_i \frac{1}{\xi_i^2 + \frac{R_{\kappa}^2}{B_{\Pi}^2}} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_{\kappa}} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k_1\left(\frac{R_{\kappa}}{B_{\Pi}}\right) I_0\left(\frac{r}{B_{\Pi}}\right) + k_0\left(\frac{r}{B_{\Pi}}\right) I_1\left(\frac{R_{\kappa}}{B_{\Pi}}\right)}{I_1\left(\frac{R_{\kappa}}{B_{\Pi}}\right)}.$$

Ординаты свободной поверхности грунтовых вод и пьезометрический напор основного водоносного горизонта при установившемся режиме будут определяться равенствами

$$H_1(r, \infty) = H_0 + m_{\Pi} \frac{q}{k_{\Pi}} + H_{1\text{ср}} \frac{q}{k_{\text{в}}} - \\ - \frac{Q_{\text{с}}}{2\pi T} \cdot \frac{k_1\left(\frac{R_{\kappa}}{B_{\Pi}}\right) I_0\left(\frac{r}{B_{\Pi}}\right) + k_0\left(\frac{r}{B_{\Pi}}\right) I_1\left(\frac{R_{\kappa}}{B_{\Pi}}\right)}{I_1\left(\frac{R_{\kappa}}{B_{\Pi}}\right)},$$

$$H(r, \infty) = H_0 + m_{\Pi} \frac{q}{k_{\Pi}} - \\ - \frac{Q_{\text{с}}}{2\pi T} \cdot \frac{k_1\left(\frac{R_{\kappa}}{B_{\Pi}}\right) I_0\left(\frac{r}{B_{\Pi}}\right) + k_0\left(\frac{r}{B_{\Pi}}\right) I_1\left(\frac{R_{\kappa}}{B_{\Pi}}\right)}{I_1\left(\frac{R_{\kappa}}{B_{\Pi}}\right)}.$$

Дебит скважины в этих равенствах должен удовлетворять неравенству

$$\frac{Q_{\text{с}}}{2\pi T} \cdot \frac{k_1\left(\frac{R_{\kappa}}{B_{\Pi}}\right) I_0\left(\frac{r}{B_{\Pi}}\right) + k_0\left(\frac{r}{B_{\Pi}}\right) I_1\left(\frac{R_{\kappa}}{B_{\Pi}}\right)}{I_1\left(\frac{R_{\kappa}}{B_{\Pi}}\right)} \leq H_0 + m_{\Pi} \frac{q}{k_{\Pi}} + H_{1\text{ср}} \frac{q}{k_{\text{в}}}.$$

Из соотношения (I.1.33) можно найти функцию v с помощью обратного преобразования Лапласа. Однако это решение сложно и громоздко для выполнения численных расчетов. Поэтому получим приближенные решения для больших и малых времен t .

Решение для больших значений времени. Для больших значений t (малых значений p) член, содержащий гиперболический котангенс в соотношении (I.1.25), может быть заменен приближенным значением посредством формулы

$$x \operatorname{cth} x \approx 1 + \frac{x^2}{3},$$

когда $x^2 < 0,2$. Тогда для $\frac{m_n^2 p}{a_n} < 0,2$ (порядка $\frac{m_n^2}{a_n} < 0,2t$) формула (I.1.33) принимает вид

$$\bar{v} = -\frac{Q_c}{\pi T R_k^2} \sum_i \frac{a_1 p + a_2}{p [a_3 p^2 + a_4 p + a_5]} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)}, \quad (I.1.36)$$

где

$$a_1 = 3B_{\text{в}}^2 B_{\text{п}}^2 a a_{\text{п}},$$

$$a_2 = 3B_{\text{в}}^2 B_{\text{п}}^2 a a_{\text{п}} a_{\text{в}},$$

$$a_3 = B_{\text{в}}^2 (3B_{\text{п}}^2 a_{\text{п}} + a m_{\text{п}}^2),$$

$$a_4 = \frac{a_1}{R_k^2} \left(\xi_i^2 + \frac{a_{\text{в}} R_k^2}{a} \right) + 3a a_{\text{п}} (B_{\text{п}}^2 + B_{\text{в}}^2) + B_{\text{в}} m_{\text{п}}^2 a a_{\text{в}},$$

$$a_5 = \frac{a_2}{R_k^2} \left(\xi_i^2 + \frac{R_k^2}{B_{\text{п}}^2} \right).$$

Деля числитель и знаменатель в формуле (I.1.36) на $a_{\text{в}}$ и пренебрегая членом p^3 в силу его малости, получаем

$$\bar{v} = -\frac{Q_c}{\pi T R_k^2} \sum_i \frac{b_1 p + b_2}{b_3 p \left[p + \frac{b_4}{b_3} \right]} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)}, \quad (I.1.37)$$

где

$$b_1 = \frac{a_1}{a_3}, \quad b_2 = \frac{a_2}{a_3}, \quad b_3 = \frac{a_4}{a_3}, \quad b_4 = \frac{a_5}{a_3}.$$

Отсюда легко найти оригинал —

$$v = -\frac{Q_c}{\pi T R_k^2} \sum_i \left\{ \frac{b_2}{b_4} + \left[\frac{b_1}{b_3} - \frac{b_2}{b_4} \right] e^{-\frac{b_4}{b_3} t} \right\} \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)}.$$

Так как

$$\bar{u} = \frac{a_{\text{в}}}{p + a_{\text{в}}} \bar{v},$$

то

$$u = -\frac{Q_c a_{\text{в}}}{\pi T R_k^2} \sum_i \left\{ \left(1 - e^{-a_{\text{в}} t} \right) \frac{b^2}{a_{\text{в}} b_4} + \right.$$

$$+ \left(\frac{b_1}{b_3} - \frac{b_2}{b_4} \right) \frac{b_3}{b_4 - a_b b_3} \left[e^{-a_b t} - e^{-\frac{b_4}{b_3} t} \right] \left\{ \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)} \right\}.$$

Решение для малых значений времени. Так как величина t мала, то p в преобразовании Лапласа велико.

При $\frac{pm_n^2}{a_n} \geq 10$ (порядка $\frac{m_n^2}{a_n} \geq 10t$) гиперболический котангенс в выражении (I.1.25) может быть заменен единицей. В результате формула (I.1.33) примет вид

$$\bar{v} = - \frac{Q_c}{\pi T R_k^2} \sum_i \frac{c_1 p + c_2}{p [p^2 + c_3 p \sqrt{p} + c_4 p + c_5 \sqrt{p} + c_6]} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)}, \quad (I.1.38)$$

где

$$c_1 = a, \quad c_2 = aa_b, \quad c_3 = \frac{am_n}{B_n^2 \sqrt{a_n}},$$

$$c_4 = \frac{a}{R_k^2} \left(\xi_l^2 + \frac{a_b R_k^2}{a} + \frac{R_k^2}{B_b^2} \right),$$

$$c_5 = \frac{am_n a_b}{B_n^2 \sqrt{a_n}}, \quad c_6 = \frac{aa_b \xi_l^2}{R_k^2}.$$

Обозначая через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 корни уравнения

$$\xi^4 + c_3 \xi^3 + c_4 \xi^2 + c_5 \xi + c_6 = 0,$$

перепишем формулу (I.1.38) в таком виде:

$$\bar{v} = - \frac{Q_c}{\pi T R_k^2} \sum_i \frac{c_1 p + c_2}{p (\sqrt{p} - \alpha_1)(\sqrt{p} - \alpha_2)(\sqrt{p} - \alpha_4)(\sqrt{p} - \alpha_2)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{c_1 p + c_2}{p (\sqrt{p} - \alpha_1)(\sqrt{p} - \alpha_2)(\sqrt{p} - \alpha_3)(\sqrt{p} - \alpha_4)} &= \frac{A \sqrt{p} + A_0}{p} + \\ &+ \frac{A_1}{\sqrt{p} - \alpha_1} + \frac{A_2}{\sqrt{p} - \alpha_2} + \frac{A_3}{\sqrt{p} - \alpha_3} + \frac{A_4}{\sqrt{p} - \alpha_4}, \quad (I.1.39) \end{aligned}$$

где

$$A_0(\xi_l) = \frac{c_2}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4},$$

$$A_1(\xi_i) = \frac{c_1 a_1^2 + c_2}{a_1^2 (a_1 - a_2) (a_1 - a_3) (a_1 - a_4)},$$

$$A_2(\xi_i) = \frac{c_1 a_2^2 + c_2}{a_2^2 (a_2 - a_1) (a_2 - a_3) (a_2 - a_4)},$$

$$A_3(\xi_i) = \frac{c_1 a_3^2 + c_2}{a_3^2 (a_3 - a_1) (a_3 - a_2) (a_3 - a_4)},$$

$$A_4(\xi_i) = \frac{c_1 a_4^2 + c_2}{a_4^2 (a_4 - a_1) (a_4 - a_2) (a_4 - a_3)}$$

и используя формулы обращения

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{p - \alpha}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \alpha e^{\alpha^2 t} \operatorname{erfc}(-\alpha) \sqrt{t},$$

находим

$$v = -\frac{Q_c}{\pi T R_K^2} \sum_i \left\{ \frac{A}{\sqrt{\pi t}} + A_0 + \sum_{j=1}^4 A_j \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_j e^{\alpha_j^2 t} \operatorname{erfc}(-\alpha_j) \sqrt{t} \right] \right\} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_K} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)}.$$

Из (I.1.39) легко получается равенство

$A(\xi_i) + A_1(\xi_i) + A_2(\xi_i) + A_3(\xi_i) + A_4(\xi_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots$,
которое дает возможность упростить выражение для v :

$$v = -\frac{Q_c}{\pi T R_K^2} \sum_i \left\{ A_0(\xi_i) + \sum_{j=1}^4 A_j(\xi_i) \alpha_j(\xi_i) \times \right. \\ \left. \times e^{\alpha_j^2 t} \operatorname{erfc}[-\alpha_j(\xi_i)] \sqrt{t} \right\} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_K} \xi_i\right)}{J_0(\xi_i)}.$$

Формула для определения $u(r, t)$ имеет вид

$$u = a_s \int_0^t e^{-a_s \tau} v(r, t - \tau) d\tau.$$

§ 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К ВЕРТИКАЛЬНОЙ ДРЕНЕ В ТРЕХСЛОЙНОМ ОГРАНИЧЕННОМ ПЛАСТЕ С УЧЕТОМ ИСПАРЕНИЯ С ЗЕРКАЛА ГРУНТОВЫХ ВОД И УПРУГОГО РЕЖИМА В СЛАБОПРОНИЦАЕМОЙ ПРОСЛОЙКЕ

Аналитическое решение, построенное в § 1, получено с помощью линеаризации уравнений (I. 1. 2) и (I. 1. 3) и условия $q = \text{const}$. Вместе с тем $q(x, y, H_1, t)$ является функцией координат x, y , уровня H_1 и времени t . Зависимость этой функции от H_1 такова: если уровень грунтовых вод находится на дневной поверхности, то она принимает максимальные значения, а если уровень грунтовых вод опустится ниже некоторой критической глубины, становится равной нулю.

Функция $q(x, y, H_1, t)$ — монотонно убывающая, достигающая своего максимального значения тогда, когда H_1 совпадает с дневной поверхностью и асимптотически стремится к нулю при $H_1 \rightarrow H_{\text{кр}}$, где $H_{\text{кр}}$ — некоторое критическое положение уровня. Таким образом, ниже этой критической глубины имеем $q \equiv 0$. Величина q в таких предположениях характеризует испарение с поверхности уровня грунтовых вод.

С. Ф. Аверьянов [1] предполагает эту величину представлять в форме

$$q = q_0 \left(1 - \frac{m_{\text{в}} - H_1}{m_{\text{в}} - H_{\text{кр}}} \right)^n, \quad (\text{I.2.1})$$

где q_0 — интенсивность испарения на дневной поверхности;
 $H_{\text{кр}}$ — критическая глубина стояния грунтовых вод;
 n — показатель степени.

П. Я. Полубаринова-Кочина и Н. Н. Веригин [1, 76] при $n=1$ учитывали испарение с поверхности уровня грунтовых вод для однослойной модели пласта.

В общем случае задания испарения в форме (I. 2. 1) для многослойной модели пласта построить аналитическое решение, по-видимому, не представляется возможным. Следовательно, для интегрирования нелинейной системы уравнений (I. 1. 2) — (I. 1. 4) с учетом испарения в форме (I. 2. 1) в этом случае целесообразно применять численные методы с использованием электронно-вычислительных машин.

Рассмотрим приток к скважине вертикального дренажа, пробуренной в основной водоносный пласт, в ограниченном пласте круговой формы в плане $r \leq R_{\text{к}}$ с учетом испарения в форме (I. 2. 1).

Пусть скважина находится в центре пласта. Тогда в силу симметричности потока из (I. 1. 2) — (I. 1. 4) получим систему уравнений

$$q_0 \left(1 - \frac{m_b - H_1}{m_b - H_{кр}} \right)^n - \mu_b \frac{\partial H_1}{\partial t} = k_b \frac{H_1 - H}{H_1}, \quad (1.2.2)$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{k_b}{T} \cdot \frac{H_1 - H}{H_1} - \\ - \frac{k_n}{T} \cdot \frac{\partial H_2(r, -m, t)}{\partial z}, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{1}{a_n} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} \quad (1.2.4)$$

с начальными и краевыми условиями вида

$$H_1(r, 0) = H(r, 0) = H_2(r, z, 0) = H_0, \quad (1.2.5)$$

$$\frac{\partial H(R_c, t)}{\partial r} = \frac{Q_c}{2\pi T R_c}, \quad (1.2.6)$$

$$\frac{\partial H(R_k, t)}{\partial r} = 0, \quad (1.2.7)$$

$$H_2(r, -m - m_n, t) = H_0, \quad (1.2.8)$$

$$H_2(r, -m, t) = H(r, t). \quad (1.2.9)$$

Для численного интегрирования системы (1.2.2) — (1.2.4) с условиями (1.2.5) — (1.2.9) перейдем к безразмерным переменным с помощью формул

$$u = \frac{H_1}{H_{хар}}, \quad v = \frac{H}{H_{хар}}, \quad w = \frac{H_2}{H_{хар}}, \quad (1.2.10)$$

$$s = \ln \frac{r}{R_k}, \quad (1.2.11)$$

$$z = m_b \xi, \quad (1.2.12)$$

$$t = \frac{R_k^2}{a} \tau, \quad (1.2.13)$$

$$Q = 2\pi T H_{хар} Q^*. \quad (1.2.14)$$

Подставляя (1.2.10) — (1.2.14) в (1.2.2) — (1.2.9), получаем

$$p_0 \left(1 - \frac{1 - \lambda u}{1 - u_{кр}} \right)^n - \gamma \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{u - v}{u}, \quad (1.2.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = e^{-2s} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \alpha \frac{u - v}{u} - \beta \frac{\partial w \left(s, -\frac{m}{m_b}, \tau \right)}{\partial \xi}, \quad (1.2.16)$$

$$\delta \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \quad (1.2.17)$$

$$u(s, 0) = v(s, 0) = w(s, \xi, 0) = w_0, \quad (I.2.18)$$

$$\frac{\partial v(s_c, \tau)}{\partial s} = Q^*, \quad (I.2.19)$$

$$\frac{\partial v(0, \tau)}{\partial s} = 0, \quad (I.2.20)$$

$$w\left(s, -\frac{m+m_n}{m_b}, \tau\right) = w_0, \quad (I.2.21)$$

$$w\left(s, -\frac{m}{m_b}, \tau\right) = v(s, \tau), \quad (I.2.22)$$

где

$$\alpha = \frac{k_b R_k^2}{TH_{\text{хар}}}, \quad \beta = \frac{k_n}{T} \cdot \frac{R_k^2}{m_b}, \quad (I.2.23)$$

$$\gamma = \frac{a\mu_b}{k_b R_k^2} H_{\text{хар}}, \quad \delta = \frac{am_b^2}{a_n R_k^2}, \quad (I.2.24)$$

$$\lambda = \frac{H_{\text{хар}}}{m_b}, \quad p_0 = \frac{q_0}{k_b}, \quad w_0 = \frac{H_0}{H_{\text{хар}}}, \quad (I.2.25)$$

$$s_c = \ln \frac{R_c}{R_k}, \quad Q^* = \frac{Q}{2\pi TH_{\text{хар}}}.$$

На основании анализа численных решений по материальному балансу установлено, что безразмерную пространственную переменную s следует обязательно брать в форме (I.2.11), ибо только в этом случае правильно учитывается поведение решения в окрестности скважины R_c . Например, если $s = \frac{r}{R_k}$, то ошибка в балансовом соотношении может оказаться $\sim 20\%$.

Для численного решения системы нелинейных уравнений (I.2.15) — (I.2.17) с дополнительными условиями (I.2.18) — (I.2.22) применим неявную конечно-разностную схему.

Отрезок $(s_0, 0)$ разобьем на m равных частей с шагом Δs . Тогда $s_i = s_0 + i\Delta s$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

Уравнение (I.2.17) из-за условия (I.2.22) необходимо решить $m-1$ раз вдоль прямых, параллельных оси z , проходящих через точки s_i , $i = 1, 2, \dots, m-1$. Для решения этого уравнения конечными разностями отрезок $\left(-\frac{m}{m_b}, -\frac{m+m_n}{m_b}\right)$ разобьем на l равных отрезков точками

$$\xi_j = -\frac{m+m_n}{m_b} + j\Delta\xi, \quad j = 0, 1, 2, \dots, l; \quad \Delta\xi = \text{const.}$$

Введем равномерный шаг по времени $\Delta\tau$. Тогда для системы уравнений (I.2.15) — (I.2.17) в любой пространственно-временной точке $\{s_i, \xi_j, k\Delta\tau\}$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, $j = 1, 2, \dots, l-1$, $k = 1, 2, \dots$ можно написать устойчивую неявную конечно-разностную схему с точностью $O[(\Delta s)^2 + (\Delta\xi)^2 + \Delta\tau]$:

$$v_{i,k} - v_{i,k-1} = \theta e^{-2s_i} (v_{i+1,k} - 2v_{i,k} + v_{i-1,k}) + \\ + \alpha \Delta\tau \frac{u_{i,k} - v_{i,k}}{u_{i,k}} + \frac{\beta \Delta\tau}{2\Delta\xi} (-3w_{i,l,k} + 4w_{i,l-1,k} - w_{i,l-2,k}), \quad (I.2.26)$$

$$w_{i,j,k} - w_{i,j,k-1} = \chi (w_{i,j-1,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j+1,k}), \quad (I.2.27)$$

$$\frac{\gamma}{\Delta\tau} (u_{i,k} - u_{i,k-1}) = p_0 \left(1 - \frac{1 - \lambda u_{i,k}}{1 - u_{кр}} \right)^n - \frac{u_{i,k} - v_{i,k}}{u_{i,k}}, \quad (I.2.28)$$

где

$$\theta = \frac{\Delta\tau}{(\Delta s)^2}, \quad \chi = \frac{\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2},$$

$$u_{i,k} = u(s_i, k\Delta\tau), \quad v_{i,k} = v(s_i, k\Delta\tau),$$

$$w_{i,j,k} = w(s_i, \xi_j, k\Delta\tau), \quad j = 1, 2, \dots, l-1; \quad i = 1, 2, \dots, m-1; \\ k = 1, 2, \dots$$

Принимая во внимание (I.2.21), уравнение (I.2.27) можно записать так:

$$w_{i,j,k} = A_{i,j+1,k} w_{i,j+1,k} + B_{i,j+1,k}, \quad (I.2.29)$$

где

$$A_{i,j+1,k} = \frac{\chi}{1 + (2 - A_{i,j,k}) \chi}, \quad (I.2.30)$$

$$B_{i,j+1,k} = \frac{w_{i,j,k-1} + \chi B_{i,j,k}}{1 + (2 - A_{i,j,k}) \chi}, \quad (I.2.31)$$

$$A_{i,1,k} = 0, \quad B_{i,1,k} = w_0, \quad j = 1, 2, \dots, l-1. \quad (I.2.32)$$

Из соотношений (I.2.30) — (I.2.32) можно последовательно определить

$$A_{i,1,k}, A_{i,2,k}, \dots, A_{i,l,k}; \quad B_{i,1,k}, B_{i,2,k}, \dots, B_{i,l,k}.$$

Подставляя в (I.2.26) вместо w его значение из (I.2.29) с учетом условий (I.2.19), (I.2.22) и полагая $u_{i,k}$ известными, уравнение (I.2.26) перепишем в форме

$$v_{i,k} = C_{i+1,k} v_{i+1,k} + D_{i+1,k}, \quad (I.2.33)$$

где

$$C_{l+1, k} = \frac{\theta e^{-2s}}{1 + (2 - C_{l, k}) \theta e^{-2s l} + \frac{\alpha \Delta \tau}{u_{l, k}} - \frac{\beta \Delta \tau}{2 \Delta \xi} \left[(4 - A_{l, l-1, k}) A_{l, l, k} - 3 \right]}, \quad (1.2.34)$$

$$D_{l+1, k} = \frac{v_{l, k-1} + \alpha \Delta \tau + \frac{\beta \Delta \tau}{2 \Delta \xi} \left[(4 - A_{l, l-1, k}) B_{l, l, k} - B_{l, l-1, k} \right] + \theta e^{-2s l} D_{l, k}}{1 + (2 - C_{l, k}) \theta e^{-2s l} + \frac{\alpha \Delta \tau}{u_{l, k}} - \frac{\beta \Delta \tau}{2 \Delta \xi} \left[(4 - A_{l, l-1, k}) \times \right. \\ \left. \times A_{l, l, k} - 3 \right]}, \quad (1.2.35)$$

$$C_{1, k} = 1 - \frac{e^{2s_1}}{2\theta} \left\{ 1 + \frac{\alpha \Delta \tau}{u_1} + \frac{\beta \Delta \tau}{2 \Delta \xi} \left[(4 - A_{1, l-1, k}) A_{1, l, k} - 3 \right] \right\}, \quad (1.2.36)$$

$$D_{1, k} = -\Delta s Q^* + \frac{e^{2s_1}}{2\theta} \left\{ v_{1, k-1} + \alpha \Delta \tau + \frac{\beta \Delta \tau}{2 \Delta \xi} \left[(4 - A_{1, l-1, k}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times B_{1, l, k} - B_{1, l-1, k} \right] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1. \quad (1.2.37)$$

Из уравнения (1.2.33) с помощью условия (1.2.20) имеем

$$v_{m, k} = v_{m-1, k} = \frac{D_{m, k}}{1 - C_{m, k}}. \quad (1.2.38)$$

Таким образом, после вычислений $C_{l, k}$ и $D_{l, k}$ по рекуррентным формулам (1.2.34) — (1.2.37) и $v_{m, k}$ по формуле (1.2.38) из (1.2.33) последовательно определяется $v_{m-2, k}, \dots, v_{0, k}$. Далее, по формулам (1.2.29) окончательно будут вычислены

$$w_{l, j, k}, w_{l, l, k}, \dots, w_{l, 1, k}.$$

В наших рассуждениях мы полагаем, что $u_{l, k}$ нам известно, например, при $u_{l, k} = u_{l, k-1}$; очевидно, таким образом получим первое приближение $v_{l, k}^{(1)}, w_{l, j, k}^{(1)}$.

Подставляя $v_{l, k}^{(1)}$ в уравнение (1.2.15) и интегрируя его, например методом Адамса-Штермера, в промежутке

$$[(k-1) \Delta \tau, k \Delta \tau],$$

находим значение $u_{i,k}^{(1)}$, которое, будучи подставленным в (1.2.33), позволяет определить второе приближение $v_{i,k}^{(2)}$ и т. д.

Процесс закончится тогда, когда будет выполнено условие

$$\max_i \left| v_{i,k}^{(p+1)} - v_{i,k}^{(p)} \right| < \varepsilon, \quad (1.2.39)$$

где $\varepsilon > 0$ — малая величина, характеризующая погрешность вычислений.

Анализ результатов расчетов по описанному выше алгоритму показывает целесообразность применения демпфирования последовательности $v_{i,k}^{(p)}$ по формуле

$$v_{i,k}^{(p)} = \nu \bar{v}_{i,k}^{(p)} + (1 - \nu) v_{i,k}^{(p-1)}; \quad (1.2.40)$$

здесь $\bar{v}_{i,k}^{(p)}$ — решение, полученное из (1.2.33). Иными словами, если последовательность $\bar{v}_{i,k}^{(p)}$ начинает „разбалтываться“, то формула (1.2.40) его стабилизирует.

При оценке точности численного решения используется метод балансовых соотношений. Для вывода этого уравнения поступим следующим образом. Уравнение (1.2.3) можно записать в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial v}{\partial \tau} = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \alpha p_0 \xi \left(1 - \frac{1 - \lambda u}{1 - u_{кр}} \right)^n - \\ & - \alpha \gamma \xi \frac{\partial u}{\partial \tau} - \beta \xi \frac{\partial w \left(\xi, -\frac{m}{m_b}, \tau \right)}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

где $\xi = \frac{r}{R_k}$.

Проинтегрируем уравнение (1.2.41) по всему поровому пространству напорного пласта. Тогда в силу $m = \text{const}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\xi_c}^1 \xi \frac{\partial v}{\partial \tau} d\xi = & -Q^* + \alpha p_0 \int_{\xi_c}^1 \xi \left(1 - \frac{1 - \lambda u}{1 - u_{кр}} \right)^n d\xi - \\ & - \alpha \gamma \int_{\xi_c}^1 \xi \frac{\partial u}{\partial \tau} d\xi - \beta \int_{\xi_c}^1 \xi \frac{\partial w \left(\xi, -\frac{m}{m_b}, \tau \right)}{\partial \xi} d\xi. \end{aligned} \quad (1.2.42)$$

Введем следующие обозначения:

$$v_{\text{ср}}(\tau) = \int_{\xi_c}^1 \xi v(\xi, \tau) d\xi, \quad (1.2.43)$$

$$u_{\text{ср}}(\tau) = \int_{\xi_c}^1 \xi u(\xi, \tau) d\xi. \quad (1.2.44)$$

Тогда уравнение (1.2.42) запишется так:

$$\frac{dv_{\text{ср}}}{dt} = Q^* + q_{\text{исп}}(\tau) - \alpha\gamma \frac{du_{\text{ср}}}{dt} - q_n, \quad (1.2.45)$$

где

$$q_{\text{исп}}(\tau) = \alpha p_0 \int_{\xi_c}^1 \xi \left(1 - \frac{1 - \lambda u}{1 - u_{\text{кр}}} \right)^n d\xi, \quad (1.2.46)$$

$$q_n(\tau) = \beta \int_{\xi_c}^1 \xi \frac{\partial w\left(\xi, -\frac{m}{m_b}, \tau\right)}{\partial \xi} d\xi. \quad (1.2.47)$$

Интегрируя (1.2.45) по τ , получаем

$$\begin{aligned} v_{\text{ср}}(\tau) = v_{\text{ср}}(0) - Q^*\tau + \int_0^\tau q_{\text{исп}}(\tau) d\tau - \\ - \alpha\gamma \left[u_{\text{ср}}(\tau) - u_{\text{ср}}(0) \right] - \int_0^\tau q_n(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.2.48)$$

Соотношение (1.2.48) будем называть уравнением баланса. Для оценки точности численного решения по этому уравнению поступаем следующим образом. Численное решение, соответствующее моменту времени τ , осредняем по формулам (1.2.43) и (1.2.44); далее вычисляем испарение и переток по формулам (1.2.46) и (1.2.47) и подставляем эти величины в (1.2.48). Тогда получим, вообще говоря, приближенное равенство, которое характеризует точность приближенного решения, осредненное по всему поровому пространству, —

$$\begin{aligned} v_{\text{ср}}(\tau) + Q^*\tau + \alpha\gamma u_{\text{ср}}(\tau) - \int_0^\tau q_{\text{исп}}(\tau) d\tau + \\ + \int_0^\tau q_n(\tau) d\tau \approx v_{\text{ср}}(0) - \alpha\gamma u_{\text{ср}}(0). \end{aligned} \quad (1.2.49)$$

Для иллюстрации описанного выше алгоритма рассмотрим задачу при следующих данных: $R_0 = 10$ см, $R_k = 500$ м, $m_b = 40$ м, $m = 100$ м, $m_n = 10$ м, $H_0 = 39$ м, $n = 0, 1, 2, 3$; $q_0 = 0,00036, 0,036$ м/сутки; $Q_c = 1250$ м³/сутки; $a = 10^6$ м²/сутки, $a_n = 10^2$ м²/сутки, $k = 10$ м/сутки, $k_n = 0,01$ м/сутки, $k_b = 1$ м/сутки, $T = 10^3$ м²/сутки, $\mu_b = 0,1$, $H_{кр} = 37$ м.

В рассматриваемом примере коэффициенты фильтрации сильно меняются по вертикали. Так, отношение коэффициентов фильтрации в покровном слое и хорошо проницаемом слое $\left(\frac{k}{k_b}\right)$ равно 10, а в хорошо проницаемом слое и

слабопроницаемой перемычке $\left(\frac{k}{k_n}\right) - 1000$. Это обстоятельство до недавнего времени наводило на мысль о том, что слабопроницаемые слои, содержащие подземные воды, несжимаемы или, в лучшем случае, в них имеются упругие запасы, считающиеся совершенно ничтожными. Исследования М. С. Хантуша [97] показали, что слабопроницаемые слои даже при очень низкой проницаемости могут дать значительное количество воды. Освободившаяся вода за счет упругих запасов снижает эффективность работы вертикальных дрен (скважин), увеличивая время сработки уровня грунтовых вод.

На рис. 1 приводятся результаты расчетов уровня грунтовых вод в покровном слое для различных значений параметра n , испаряемости q_0 и для момента времени $t = 90$ суткам. Из этого рисунка хорошо видно влияние параметра n и испаряемости q_0 на распределение уровня грунтовых вод.

На рис. 2—5 приводятся кривые перетоков, приведенные к единице площади с покровного и слабопроницаемого слоев для различных значений параметров испарения q_0 и n . Эти рисунки хорошо иллюстрируют зависимость перетоков от параметров испарения. Анализируя их, приходим к выводу, что испарение с поверхности грунтовых вод значительно влияет на распределение перетоков в слоях и распределение уровня грунтовых вод. Поэтому при проектировании вертикальных дрен с целью улучшения мелиоративного состояния земель в многослойных пластах и исследования перетоков воды в слоях крайне необходимо учитывать испарение.

Нами проведена проверка точности численного решения по балансовому уравнению, из которой следует, что погрешность не превышает 1%.

Для учета влияния испарения необходимо задаться его параметрами. Существуют некоторые средние характеристики параметров, например для Средней Азии, полученные на основе обработки большого количества фактического материала.

В монографии М. М. Крылова [37] впервые было обращено внимание на наличие испарения с зеркала грунтовых вод и указаны некоторые пределы изменения параметров испаряемости.

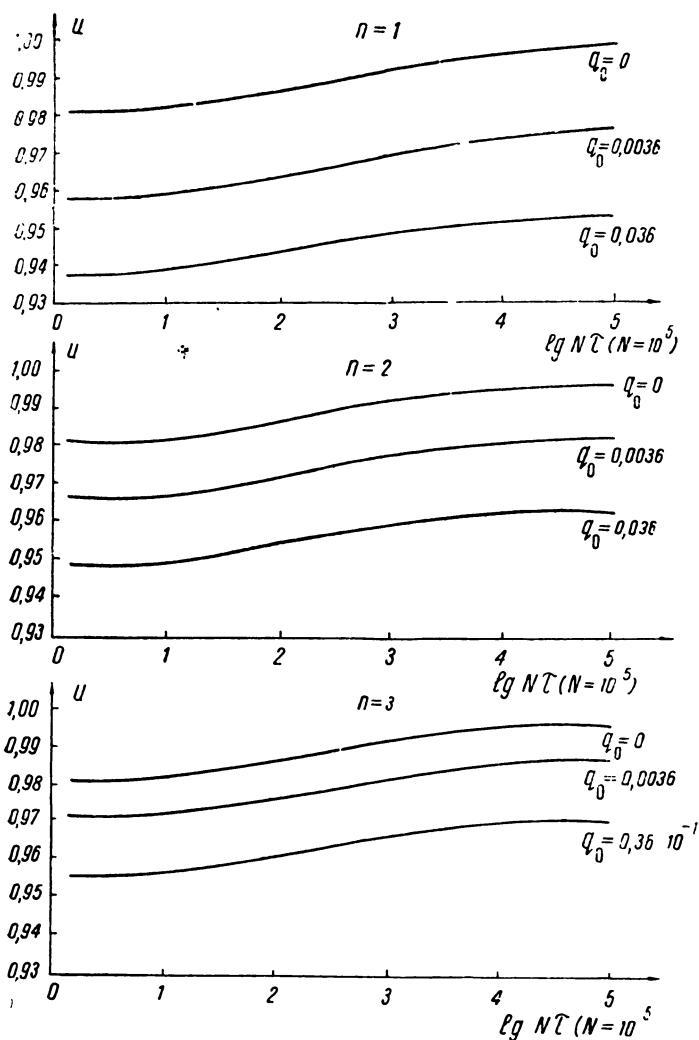


Рис. 1.

В работе [1] предлагались различные эмпирические формулы для определения, например, критической глубины и т. д. Вместе с тем в некоторых случаях эти параметры могут быть определены непосредственно при обработке материалов наблюдений за изменением уровня и напоров в пласте.

Пусть нам заданы карты уровней $H_1(x, y, t)$ и напоров $H(x, y, t)$ за время $t_0 \leq t \leq T$ для $(x_i, y_i) \in D$ (D —область фильтрации).

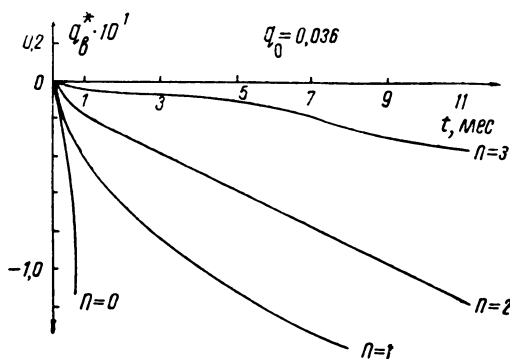


Рис. 2.

Очевидно, из уравнения (1.1.2) можно записать

$$e_{i,j,k} = q_0 \left(1 - \frac{m_b - H_{1,i,j,k}}{m_b - H_{кр}} \right)^n - \mu_b \frac{H_{1,i,j,k} - H_{1,i,j,k-1}}{\Delta \tau} - k_b \frac{H_{1,i,j,k} - H_{i,j,k}}{H_{1,i,j,k}},$$

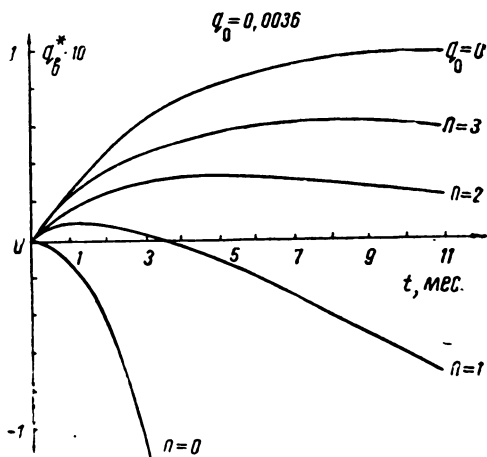


Рис. 3.

где

$$H_{1,i,j,k} = H_1(x_i, y_i, k\Delta\tau),$$

$$H_{i,j,k} = H(x_i, y_j, k\Delta\tau).$$

Параметры q_0 , $H_{кр}$, n будем находить из условия

$$\sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{i,j,k}^2 = \min. \quad (1.2.50)$$

Очевидно, что суммирование ведется для значений $H_{1,i,j,k} > H_{кр}$.

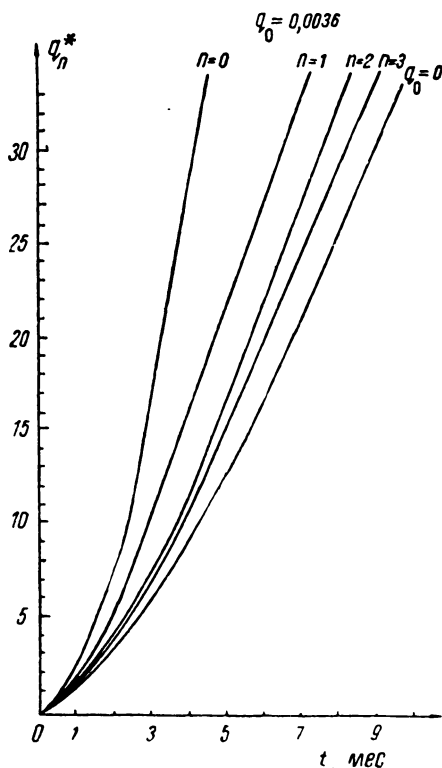


Рис. 4.

Введем обозначение

$$u_0 = \frac{1}{m_B - H_{кр}}.$$

Тогда для определения q_0 , u_0 , n из (1.2.50) получим систему уравнений

$$\sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{i,j,k} \left[1 - u_0 (m_B - H_{1,i,j,k}) \right]^n = 0,$$

$$\sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{i,j,k} \left[1 - u_0 (m_B - H_{1,i,j,k}) \right]^{n-1} (m_B - H_{1,i,j,k}) = 0,$$

$$\sum_l \sum_j \sum_k \varepsilon_{l,j,k} \left[1 - u_0 (m_B - H_{1,l,j,k}) \right]^n \ln \left[1 - u_0 (m_B - H_{1,l,j,k}) \right] = 0.$$

Из первого уравнения можно записать

$$q_0 = \frac{\sum_l \sum_j \sum_k \left[\mu_B \frac{H_{1,l,j,k} - H_{1,l,j,k-1}}{\Delta\tau} - k_B \frac{H_{1,l,j,k} - H_{1,j,k}}{H_{1,l,j,k}} \right] \times \left[1 - u_0 (m_B - H_{1,l,j,k}) \right]^n}{\sum_l \sum_j \sum_k \left[1 - u_0 (m_B - H_{1,l,j,k}) \right]^{2n}}. \quad (1.2.51)$$

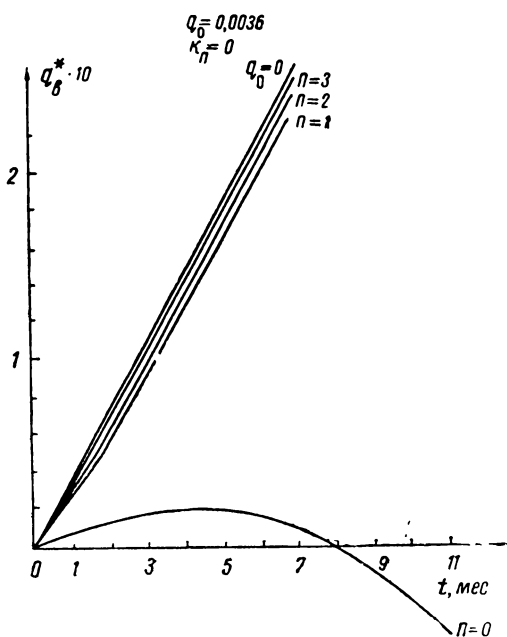


Рис. 5.

Далее, исключая q_0 из двух оставшихся уравнений, для уравнения с неизвестными n и u_0 получаем

$$\left. \begin{aligned} f_1(u_0, n) &= 0 \\ f_2(u_0, n) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.2.52)$$

Система (1.2.52) будет решаться методом последовательных приближений. Поэтому для нахождения каждого $u_0^{(p)}$ система конструируется заново, так как в нее войдут только значения $H_{1, l, j, k} > H_{кр}$.

§ 3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К БАТАРЕЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДРЕН В ТРЕХСЛОЙНОМ ОГРАНИЧЕННОМ ПЛАСТЕ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ГРУНТОВЫХ ВОД В ПОКРОВНОМ СЛОЕ

Рассмотрим нестационарный поток грунтовых вод в пласте ограниченной протяженности к батарее вертикальных дрен (скважин), когда напорный водоносный горизонт, куда пробурены вертикальные дрены, лежит под малопроницаемой покровной толщей, а снизу подстилается слабопроницаемой прослойкой, через которую осуществляется связь с нижележащими слоями. Другими словами, рассмотрим здесь такую же модель трехслойного пласта, что и в предыдущих параграфах.

Для исследуемой задачи можно считать, что справедлива гипотеза Мятлева—Гирицкого, поэтому уравнения (1.1.2)—(1.1.4) будут описывать движение воды в таком многослойном пласте.

Начальные условия обычные и запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} H_1(x, y, 0) &= \varphi_1(x, y) \\ H(x, y, 0) &= \varphi_2(x, y) \\ H_2(x, y, z, 0) &= \varphi_3(x, y) \end{aligned} \right\}, \quad (1.3.1)$$

где $(x, y) \in D$, D — горизонтальная плоскость области фильтрации, $\varphi_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ — заданные функции.

Краевые условия для данной задачи следующие:
на скважинах —

$$\int_{\Gamma_i} T \frac{\partial H}{\partial n} d\gamma = Q_i, \quad (1.3.2)$$

где Γ_i — контур i -й скважины, n — нормаль к контуру скважины, Q_i — заданный расход на скважине;

на подошве основного водонапорного горизонта —

$$H_2(x, y, -m, t) = H(x, y, t); \quad (1.3.3)$$

на границах области D —

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \psi(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (1.3.4)$$

где Γ — граница (или границы) области фильтрации D , n — нормаль к границе Γ , $\psi(x, y, t)$ — заданная функция; на подошве слабопроницаемой прослойки —

$$H_2(x, y, -m - m_n, t) = H_0.$$

Интегрирование нелинейной системы уравнений (I. 1. 2) — (I. 1. 4) с дополнительными условиями (I. 3. 1) — (I. 3. 4) — одна из сложных задач теории уравнений в частных производных. По-видимому, невозможно получить точное аналитическое решение этой задачи для произвольной области D . Поэтому рассмотрим случаи, когда эта система допускает точное аналитическое решение, имеющее важное прикладное значение.

1. Пусть область фильтрации D представляет собой круг радиусом R_k , а батарея вертикальных дрен симметрично расположена на окружности $r = R_r$. Будем считать, что расходы вертикальных дрен одинаковы и расстояние между ними на протяжении всего периода эксплуатации будет постоянным и равным

$$2\sigma = \frac{2\pi R_r}{n};$$

здесь n — число скважин в батарее.

В силу этих предположений задача о неустановившемся притоке жидкости к батарее в трехслойном пласте сведется к задаче о неустановившемся притоке к круговой галерее.

Положим для определенности, что граница пласта непроницаема. Тогда получим следующую задачу.

Решить систему (I. 2. 2) — (I. 2. 4) с начальными и краевыми условиями

$$H_1(r, 0) = H(r, 0) = H_2(r, z, 0) = H_0, \quad (I.3.5)$$

$$\frac{\partial H(0, t)}{\partial r} = 0, \quad (I.3.6)$$

$$\frac{\partial H(R_r + 0, t)}{\partial r} - \frac{\partial H(R_r - 0, t)}{\partial r} = \frac{Q_r}{2\pi T R_r}, \quad (I.3.7)$$

$$\frac{\partial H(R_k, t)}{\partial r} = 0, \quad (I.3.8)$$

$$H_2(z, -m, t) = H(r, t), \quad (I.3.9)$$

$$H_2(z, -m - m_r, t) = H_0. \quad (I.3.10)$$

Для построения аналитического решения системы (I.2.2) — (I.2.4) с условиями (I.3.5) — (I.3.10) положим, что инфильтрация постоянна и нелинейные члены в (I.2.2) и (I.2.3) ли-

неаризированы. Тогда наша задача сведется к интегрированию системы (I.1.5)–(I.1.7) при условиях (I.3.5)–(I.3.10) и $q = \text{const}$.

Функцию $H(r, t)$ будем искать в виде

$$H(r, t) = u(r, t) + \frac{\alpha Q_r}{2\pi T} \ln \frac{r}{R_r}, \quad (\text{I.3.11})$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R_r, \\ 1, & R_r \leq r \leq R_k, \end{cases} \quad (\text{I.3.12})$$

где функция $u(r, t)$ регулярна в $(0, R_k)$. Тогда систему уравнений (I.1.5)–(I.1.7) и условия (I.3.5)–(I.3.10), принимая во внимание (I.3.11), можно записать как

$$q - \mu_b \frac{\partial H_1}{\partial t} = k_b \frac{H_1 - u - \alpha \frac{Q_r}{2\pi T} \ln \frac{r}{R_r}}{H_{1\text{cp}}}, \quad (\text{I.3.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{k_b}{T} \cdot \frac{H_1 - u - \alpha \frac{Q_r}{2\pi T} \ln \frac{r}{R_r}}{H_{1\text{cp}}} - \\ - \frac{k_n}{T} \cdot \frac{\partial H_2(r, -m, t)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{I.3.14})$$

$$\frac{1}{a_n} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2}, \quad (\text{I.3.15})$$

$$H_1(r, 0) = H_2(r, z, 0) = H_0, \quad (\text{I.3.16})$$

$$u(r, 0) = H_0 - \frac{\alpha Q_r}{2\pi T} \ln \frac{r}{R_r}, \quad (\text{I.3.17})$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial r} = 0, \quad (\text{I.3.18})$$

$$\frac{\partial u(R_k, t)}{\partial r} = - \frac{Q_r}{2\pi T R_k}, \quad (\text{I.3.19})$$

$$H_2(r, -m, t) = u(r, t) + \alpha \frac{Q_r}{2\pi T} \ln \frac{r}{R_r}, \quad (\text{I.3.20})$$

$$H_2(r, -m - m_n, t) = H_0. \quad (\text{I.3.21})$$

Если положить

$$u = v - \frac{Q_r}{4\pi T R_k^2} r^2, \quad (\text{I.3.22})$$

$$H = v - \frac{Q_r}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_r} \right). \quad (I.3.23)$$

Тогда задача (I.3.13)–(I.3.21) окончательно примет вид

$$q - \mu_b \frac{\partial H_1}{\partial t} = k_b \frac{H_1 - v + \frac{r^2}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_r} \right)}{H_{1 \text{ cp}}}, \quad (I.3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{k_b}{T} \frac{H_1 - v + \frac{Q_r}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_r} \right)}{H_{1 \text{ cp}}} - \\ - \frac{k_n}{T} \cdot \frac{\partial H_2(r, -m, t)}{\partial z} - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2}, \end{aligned} \quad (I.3.25)$$

$$\frac{1}{a_n} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2}, \quad (I.3.26)$$

$$H_1(r, 0) = H_2(r, z, 0) = H_0, \quad (I.3.27)$$

$$v(r, 0) = H_0 + \frac{Q_r}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_r} \right), \quad (I.3.28)$$

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v(R_k, t)}{\partial r} = 0, \quad (I.3.29)$$

$$H_2(r, -m, t) = v(r, t) - \frac{Q_r}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_r} \right), \quad (I.3.30)$$

$$H_2(r, -m - m_n, t) = H_0. \quad (I.3.31)$$

К системе уравнений (I.3.24)–(I.3.26) применим преобразование Лапласа:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \bar{f}(p),$$

$$\frac{q}{p} - \mu_b (p \bar{H}_1 - H_0) = \frac{k_b}{H_{1 \text{ cp}}} (\bar{H}_1 - \bar{v}) + \frac{k_b}{H_{1 \text{ cp}}} \cdot \frac{\varphi(r)}{p}, \quad (I.3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} [p \bar{v} - H_0 - \varphi(r)] = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}}{dr} \right) + \\ + \frac{k_b}{TH_{1 \text{ cp}}} (\bar{H}_1 - \bar{v}) + \frac{k_b}{TH_{1 \text{ cp}}} \cdot \frac{\varphi(r)}{p} - \frac{k_n}{T} \times \\ \times \frac{\partial \bar{H}_2(r, -m, p)}{\partial z} - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2 p}, \end{aligned} \quad (I.3.33)$$

$$\frac{1}{a_n} (p \bar{H}_2 - H_0) = \frac{\partial^2 \bar{H}_2}{\partial z^2}. \quad (I.3.34)$$

Эту систему необходимо решить при следующих краевых условиях:

$$\frac{dv(0, p)}{dr} = 0, \quad (I.3.35)$$

$$\frac{d\bar{v}(R_k, p)}{dr} = 0, \quad (I.3.36)$$

$$\bar{H}(r, -m, p) = \bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p}, \quad (I.3.37)$$

$$H_2(r, -m - m_n, p) = \frac{H_0}{p}, \quad (I.3.38)$$

где

$$\varphi(r) = \frac{Q_r}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_r} \right). \quad (I.3.39)$$

Общее решение уравнения (I.3.34) имеет вид

$$\bar{H}_2 = C_1(r, p) e^{\sqrt{\frac{p}{a_n}} z} + C_2(r, p) e^{-\sqrt{\frac{p}{a_n}} z} + \frac{H_0}{p}. \quad (I.3.40)$$

Используя условия (I.3.37), (I.3.38), получаем

$$\begin{aligned} \bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} &= C_1(r, p) e^{-\sqrt{\frac{p}{a_n}} m} + C_2(r, p) e^{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m} + \frac{H_0}{p}, \\ 0 &= C_1(r, p) e^{-\sqrt{\frac{p}{a_n}} (m+m_n)} + C_2(r, p) e^{\sqrt{\frac{p}{a_n}} (m+m_n)}. \end{aligned}$$

Отсюда определяются C_1 и C_2 :

$$C_1(r, p) = \frac{\left[\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] e^{\sqrt{\frac{p}{a_n}} (m+m_n)}}{e^{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n}}, \quad (I.3.41)$$

$$C_2(r, p) = - \frac{\left[\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] e^{-\sqrt{\frac{p}{a_n}} (m+m_n)}}{e^{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n}}. \quad (I.3.42)$$

Подставляя (I.3.41) и (I.3.42) в (I.3.40), окончательно получаем

$$\bar{H}_2 = \left[\bar{v} - \frac{1}{p} (\varphi(r) + H_0) \right] \frac{\operatorname{sh} \left\{ (z + m + m_n) \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right\}}{\operatorname{sh} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right)} + \frac{H_0}{p}. \quad (I.3.43)$$

Из (I.3.43) находим

$$\frac{\partial \bar{H}_2(r, -m, p)}{\partial z} = \left(\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right) \sqrt{\frac{p}{a_n}} \operatorname{cth} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right). \quad (\text{I.3.44})$$

Из уравнения (I.3.12) имеем

$$\bar{H}_1 = \frac{qH_{1\text{cp}} + H_0H_{1\text{cp}}\mu_{\text{в}}p + k_{\text{в}}p\bar{v} - k_{\text{в}}\varphi(r)}{\mu_{\text{в}}H_{1\text{cp}}p(p + a_{\text{в}})}; \quad (\text{I.3.45})$$

здесь

$$a_{\text{в}} = \frac{k_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}H_{1\text{cp}}}. \quad (\text{I.3.46})$$

Подставляя (I.3.44) и (I.3.45) в (I.3.33), получаем уравнение

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}}{dr} \right) - \omega^2(p) \bar{v} = \bar{\mathcal{Q}}(r, p), \quad (\text{I.3.47})$$

где

$$\omega^2(p) = \frac{p}{a} + \frac{p}{p + a_{\text{в}}} \frac{k}{TH_{1\text{cp}}} + \frac{k_n}{T} \sqrt{\frac{p}{a_n}} \operatorname{cth} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right), \quad (\text{I.3.48})$$

$$\bar{\mathcal{Q}}(r, p) = -[H_0 + \varphi(r)] \frac{\omega^2(p)}{p} - \frac{a_{\text{в}}q}{Tp(a_{\text{в}} + p)} + \frac{Q_r}{\pi TR_{\text{к}}^2 p}. \quad (\text{I.3.49})$$

Решение уравнения (I.3.47) запишем как

$$\bar{v} = \bar{v}_1(r, p) + \bar{v}_2(p),$$

где

$$\bar{v}_2(p) = \frac{H_0}{p} + \frac{a_{\text{в}}q}{Tp(p + a_{\text{в}})\omega^2(p)} - \frac{Q_r}{\pi TR_{\text{к}}^2 p \omega^2(p)}, \quad (\text{I.3.50})$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}_1}{dr} \right) - \omega^2(p) \bar{v}_1 = -\varphi(r) \frac{\omega^2(p)}{p}. \quad (\text{I.3.51})$$

Функция $\bar{v}_1$ должна удовлетворять краевым условиям (I.3.35) и (I.3.36). Применим к уравнению (I.3.51) преобразование Ханкеля с конечными пределами

$$H[\bar{v}_1] = \int_0^{R_{\text{к}}} r \bar{v}_1(r, p) \cdot J_0(r\xi_i^*) dr = \bar{\bar{v}}_1, \quad (\text{I.3.52})$$

$$\begin{aligned} H\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}_1}{dr} \right)\right] &= \int_0^{R_{\text{к}}} r \left(\frac{d^2\bar{v}_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\bar{v}_1}{dr} \right) J_0(r\xi_i^*) dr = \\ &= \left\{ r \frac{d\bar{v}_1}{dr} J_0(r\xi_i^*) \right\}_0^{R_{\text{к}}} - \int_0^{R_{\text{к}}} \frac{d\bar{v}_1}{dr} \left\{ \frac{d}{dr} [rJ_0(r\xi_i^*)] - J_0(r\xi_i^*) \right\} dr. \end{aligned}$$

Учитывая условия (I.3.35), (I.3.36), будем иметь

$$H \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d \bar{v}_1}{dr} \right) \right] = - \xi_l^* \int_0^{R_k} r \frac{d \bar{v}_1}{dr} J_0' (r \xi_l^*) =$$

$$= \xi_l^* R_k \bar{v}_1 (R_k, p) J_0' (R_k \xi_l^*) - \xi_l^{*2} \int_0^{R_k} r \bar{v}_1 J_0 (r \xi_l^*) dr.$$

Величины ξ_l^* являются корнями уравнения $J_0' (R_k \xi_l^*) = 0$, т. е.

$$J_1 (R_k \xi_l^*) = J_1 (\xi_l) = 0, \quad (I.3.53)$$

$$H \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d \bar{v}_1}{dr} \right) \right] = - \xi_l^{*2} \bar{v}_1, \quad (I.3.54)$$

$$H [\varphi (r)] = \frac{Q_r}{4\pi T R_k^2} \int_0^{R_k} r^3 dr - \frac{Q_r}{2\pi T} \int_0^{R_k} r \ln \frac{r}{R_r} dr + \frac{Q_r}{4\pi T R_k^2} -$$

$$- \int_0^{R_k} r^3 J_0 (r \xi_l^*) dr - \frac{Q_r}{2\pi T} \int_{R_r}^{R_k} r \ln \frac{r}{R_r} J_0 (r \xi_l^*) dr =$$

$$= \frac{Q_r R_k^2}{4\pi T} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_r}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_r} \right\} + \frac{Q_r R_k^2}{2\pi T \xi_l^2} J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_l \right), \quad \xi \neq 0.$$

Таким образом, уравнение (I.3.51) примет вид:

для $\xi_l = 0$ —

$$- \omega^2 (p) \bar{v}_1 = - \frac{Q_r R_k^2}{4\pi T} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_r}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_r} \right\} \frac{\omega^2 (p)}{p},$$

или

$$\bar{v} = \frac{Q_r R_k^2}{4\pi T p} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_r}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_r} \right\}, \quad (I.3.55')$$

а для $\xi_l \neq 0$ —

$$\frac{- \xi_l^2 \bar{v}_1}{R_k^2} - \omega^2 (p) \bar{v}_1 = - \frac{Q_r R_k^2 \omega^2 (p)}{2\pi T \xi_l^2 p} J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_l \right),$$

или

$$\bar{v} = \frac{Q_r R_k^4 \omega^2 (p)}{2\pi T \xi_l^2 p} \cdot \frac{1}{\xi_l^2 + R_k^2 \omega^2 (p)} J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_l \right). \quad (I.3.55'')$$

Применяя формулу обращения Ханкеля, из (I.3.55'), (I.3.55_н) имеем

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 = & \frac{2}{R_k^2} \sum_i \bar{v}_1(\xi_i, p) \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} = \frac{2}{R_k^2} v_1(0) + \\ & + \frac{2}{R_k^2} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{v}_1 \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} = \frac{Q_r}{2\pi T p} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_r}{R_k}\right)^2 - \right. \\ & \left. - \ln \frac{R_k}{R_r} \right\} + \frac{Q_r}{\pi T p} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i\right)}{\xi_i^2} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} - \frac{Q_r}{\pi T p} \times \\ & \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i\right)}{\xi_i^2 + R_k^2 \omega^2(p)} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)}. \end{aligned} \quad (I.3.56)$$

Таким образом, окончательно получим

$$\begin{aligned} \bar{v} = & \frac{H_0}{p} + \frac{a_b q}{T p (p + a_b) \omega^2(p)} - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2 p \omega^2(p)} + \\ & + \frac{Q_r}{2\pi T p} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_r}{R_k}\right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_r} \right\} + \\ & + \frac{Q}{\pi T p} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i\right)}{\xi_i^2} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} - \\ & - \frac{Q_r}{T p} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i\right)}{\xi_i^2 + R_k^2 \omega^2(p)} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)}. \end{aligned} \quad (I.3.57)$$

Используя предельное отношение $\lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{v}(r, p) = v(r, 0)$, имеем

$$\begin{aligned} H_0 + \frac{Q_r}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_r} \right) = & H_0 + \frac{Q_r}{2\pi T} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_r}{R_k}\right)^2 - \right. \\ & \left. - \ln \frac{R_k}{R_r} \right\} + \frac{Q_r}{\pi T} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i\right)}{\xi_i^2} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{Q_r}{\pi T} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i\right)}{\xi_i^2} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} = \varphi(r) - \frac{Q_r}{2\pi T} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_r}{R_k}\right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_r} \right\}, \quad (1.3.58)$$

$$\bar{v} = \frac{H_0 + \varphi(r)}{p} + \frac{a_b q}{Tp(p + a_b) \omega^2(p)} - \frac{Q_r}{\pi TR_k^2 p \omega^2(p)} - \frac{Q_r}{\pi Tp} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i\right)}{\xi_i^2 + R_k^2 \omega^2(p)} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)}. \quad (1.3.59)$$

Корни функций $\omega^2(p)$ и $\omega^2(p)R_k^2 + \xi_i^2$ лежат на отрицательной части вещественной оси, причем точка $p=0$ не является ни корнем этих функций, ни точкой ветвления, так как

$$\sqrt{p} \operatorname{cth} \sqrt{p} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{p + n^2 \pi^2}.$$

Выражение (1.3.48) запишется так:

$$\omega^2(p) = \frac{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n}{(p + a_b) \operatorname{sh}\left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}}\right)} \left\{ \left[\frac{p(p + a_b)}{a} + \frac{pk_b}{TH_{1 \text{ cp}}} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{sh}\left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}}\right)}{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n} + \frac{k}{Tm_n} (p + a_b) \operatorname{ch}\left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}}\right) \right\}.$$

Тогда

$$\frac{\frac{a_b p}{Tp(p + a_b) \omega^2(p)}}{a_b q \frac{\operatorname{sh}\left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}}\right)}{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n}} = \frac{Tp \left\{ p \left[\frac{p + a_b}{a} + \frac{k_b}{TH_{1 \text{ cp}}} \right] \frac{\operatorname{sh}\left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}}\right)}{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n} + \frac{k_n}{Tm_n} (p + a_b) \operatorname{ch}\left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}}\right) \right\}}{a_b q \frac{\operatorname{sh}\left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}}\right)}{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n}}.$$

Это выражение представляет отношение двух обобщенных полиномов. Корнями обобщенного полинома, стоящего в знаменателе, являются $p=0$ (простой полюс) и бесчисленное множество полюсов, определяемых из уравнения относительно положительных θ :

$$\theta \left[\frac{a_{\text{в}} - \theta}{a} + \frac{k_{\text{в}}}{TH_{1\text{cp}}} \right] - \frac{k_{\text{п}}}{T} (a_{\text{в}} - \theta) \sqrt{\frac{\theta}{a_{\text{н}}}} \operatorname{ctg} \left(m_{\text{п}} \sqrt{\frac{\theta}{a_{\text{н}}}} \right) = 0. \quad (1.3.60)$$

Вычет в точке $p=0$ равен $\frac{qm_{\text{п}}}{k_{\text{п}}}$.

Введем следующее обозначение:

$$\eta(p) = p \left(\frac{p + a_{\text{в}}}{a} + \frac{k_{\text{в}}}{TH_{1\text{cp}}} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m_{\text{п}} \sqrt{\frac{p}{a_{\text{н}}}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_{\text{н}}} m}} + \frac{k_{\text{п}}}{Tm_{\text{п}}} (p + a_{\text{в}}) \operatorname{ch} \left(m_{\text{п}} \sqrt{\frac{p}{a_{\text{н}}}} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dp} &= \left[\frac{1}{2} (p + a_{\text{в}}) \left(\frac{1}{a} + \frac{k_{\text{п}} m_{\text{п}}}{Ta_{\text{н}}} \right) + \frac{p}{a} + \frac{k_{\text{в}}}{2TH_{1\text{cp}}} \right] \times \\ &\times \left(\frac{\operatorname{sh} \left(m_{\text{п}} \sqrt{\frac{p}{a_{\text{н}}}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_{\text{н}}} m_{\text{п}}}} + \frac{p + a_{\text{в}}}{2a} + \frac{k_{\text{в}}}{2TH_{1\text{cp}}} + \frac{k_{\text{п}}}{Tm_{\text{п}}} \right) \times \\ &\times \operatorname{ch} \left(m_{\text{п}} \sqrt{\frac{p}{a_{\text{н}}}} \right), \\ \frac{d\eta}{dp} \Big|_{p=\theta_j} &= \left[\frac{1}{2} (a_{\text{в}} - \theta_j) \left(\frac{1}{a} + \frac{k_{\text{п}} m_{\text{п}}}{Ta_{\text{н}}} \right) + \frac{k_{\text{в}}}{2TH_{1\text{cp}}} - \frac{\theta_j}{a} \right] \times \\ &\times \frac{\operatorname{sn} \left(m_{\text{п}} \sqrt{\frac{p}{a_{\text{н}}}} \right)}{\sqrt{\frac{\theta_j}{a_{\text{н}}} m_{\text{п}}}} + \left(\frac{a_{\text{в}} - \theta_j}{2a} + \frac{k_{\text{в}}}{2TH_{1\text{cp}}} + \frac{k_{\text{п}}}{Tm_{\text{п}}} \right) \times \\ &\times \cos \left(m_{\text{п}} \sqrt{\frac{\theta_j}{a_{\text{н}}}} \right), \end{aligned} \quad (1.3.61)$$

где θ_j — положительные корни уравнения (1.3.60).

Обозначим

$$\begin{aligned} \psi_1(\theta_j) = & \left[\frac{1}{2} (a_{\text{в}} - \theta_j) \left(\frac{1}{a} + \frac{k_n m_n}{T a_n} \right) + \frac{k_{\text{в}}}{2TH_{1\text{cp}}} - \frac{\theta_j}{a} \right] \times \\ & \times \frac{\sin \left(m_n \sqrt{\frac{\theta_j}{a_n}} \right)}{\sqrt{\frac{\theta_j}{a_n}} m_n} + \left(\frac{a_{\text{в}} - \theta_j}{2a} + \frac{k_{\text{в}}}{2TH_{1\text{cp}}} + \right. \\ & \left. + \frac{k_n}{T m_n} \right) \cos \left(m_n \sqrt{\frac{\theta_j}{a_n}} \right). \end{aligned} \quad (1.3.62)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{a_{\text{в}} q}{T p (p + a_{\text{в}}) \omega^2(p)} & \rightarrow \frac{q m_n}{k_n} + \sum_j \frac{a_{\text{в}} q \frac{\sin \left(m_n \sqrt{\frac{\theta_j}{a_n}} \right)}{\sqrt{\frac{\theta_j}{a_n}} m_n} e^{-\theta_j t}}{T (-\theta_j) \psi_1(\theta_j)} - \\ & = \frac{q m_n}{k_n} - \frac{a_{\text{в}} q}{T} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi(\theta_j) = & \frac{1}{2} (a_{\text{в}} - \theta_j) \left(\frac{1}{a} + \frac{k_n m_n}{T a_n} \right) + \frac{k_{\text{в}}}{2TH_{1\text{cp}}} - \frac{\theta_j}{a} + \\ & + \left(\frac{(a_{\text{в}} - \theta_j)}{2a} + \frac{k_{\text{в}}}{2TH_{1\text{cp}}} + \frac{k_n}{T m_n} \right) \sqrt{\frac{\theta_j}{a_n}} m_n \operatorname{ctg} \left(m_n \sqrt{\frac{\theta_j}{a_n}} \right), \end{aligned} \quad (1.3.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_r}{\pi T R_{\text{к}}' p \omega^2(p)} & \rightarrow - \frac{Q_r m_n}{\pi R_{\text{к}}^2 k_n} + \frac{Q_r}{\pi T R_{\text{к}}^2} \sum_j \frac{a_{\text{в}} - \theta_j}{\theta_j \psi(\theta_j)} e^{-\theta_j t} = \\ & = \frac{\theta_r a_{\text{в}}}{\pi T R_{\text{к}}^2} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} - \frac{Q_r}{\pi T R_{\text{к}}^2} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\psi(\theta_j)} - \frac{Q_r m_n}{\pi R_{\text{к}}^2 k_n}. \end{aligned}$$

Найдем оригинал формулы (1.3.59). Это отношение в точке $p = 0$ имеет вычет, равный

$$- \frac{Q_r}{\pi T} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_{\text{к}}} \xi_i \right)}{\xi_i^2 + \frac{R_{\text{к}}^2 k_n}{T m_n}} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_{\text{к}}} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)}.$$

Далее,

$$\xi_i^2 + R_{\text{к}}^2 \omega^2(p) = R_{\text{к}}^2 \left\{ \frac{\xi_i^2}{R_{\text{к}}^2} + \omega^2(p) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= R_k^2 \frac{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n}{(p + a_n) \operatorname{sh} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right)} \left\{ \frac{\xi_l^2 (p + a_n)}{R_k^2} \frac{\operatorname{sh} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n} + \right. \\
&\quad + \left[\frac{p(p + a_n)}{a} + \frac{k p_n}{TH_{1 \text{ cp}}} \right] \frac{\operatorname{sh} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n} + \\
&\quad \left. + \frac{k_n}{T m_n} (p + a_n) \operatorname{ch} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\frac{Q_r}{\pi T p} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_l \right)}{\xi_l^2 + R_k^2 \omega^2(p)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)} = - \frac{Q_r}{\pi T p} \times \\
&\times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(p + a_n) \frac{\operatorname{sh} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_n}}} J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_l \right)}{\frac{\xi_l^2 (p + a_n)}{R_k^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n} + \eta(p)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)}.
\end{aligned}$$

Обозначим через σ положительные корни уравнения

$$\xi_l^2 \frac{a_n - \sigma}{R_k^2} \cdot \frac{\sin \left(m_n \sqrt{\frac{\sigma}{a_n}} \right)}{\sqrt{\frac{\sigma}{a_n}} m_n} + \eta(-\sigma) = 0, \quad (1.3.64)$$

или

$$\begin{aligned}
&\frac{\xi_l^2 (a_n - \sigma)}{R_k^2} - \sigma \left(\frac{a_n - \sigma}{a} + \frac{k_n}{TH_{1 \text{ cp}}} \right) - \\
&- \frac{k_n}{T} (a_n - \sigma) \sqrt{\frac{\sigma}{a_n}} \operatorname{ctg} \left(m_n \sqrt{\frac{\sigma}{a_n}} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Определим

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dp} \left\{ \frac{\xi_l^2 (p + a_B)}{R_K^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n} + \eta(p) \right\} &= \left[\frac{\xi_l^2}{2R_K^2} \left(1 - \frac{a_B}{p} \right) + \right. \\
 &+ \frac{1}{2} (p + a_B) \left(\frac{1}{a} + \frac{k_n m_n}{T a_n} \right) + \frac{p}{a} + \frac{k_B}{2TH_{1cp}} \Big] \times \\
 &\times \frac{\operatorname{sh} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n} + \left[\frac{\xi_l^2 (p + a_B)}{2R_K^2 p} + \frac{p + a_B}{2a} + \frac{k_B}{2TH_{1cp}} + \right. \\
 &\left. + \frac{k_n}{T m_n} \right] \operatorname{ch} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right), \\
 \frac{d}{dp} \left\{ \frac{\xi_l^2 (p + a_B)}{R_K^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n} + \eta(p) \right\} &_{p=-\sigma_v} = \\
 &= \left[\frac{\xi_l^2}{2R_K^2} \left(1 + \frac{a_B}{\sigma_v} \right) + \frac{1}{2} (a_B - \sigma_v) \left(\frac{1}{a} + \frac{k_n m_n}{T a_n} \right) - \right. \\
 &- \frac{\sigma_v}{a} + \frac{k_B}{2TH_{1cp}} \Big] \frac{\operatorname{sh} \left(m_n \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_n}} \right)}{\sqrt{\frac{\sigma_v}{a_n}} m_n} + \left[\frac{\xi_l^2 (\sigma_v - a_B)}{2R_K^2 \sigma_v} + \right. \\
 &+ \frac{a_B - \sigma_v}{2a} + \frac{k_B}{2TH_{1cp}} + \frac{k_n}{T m_n} \Big] \cos \left(m_n \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_n}} \right), \quad (1.3.65) \\
 \frac{Q_r}{\pi T R_K^2 p} \sum_{i=1}^{\infty} &- \frac{(p + a_B) \frac{\operatorname{sh} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n} J_0 \left(\frac{R_r}{R_K} \xi_l \right)}{\frac{\operatorname{sh} \left(m_n \sqrt{\frac{p}{a_n}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_n}} m_n} + \eta(p)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_j)} \rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow -\frac{Q_r}{\pi T} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i\right)}{\xi_i^2 + \frac{R_k^2 R_n}{T m_n}} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} + \frac{Q_r}{\pi T R_k^2} \times$$

$$\times \sum_v \sum_i \frac{(a_b - \sigma_v) J_0\left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i\right)}{\sigma_v \chi(\xi_i, \sigma_v)} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} e^{-\sigma_v t},$$

где

$$\chi(\xi_i, \sigma_v) = \frac{\xi_i^2}{2R_k^2} \left(1 + \frac{a_b}{\sigma_v}\right) + \frac{\xi_i^2 (\sigma_v - a_b)}{2R_k^2 \sigma_v} \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_n}} m_n \times$$

$$\times \operatorname{ctg} \left(m_n \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_n}} \right) + \psi(\sigma_v).$$

Таким образом, окончательно оригинал (1.3.59) примет вид

$$v(r, t) = H_0 + \varphi(r) + \frac{q m_n}{k_n} - \frac{a_b q}{T} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} -$$

$$- \frac{Q_r}{\pi R_k^2} \frac{m_n}{k_n} + \frac{Q_r}{\pi T} \frac{a_b}{R_k^2} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\psi(\theta_j)} -$$

$$- \frac{Q_r}{\pi T} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i\right)}{\xi_i^2 + \frac{R_k^2 k_n}{T m_n}} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} + \frac{Q_r}{\pi T R_k^2} \sum_v \sum_i \frac{a_b - \sigma_v}{\sigma_v} \times$$

$$\times \frac{J_0\left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i\right)}{\chi(\xi_i, \sigma_v)} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} e^{-\sigma_v t} = H_0 + \varphi(r) +$$

$$+ \left(q - \frac{Q_r}{\pi R_k^2} \right) \left(\frac{m_n}{k_n} - \frac{a_b}{T} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} \right) - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\psi(\theta_j)} -$$

$$- \frac{Q_r}{\pi T} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i\right)}{\xi_i^2 + \frac{R_k^2 k_n}{T m_n}} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} +$$

$$+ \frac{Q_r}{\pi T R_k^2} \sum_v \sum_i \frac{(a_b - \sigma_v) J_0\left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i\right) e^{-\sigma_v t}}{\sigma_v \chi(\xi_i, \sigma_v)} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)}.$$

Следовательно, из (I.3.23) имеем

$$\begin{aligned}
 H = H_0 + \left(q - \frac{Q_r}{\pi R_k^2} \right) \left(\frac{m_n}{k_n} - \frac{a_b}{T} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} \right) - \\
 - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\psi(\theta_j)} - \frac{Q_r}{\pi T} \sum_{l=1} \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_l \right)}{\xi_l^2 + \frac{R_k^2 k_n}{T m_n}} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)} + \\
 + \frac{Q_r}{\pi T R_k^2} \sum_y \sum_l \frac{(a_b - \sigma_y) J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_l \right) e^{-\sigma_y t}}{\sigma_y \chi(\xi_l, \sigma_y)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)}. \quad (I.3.66)
 \end{aligned}$$

Из (I.3.45) можно найти оригинал для H_1 :

$$\begin{aligned}
 H_1(r, t) = H_0 e^{-a_b t} + \frac{q}{\mu_b a_b} (1 - e^{-a_b t}) - \\
 - \varphi(r) (1 - e^{-a_b t}) + e^{-a_b t} \int_0^t v(r, \tau) e^{a_b \tau} d\tau. \quad (I.3.67)
 \end{aligned}$$

Функцию $H_2(r, z, t)$ найдем непосредственным интегрированием уравнения (I.3.26) с условиями (I.3.27), (I.3.30), (I.3.31):

$$\begin{aligned}
 H_2(r, z, t) = - \frac{m+z}{m_n} H_0 + \frac{m+m_n+z}{m_n} H(r, t) + \\
 + \frac{2}{\pi} \int_0^t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{m_n}\right)^2 a_n (t-\tau)} \sin \frac{n\pi}{m_n} z \right\} \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (I.3.68)
 \end{aligned}$$

Положим, что $k_n = 0$. Тогда соотношение (I.3.59) упростится следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \bar{v} = \frac{H_0 + \varphi(r)}{p} + \frac{a_b q}{T(p + a_b) \left(\frac{p}{a} + \frac{p}{a_b + p} \frac{k_b}{T H_{1 \text{ cp}}} \right) p} - \\
 - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2 p^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{k_b}{p + a_b} \frac{1}{T H_{1 \text{ cp}}} \right)} - \\
 - \frac{Q_r}{\pi T p} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_l \right)}{\xi_l^2 + R_k^2 \left[\frac{p}{a} + \frac{p}{p + a_b} \frac{k_b}{T H_{1 \text{ cp}}} \right]} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{H_0 + \varphi(r)}{p} + \frac{a_b q}{Tp^2 \left(\frac{p + a_b}{a} + \frac{k_b}{TH_1 \text{cp}} \right)} - \\
&\quad - \frac{Q_r}{\pi TR_k^2 p^2 \left(\frac{p + a_b}{a} + \frac{k_b}{TH_1 \text{cp}} \right)} - \frac{Q_r}{\pi T p} \times \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(p + a_b) J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i \right)}{\xi_i^2 (p + a_b) + R_k^2 p \left(\frac{p + a_b}{a} + \frac{k_b}{TH_1 \text{cp}} \right)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)}. \quad (1.3.69)
\end{aligned}$$

Найдя оригинал формулы (1.3.69), окончательно будем иметь

$$\begin{aligned}
v(r, t) &= H_0 + \frac{Q_r}{2\pi T} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_r}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_r} \right] + \\
&+ \frac{a_b a}{T \left(a_b + \frac{k_b a}{TH_1 \text{cp}} \right)} \left(q - \frac{Q_r}{\pi R_k^2} \right) t - \frac{a_b a}{T \left(a_b + \frac{k_b a}{TH_1 \text{cp}} \right)^2} \times \\
&\quad \times \left(q - \frac{Q_r}{\pi R_k^2} \right) \left[1 - e^{-\left(a_b + \frac{a k_b}{TH_1 \text{cp}} \right) t} \right] \frac{Q_r a}{\pi T R_k^2} \times \\
&\quad \times \sum_i \frac{[a_b - A_1(\xi_i)] J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i \right)}{A_1(\xi_i) [A_2(\xi_i) - A_1(\xi_i)]} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} e^{-A_1 t} - \\
&\quad - \frac{Q_r a}{\pi T R_k^2} \sum_i \frac{[a_b - A_2(\xi_i)] J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i \right)}{A_2(\xi_i) [A_2(\xi_i) - A_1(\xi_i)]} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} e^{-A_2 t}, \quad (1.3.70)
\end{aligned}$$

где

$$A_{1,2} = B(\xi_i) \mp \sqrt{B^2(\xi_i) - \frac{\xi_i^2 a_b a}{R_k^2}}, \quad (1.3.71)$$

$$B(\xi_i) = \frac{1}{2} \left[\left(a_b + \frac{k_b a}{R_k^2} \right) + \frac{\xi_i^2 a}{R_k^2} \right]. \quad (1.3.72)$$

Из формулы (1.3.58) можно получить ряд соотношений:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_i^2} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} = -\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \left(\frac{R_r}{R_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \ln \frac{R_k}{R_r}, \quad (1.3.73)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_i^2} \cdot \frac{J_0^2\left(\frac{R_r}{J_0^2} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_r}{R_k}\right)^2 + \frac{1}{2} \ln \frac{R_k}{R_r} - \frac{3}{8}, \quad (I.3.74)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_i^2} \cdot \frac{J_0\left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0(\xi_i)} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{R_r}{R_k}\right)^2 - \frac{1}{2} \right], \quad (I.3.75)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_i^2} = \frac{1}{8}. \quad (I.3.76)$$

§ 4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К БАТАРЕЯМ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДРЕН В ТРЕХСЛОЙНОМ ОГРАНИЧЕННОМ ПЛАСТЕ С УЧЕТОМ ИСПАРЕНИЯ С ЗЕРКАЛА ГРУНТОВЫХ ВОД

Рассмотрим задачу, поставленную в § 3, без линеаризации уравнений (I. 2. 2) — (I. 2. 4) и исследуем влияние испарения на распределение уровней напоров и перетоков в слоях.

Итак, надо проинтегрировать систему (I. 2. 2) — (I. 2. 4). Как уже было отмечено, эта система уравнений — нелинейная; ее сложно проинтегрировать аналитически. Поэтому в данном случае применим численный метод с использованием ЭВМ.

Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$u = \frac{H_1}{H_{\text{хар}}}, \quad v = \frac{H}{H_{\text{хар}}}, \quad w = \frac{H_2}{H_{\text{хар}}}, \quad (I.4.1)$$

$$\xi = \frac{r}{R_k}, \quad \eta = \frac{z}{m_b}, \quad \tau = \frac{a}{R_k^2} t, \quad (I.4.2)$$

$$Q^* = \frac{QR_k}{2\pi TH_{\text{хар}} R_r}.$$

Подставляя (I.4.1) — (I.4.3) в (I.2.2) — (I.2.4), (I.3.5) — (I.3.10), получаем

$$p_0 \left(1 - \frac{1 - \lambda u}{1 - u_{\text{кр}}} \right)^n - \gamma \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{u - v}{u}, \quad (I.4.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \alpha \frac{u - v}{u} - \beta \frac{\partial w \left(\xi, -\frac{m}{m_b}, \tau \right)}{\partial \eta}, \quad (I.4.5)$$

$$\partial \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \quad (1.4.6)$$

$$u(\xi, 0) = v(\xi, 0) = w(\xi, \eta, 0) = w_0, \quad (1.4.7)$$

$$\frac{\partial v(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial v(1, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (1.4.8)$$

$$\frac{\partial v(\xi_r + 0, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial v(\xi_r - 0, \tau)}{\partial \xi} = Q^*, \quad (1.4.9)$$

$$w\left(\xi, -\frac{m+m_n}{m_b}, \tau\right) = w_0, \quad (1.4.10)$$

$$w\left(\xi, -\frac{m}{m_b}, \tau\right) = v(\xi, \tau), \quad (1.4.11)$$

где величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \rho_0, w$ были введены в § 2 с помощью формул (1.2.23)–(1.2.25).

Для построения численной схемы решения задачи (1.4.4)–(1.4.11) отрезок $(0, 1)$ разобьем точками $\xi_i = i\Delta\xi$, $i = 1, 2, \dots, s$, на s равных частей, а отрезок $\left(-\frac{m+m_n}{m_b}, -\frac{m}{m_b}\right)$ — точками $\eta_j = -\frac{m+m_0}{m_b} + j\Delta\eta$, $j = 1, 2, \dots, l$, на l равных частей. Тогда, введя равномерный шаг по времени $\Delta\tau$ в пространственно-временной точке $(\xi_i, \eta_j, k\Delta\tau)$ ($i=1, 2, \dots, s-1, j=1, 2, \dots, l, k=1, 2, \dots$), можно написать устойчивую неявную конечно-разностную схему с точностью $O[(\Delta\eta)^2 + (\Delta\xi)^2 + \Delta\tau]$:

$$w_{i,j,k} = A_{i,j+1,k} w_{i,j+1,k} + B_{i,j+1,k}, \quad (1.4.12)$$

$$v_{i,k} = C_{i+1,k} v_{i+1,k} + D_{i+1,k}, \quad (1.4.13)$$

где $A_{i,j+1,k}, B_{i,j+1,k}$ были введены в § 2 с помощью формул (1.2.30)–(1.2.32);

$$C_{i+1,k} = \frac{\theta + \frac{1}{2\xi_i} \cdot \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi}}{1 + (2 - C_{i,k})\theta + \frac{\Delta\tau}{2\xi_i \Delta\xi} C_{i,k} + \frac{\beta \Delta\tau}{2\Delta\eta}} \times \\ \times [(4 - A_{i,l-1,k})A_{i,l,k} - 3] + \frac{\alpha \Delta\tau}{u_{i,k}} \quad (1.4.14)$$

$$D_{l, k-1} + \left(\theta - \frac{\Delta\tau}{2\xi_l \Delta\xi} \right) D_{l, k} + \alpha\Delta\tau + \beta \frac{\Delta\tau}{2\Delta\eta} \times$$

$$D_{l+1, k} = \frac{\times [(4 - A_{l, l-1, k}) B_{l, l, k} - B_{l, l-1, k}]}{1 + (2 - C_{l, k}) \theta + \frac{\Delta\tau}{2\xi_l \Delta\xi} C_{l, k} - \beta \frac{\Delta\tau}{2\Delta\eta} \times} ; \quad (I.4.15)$$

$$\times [(4 - A_{l, l-1, k}) A_{l, l, k} - 3] + \frac{\alpha\Delta\tau}{u_{l, k}}$$

$$C_{l, k} = 1, \quad D_{l, k} = 0, \quad (I.4.16)$$

$$l = 1, 2, \dots, q-1, \quad q+1, \dots, s-1, \quad \xi_q = \xi_r ;$$

$$C_{q+1, k} = \frac{1 + 2\theta + \frac{\alpha\Delta\tau}{u_{q+1}} - \frac{\beta\Delta\tau}{2\Delta\eta} [(4 - A_{q+1, l-1, k}) A_{q+1, l, k} - 3]}{4 - \frac{\theta + \frac{\Delta\tau}{2\xi_{q+1} \Delta\xi}}{6 - (4 - A_{q+1, l-1, k}) A_{q+1, l, k} + \frac{\Delta\xi}{\Delta\xi + 2\xi_{q+1}}}} ; \quad (I.4.17)$$

$$D_{q+1, k} = \frac{v_{q+1, k-1} + \alpha\Delta\tau + \frac{\beta\Delta\tau}{2\Delta\eta} [(4 - A_{q+1, l-1, k}) B_{q+1, l, k} - B_{l, l-1, k}]}{6 - \frac{\theta + \frac{\Delta\tau}{2\xi_{q+1} \Delta\xi}}{6 - (4 - A_{q+1, l-1, k}) A_{l, q, k} + \frac{\Delta\xi}{\Delta\xi + 2\xi_{q+1}}}} \times$$

$$\times \frac{-6 (A_{q+1, l-1, k} B_{q+1, l, k} + B_{q+1, l-1, k} + 12\Delta\xi\theta^*)}{6 - (4 - A_{q+1, l-1, k}) A_{l, q, k} + \frac{\Delta\xi}{\Delta\xi + 2\xi_{q+1}}} . \quad (I.4.18)$$

Алгоритм решения этой задачи выглядит так. По формулам (I.2.30) — (I.2.32) вычисляются $A_{l, 1, k}, \dots, A_{l, l, k}$; $B_{l, 1, k}, \dots, B_{l, l, k}$. Далее, подставляя $u_{l, k}$ вместо $u_{l, k-1}$ в (I.4.14) — (I.4.18) и принимая во внимание второе соотношение (I.4.8), можно вычислить

$$C_{1, k}, \dots, C_{s, k}; \quad D_{1, k}, \dots, D_{s, k}; \quad v_{s, k}^{(1)}, \dots, v_{0, k}^{(1)}.$$

Подставив найденное значение $v_{l, k}^{(1)}$ в (I.4.4) или его конечно-разностный аналог, найдем $u_{l, k}^{(1)}$. Теперь можно повторить этот процесс заново и найти $v_{l, k}^{(2)}, i = 0, 1, \dots, s$, и $u_{l, k}^{(2)}$

и т. д. Этот алгоритм повторяется до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_i |v_{i,k}^{(p)} - v_{i,k}^{(p-1)}| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — малое.

Если последовательность $\{v_{i,k}^{(p)}\}$ начинает „колебаться“ (осциллировать), начиная с некоторого p , то целесообразно применить операцию демпфирования —

$$v_{i,k}^{(p)} = \nu v_{i,k}^{(p)} + (1 - \nu) v_{i,k}^{(p-1)};$$

здесь $\bar{v}_{i,k}$ — значение искомой функции, полученное описанным выше алгоритмом.

Для оценки точности численного решения применяется метод балансовых уравнений, введенных в § 2 данной главы.

Интегрируя уравнение (1.4.5) по ξ в интервале $(0, 1)$, получаем

$$\frac{dv_{cp}}{dt} = -\xi_r Q^* + q_{исп}(\tau) - \alpha\gamma \frac{du_{cp}}{d\tau} - q_n(\tau),$$

или

$$v_{cp}(\tau) = -\alpha\gamma u_{cp}(\tau) - \xi_r \theta^* \tau + \int_0^\tau q_{исп}(\tau) d\tau - \\ - \int_0^\tau q_n(\tau) d\tau + v_{cp}(0) + \alpha\gamma u_{cp}(0),$$

где

$$v_{cp}(\tau) = \int_0^1 \xi v(\xi, \tau) d\xi, \\ u_{cp}(\tau) = \int_0^1 u(r, \tau) d\tau, \\ q_{исп}(\tau) = \alpha\rho_0 \int_0^1 \xi \left(1 - \frac{1-u}{1-u_{кр}}\right)^n d\xi, \\ q_{исп}(\tau) = \beta \int_0^1 \xi \frac{\partial w\left(\xi, -\frac{m}{m_b}, \tau\right)}{\partial \eta} d\xi.$$

Для иллюстрации рассмотрим задачу со следующими данными: $R_k = 500$ м; $m_b = 40$ м; $m = 100$ м; $m_n = 10$ м; $H_0 = 39$ м; $n = 0, 1, 2, 3$; $q_0 = 0; 0,0036; 0,036$;

$Q_r = 1250 \text{ м}^3/\text{сутки}$; $a = 10^6 \text{ м}^2/\text{сутки}$; $a_n = 10^2 \text{ м}^2/\text{сутки}$;
 $k_n = 0,01$; $k_b = 1 \text{ м}/\text{сутки}$; $k = 10 \text{ м}/\text{сутки}$; $\mu = 0,1$; $H_{кр} = 37 \text{ м}$.

На рис. 6 дано распределение уровней грунтовых вод в покровном слое для двух значений испаряемости и четырех значений параметра $n = 0, 1, 2, 3$ и для времени $t = 90$ суткам. Из этого рисунка видно влияние испарения на характер распределения уровня грунтовых вод.

Рисунок 7 иллюстрирует приток жидкости, приведенный к единице площади покровного слоя с поверхности почвогрунта. Из рисунка следует, что величина и характер перетока зависят от n и возрастают вместе с n . Аналогичная картина наблюдается на рис. 8, где показаны перетоки жидкости из слабопроницаемого слоя.

Приведенные рисунки позволяют сделать заключение, что влияние прослоек, т. е. их «долевое» участие в общем вкладе, на распределение напора в основном напорном горизонте и прослойке зависит от вида принятой модели (формулы) испарения и его параметра. Например, при $n=0$ переток из слабопроницаемого слоя значительный, тогда как из покровного слоя он может быть даже отрицательным, т. е. происходит переток из напорного слоя в покровный. Иначе говоря, рис. 7, 8 характеризуют динамику перетоков жидкости в слоях.

Значение характеров перетоков и оценка его количественных величин весьма важны при проведении мелиоративных работ: понижении и поддержании уровня грунтовых вод на данной глубине, рассолении почвогрунтов при освоении новых или улучшении старых орошаемых земель.

В данной работе показано, как численное решение удовлетворяет балансовому уравнению: расхождение между ними составляет $\sim 1\%$, что свидетельствует о высокой точности схемы расчета. По-видимому, результаты таких численных исследований могут найти применение при разработке нефтяных и газовых месторождений, если месторождение состоит из пропластков с содержанием нефти и газа, например месторождение Газли Бухаро-Хивинской газоносной провинции.

Заметим, что если работают несколько соосных круговых батарей вертикальных дрен (скважин), то приведенная выше схема численного интегрирования позволяет решить эту задачу. В этом случае условия (I. 4. 9) будут выполняться на каждой галерее, т. е.

$$\frac{\partial v(\xi_{rl} + 0, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial v(\xi_{rl} - 0, \tau)}{\partial \xi} = Q_i^* ;$$

здесь Q_i^* — безразмерный дебит i -й галереи, $i = 1, 2, \dots, \alpha$. Изменения в вычислительной схеме коснутся только соот-

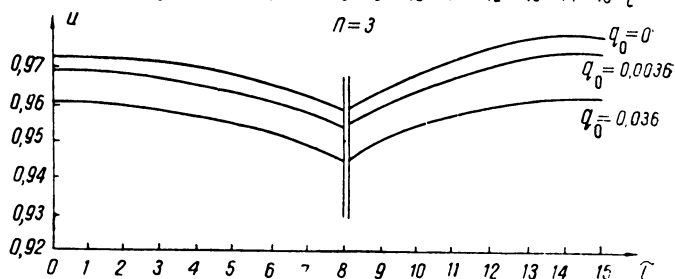
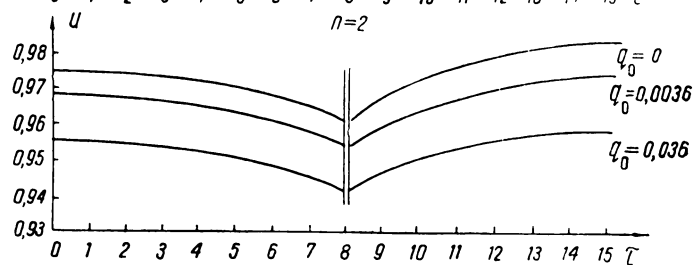
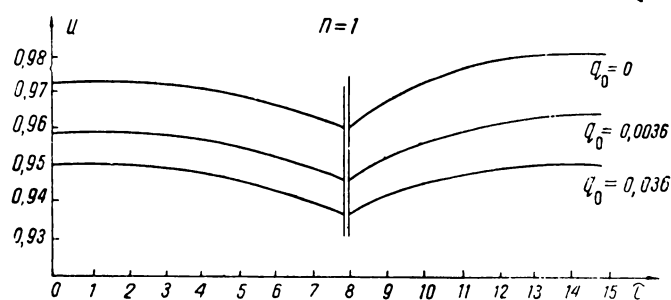
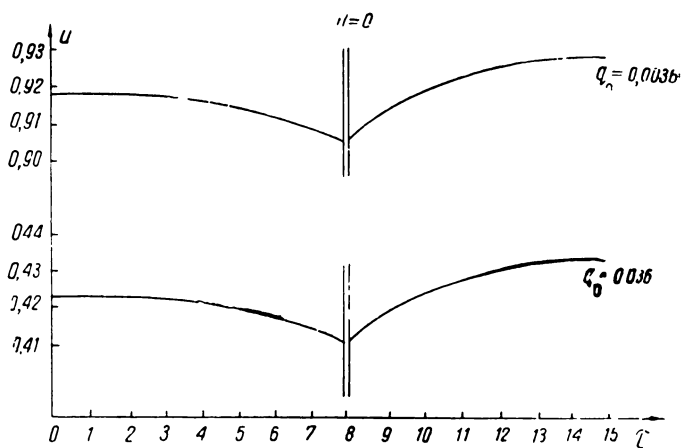


Рис 6.

ношений (I.4.17) и (I.4.18), которые должны быть записаны α раз для $i = q_l + 1$, где $\xi_{q_l} = \xi_{r_l}$, а в остальном сохраняется вся вычислительная схема и, стало быть, формулы

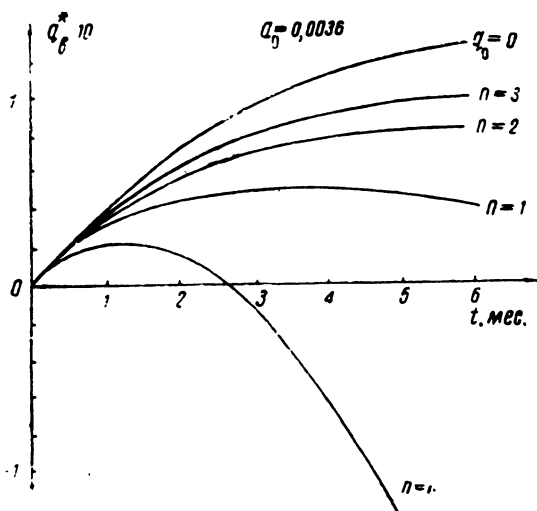


Рис. 7.

(I.4.12)–(I.4.16). Выпишем измененные соотношения:

$$C_{ql+1, k} =$$

$$4 - \left\{ 1 + 2\theta + \frac{\alpha \Delta \tau}{u_{ql+1}} - \frac{\beta \Delta \tau}{2 \Delta \eta} [(4 - A_{ql+1, l-1, k}) A_{ql+1, l, k} - 3] \right\} \times$$

$$\times \frac{1}{\theta + \frac{\Delta \tau}{2 \xi_{ql+1} \Delta \xi}}$$

$$= \frac{6 - (4 - A_{ql+1, l-1, k}) A_{ql+1, l, k} + \frac{\Delta \xi}{\Delta \xi + 2 \xi_{ql+1}}}{\left\{ v_{ql+1, k-1} + \alpha \Delta \tau + \frac{\beta \Delta \tau}{2 \Delta \eta} [(4 - A_{ql+1, l, k}) B_{ql+1, l, k} - B_{l, l, k}] \right\} \times$$

$$\times \frac{1}{\theta + \frac{\Delta \tau}{2 \xi_{ql+1} \Delta \xi}} -$$

$$\frac{- A_{ql+1, l-1, k} B_{ql+1, l, k} + B_{ql+1, l-1, k} + 12 \Delta \xi \theta_l^*}{D_{ql+1, k} = \frac{1 - \frac{1}{6} (4 - A_{ql+1, l-1, k}) A_{ql+1, l, k} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\Delta \xi}{\Delta \xi + 2 \xi_{ql+1}}}$$

Очевидно, что преобразование (1.3.23) можно ввести и при численном решении задач неустановившейся фильтрации к системе круговых галерей. При этом отпадают некоторые трудности, связанные с аппроксимацией конечными разностями вблизи галерей, т. е. в точках ξ_{qt} , так как в этом случае придется аппроксимировать наши уравнения на неравномерной сетке. Ввод таких неравномерных узловых

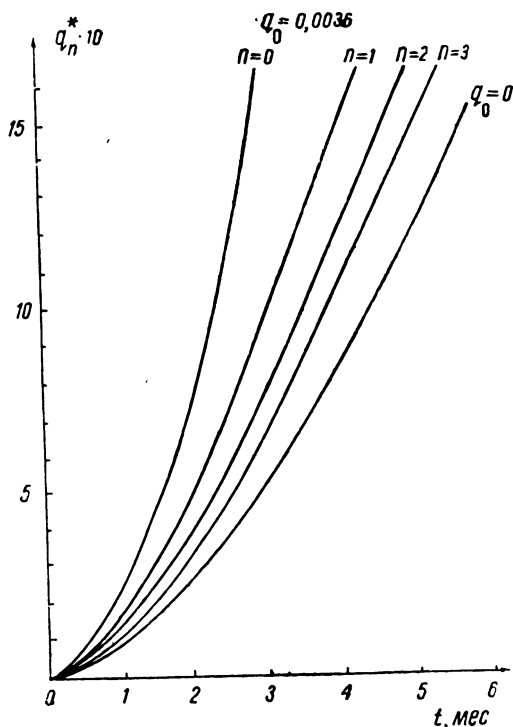


Рис. 8.

точек, естественно, осложняет конечно-разностную аппроксимацию уравнения (1.4.5). Если ввести в рассмотрение новую функцию по соотношению (1.3.33), то эти трудности отпадают, и при любом расположении галерей и произвольном разбиении отрезка $(0, 1)$ для численного решения будет использоваться одного типа конечно-разностная аппроксимация уравнения (1.4.5).

§ 5. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ПЛАНОВЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ЗАДАЧ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТАХ

Рассмотрим неустановившееся движение подземных вод в трехслойном неоднородном в плане пласте с произвольной границей, состоящем из основного хорошо проницаемого напорного горизонта, покровного слоя и слабопроницаемой перемычки, через которую происходит связь с нижележащими водоносными горизонтами. При этом будем учитывать работу вертикальных и горизонтальных дрен, испарение и инфильтрацию. Для слабопроницаемой перемычки примем справедливой теорию М. С. Хантуша, для испарения — закон М. М. Крылова—С. Ф. Аверьянова. В покровном слое будем учитывать горизонтальные составляющие скорости фильтрации.

Тогда неустановившееся движение жидкости в таком трехслойном пласте будет описываться следующей квазилинейной системой уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \mu_b \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[k_b z \frac{\partial z}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k_b z \frac{\partial z}{\partial y} \right] - k_b \left[1 - \frac{h}{z} \right] + \\ &\quad + f - w \\ \mu \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[T \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[T \frac{\partial h}{\partial y} \right] + k_b \left[1 - \frac{h}{z} \right] - \\ &\quad - k_n \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{u=-m} \\ &\quad \frac{1}{a_n} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.5.1)$$

с краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} z(x, y, t) &= F_1(x, y, t); (x, y) \in \Gamma_i; i = \overline{1, m_1}; t \geq t_0 \\ \frac{\partial z}{\partial n}(x, y, t) &= F_2(x, y, t); (x, y) \in \Gamma_j; j = \overline{1, m_2}; t \geq t_0 \end{aligned} \right\}; \quad (1.5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} h(x, y, t) &= F_3(x, y, t); (x, y) \in \Gamma_k; k = \overline{1, m_3}; t \geq t_0 \\ \frac{\partial h}{\partial n}(x, y, t) &= F_4(x, y, t); (x, y) \in \Gamma_l; l = \overline{1, m_4}; t \geq t_0 \end{aligned} \right\}; \quad (1.5.3)$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} \Gamma_i + \sum_{j=1}^{m_2} \Gamma_j = \Gamma; \quad \sum_{k=1}^{m_3} \Gamma_k + \sum_{l=1}^{m_4} \Gamma_l = \Gamma;$$

$$z(x, y, t_0) = \Gamma_5(x, y); (x, y) \in G; \quad (1.5.4)$$

$$h(x, y, t_0) = \Gamma_6(x, y); (x, y) \in G; \quad (1.5.5)$$

$$H(x, y, u, t_0) = \Gamma_7(x, y, u); (x, y, u) \in G; \quad (1.5.6)$$

$$H(x, y, -m, t) = h(x, y, t); (x, y) \in G + \Gamma; t \geq t_0; \quad (1.5.7),$$

$$H(x, y, -m - m_n, t) = \Gamma_8(x, y, t); (x, y) \in G + \Gamma; \quad t \geq t_0 \quad (1.5.8)$$

где

$$w = \begin{cases} w_0 \left(\frac{z - z_{кр}}{m_b - z_{кр}} \right)^p, & z > z_{кр}; \\ 0, & z \leq z_{кр}; \end{cases} \quad (1.5.9)$$

$z(x, y, t)$ — уровень грунтовых вод от кровли основного водоносного горизонта до свободной поверхности;

$h(x, y, t)$ — напор основного водоносного горизонта;

$H(x, y, u, t)$ — напор в слабопроницаемой прослойке;

$T(x, y) = km$ — функция фильтрационной проводимости основного горизонта;

$a_n = \frac{k_n m_n}{\mu_n}$ — коэффициент пьезопроводности слабопроницаемой прослойки;

$\frac{\partial h}{\partial n}(x, y, t)$ — нормальная производная к границе

Γ области фильтрации G ;

k_b, k, k_n, m_b, m, m_n — коэффициенты фильтрации и мощности покровной толщи, основного слоя и прослойки соответственно;

μ, μ_n — коэффициенты упругой водоотдачи основного слоя и прослойки;

μ_b — коэффициент свободной водоотдачи покровной толщи;

w_0 — величина испарения с дневной поверхности;

$z_{кр}$ — критический уровень;

p — показатель степени;

$f(x, y, t)$ — функция инфильтрации;

x, y, u — пространственные координаты;

$F_1 - F_8$ — заданные функции.

Граничные условия на скважинах зададим согласно уравнениям:

$$\int_{\Gamma_k} T \frac{\partial h}{\partial n} ds = Q_k(t); t \geq t_0; k = \overline{1, m_5}, \quad (1.5.10)$$

где $Q_k(t)$ — дебит; Γ_k — контур k -й скважины, ds — элемент Γ_k .

Поставленную задачу будем решать методом конечных разностей. Для этого области фильтрации $G + \Gamma$ поставим в соответствие сетку

$$\Omega_{\bar{i}\bar{j}} \left\{ (x_i = i\bar{\delta}; y_j = j\bar{\delta}; u_l = l\bar{\delta}_1); i = \overline{1, N_j}; \right. \\ \left. j = \overline{1, M_i}; l = \overline{1, P} \right\}; \quad (1.5.11)$$

при этом обозначим

$$h(x_i, y_j, t_k) = h_{i,j,k}; z(x_i, y_j, t_k) = z_{i,j,k} \text{ и т. д.}$$

Используя идеи расщепления дифференциальных операторов [84], будем искать решение (1.5.1), последовательно решая системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu_B T_0}{k_0 H_0 \mu z_{(a)}} \cdot \frac{\partial z_{(a)}^2}{\partial t} &= L_{(a)} \left[k_B z_{(a)}^2 \right] - \frac{2L^2 k_B}{H_0^2} \left[1 - \frac{h_{(a)}}{z_{(a)}} \right] + \\ &+ \frac{2L^2}{k_0 H_0^2} f - \frac{2L^2}{k_0 H_0^2} w \\ \frac{\partial h}{\partial \tau} &= L_{(a)} [Th_{(a)}] + \frac{k_0 L^2 k_B}{T_0 H_0} \left[1 - \frac{h_{(a)}}{z_{(a)}} \right] - \\ &- \frac{k_0 L^2}{T_0 H_0} \cdot \frac{\partial H_{(a)}}{\partial u} \Big|_{u=-1} \\ \frac{\mu_{\Pi}^2 T_0}{a_{\Pi} \mu L^2} \cdot \frac{\partial H_{(a)}}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 H_{(a)}}{\partial u^2} \end{aligned} \right\}, \quad (1.5.12)$$

$$L_{(1)}(u, v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right); L_{(2)}(u, v) = \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

с условиями

$$h_{(1)l,j,k} = h_{l,j,k}; h_{(2)l,j,k} = h_{(1)l,j,k+1}; z_{(1)l,j,k} = z_{l,j,k}; \\ z_{(2)l,j,k} = z_{(1)l,j,k+1}; H_{(1)l,j,k} = H_{l,j,k}; H_{(2)l,j,k} = H_{(1)l,j,k+1}$$

и с краевыми условиями (1.5.2) — (1.5.8).

В системе (1.5.10) введены безразмерные переменные по формулам

$$z^* = \frac{z}{H_0}; h^* = \frac{h}{H_0}; H^* = \frac{H}{H_0}; T^* = \frac{T}{T_0}; k_B^* = \frac{k_B}{k_0}; \\ x^* = \frac{x}{L}; y^* = \frac{y}{L}; u^* = \frac{u}{m_{\Pi}}; \tau = \frac{T_0}{\mu L^2} t,$$

где H_0 , T_0 и k_0 — некоторые характерные значения функции напора, фильтрационной проводимости и коэффициента

фильтрации, L — максимальная в плане протяженность области G (звездочки у безразмерных переменных для удобства опущены).

Дифференциальные операторы системы (1.5.12) представляем конечно-разностными аналогами на сетке $\Omega_{\delta\delta_1}$. При этом дифференциальные операторы $L_{(a)}$ аппроксимируем двухслойной шеститочечной схемой с весом $\sigma_{(a)}$:

$$L_{(a)} h_{(a)} \sim \Lambda_{(a)} [\sigma_{(a)} h_{(a)k+1} + (1 - \sigma_{(a)}) h_{(a)k}];$$

$$L_{(a)} z_{(a)} \sim \Lambda_{(a)} [\sigma_{(a)} z_{(a)k+1} + (1 - \sigma_{(a)}) z_{(a)k}];$$

$$\Lambda_{(1)} [Th_{(1)}] = \frac{T_{i+0,5;j} h_{i+1,j} - (T_{i+0,5;j} + T_{i-0,5;j}) h_{i,j} + T_{i-0,5;j} h_{i-1,j}}{\delta^2}$$

и т. д.

Таким образом, получим систему конечно-разностных уравнений

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\mu_B T_0}{k_0 H_0 \mu z_{(a)k+1}} \cdot \frac{z_{(a)k+1} - z_{(a)k}}{\Delta \tau} = \Lambda_{(a)} [\sigma_a z_{(a)k+1} + \\ & + (1 - \sigma_a) z_{(a)k}] - \frac{2L^2 k_B}{H_0^2} \left[1 - \frac{h_{(a)k+1}}{z_{(a)k+1}} \right] + \\ & + \frac{2L^2}{k_0 H_0^2} f_{k+1} - \frac{2L^2}{k_0 H_0^2} w_{k+1} \\ & \frac{h_{(a)k+1} - h_{(a)k}}{\Delta \tau} = \Lambda_{(a)} [\sigma_a h_{(a)k+1} + (1 - \sigma_a) h_{(a)k}] + \\ & + \frac{k_0 L^2 k_B}{T_0 H_0} \left[1 - \frac{h_{(a)k+1}}{z_{(a)k+1}} \right] - \frac{k_0 L^2}{2T_0 H_0 \delta_1} \times \\ & \times (3H_{(a)p,k+1} - 4H_{(a)p-1,k+1} + H_{(a)p-2,k+1}) \\ & \frac{m_n^2 T_0}{a_n \mu L^2} \cdot \frac{H_{(a)k+1} - H_{(a)k}}{\Delta \tau} = \\ & = \frac{H_{(a)l-1,k+1} - 2H_{(a)l,k+1} + H_{(a)l+1,k+1}}{\delta_1^2} \end{aligned} \right\} \cdot (1.5.13)$$

Так как эта система нелинейна, то для нее применим итерационный процесс, основанный на методе квазилинеаризации нелинейных членов [42]. Согласно этому методу нелинейные члены системы $\varphi(h, z)$ представляются в виде

$$\varphi(h, z) \sim \varphi(\tilde{h}, \tilde{z}) + (h - \tilde{h}) \frac{\partial \varphi(\tilde{h}, \tilde{z})}{\partial h} + (z - \tilde{z}) \frac{\partial \varphi(\tilde{h}, \tilde{z})}{\partial z}, \quad (1.5.14)$$

где

$$\tilde{h} = h_{i,j,k+1}^{(s)}, \quad \tilde{z} = z_{i,j,k+1}^{(s)},$$

s — номер итерации.

При этом положим $h_{i,j,k+1}^{(0)} = h_{i,j,k}$; $z_{i,j,k+1}^{(0)} = z_{i,j,k}$. Итерационный процесс продолжается до выполнения условия

$$\max_{i,j} \left\{ \left| h_{i,j}^{(s)} - h_{i,j}^{(s+1)} \right|; \left| z_{i,j}^{(s)} - z_{i,j}^{(s+1)} \right| \right\} \leq \varepsilon$$

(ε — заданная малая величина).

Следует отметить, что метод квазилинеаризации дает квадратичную сходимость итерационного процесса, а кроме того, позволяет получить вычисленную схему, абсолютно устойчивую для системы в целом.

Последовательные приближения будем получать следующим образом.

Положим $\alpha = 1$. Заметим, что третье уравнение системы 5.13) представляет собой выражение вида

$$a_i'' H_{i-1} - b_i'' H_i + c_i'' H_{i+1} = -d_i''. \quad (1.5.15)$$

Тогда, полагая, что

$$H_i = A_i' H_{i+1} + B_i'', \quad (1.5.16)$$

находим

$$A_i'' = \frac{a_i''}{b_i'' - c_i'' A_{i-1}''}; \quad B_i'' = \frac{d_i'' + c_i'' B_{i-1}''}{b_i'' - c_i'' A_{i-1}''}; \quad (1.5.17)$$

A_0'', B_0'' определяются из краевого условия (1.5.8).

Воспользовавшись краевым условием (1.5.7) и выражением (1.5.16), находим

$$\begin{aligned} & 3H_{p,k+1} - 4H_{p-1,k+1} + H_{p-2,k+1} = h_{i,k+1} \times \\ & \times (3 - 4A_{p-1}'' + A_{p-2}'' A_{p-1}'') + A_{p-2}'' + B_{p-2}'' - 4B_{p-1}''. \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

Подставим (1.5.18) во второе уравнение конечно-разностной системы (1.5.13). Тогда первые два уравнения системы можно представить так:

$$\left. \begin{aligned} a_i z_{i-1}^2 - b_i z_i^2 + c_i z_{i+1}^2 + d_i h_i &= -f_i \\ a_i' h_{i-1} - b_i' h_i + c_i' h_{i+1} + d_i' z_i^2 &= -f_i' \end{aligned} \right\}. \quad (1.5.19)$$

Предположив, что

$$\left. \begin{aligned} z_{i,j}^2 &= A_{i,j} z_{i+1,j}^2 + B_{i,j} h_{i+1} + C_{i,j} \\ h_{i,j} &= A_{i,j}' h_{i+1,j} + B_{i,j}' z_{i+1,j}^2 + C_{i,j}' \end{aligned} \right\}, \quad (1.5.20)$$

получим

$$\begin{aligned}
 A_{l,j} &= \frac{C_{l,j} (b'_{l,j} - a'_{l,j} A'_{l-1,j})}{R_{l,j}}; \quad B_{l,j} = \frac{C_{l,j} (a_{l,j} B_{l,j} + d_{l,j})}{R_{l,j}}; \\
 &\quad (a_{l,j} B_{l-1,j} + d_{l,j}) (a'_{l,j} C'_{l-1,j} + f'_{l,j}) + \\
 C_{l,j} &= \frac{+ (a_{l,j} C_{l-1,j} + f_{l,j}) (b'_{l,j} - a'_{l,j} A'_{l-1,j})}{R_{l,j}}; \\
 A'_{l,j} &= \frac{C'_{l,j} (b_{l,j} - a_{l,j} A_{l-1,j})}{R_{l,j}}; \quad B'_{l,j} = \frac{C_{l,j} (a'_{l,j} B'_{l-1,j} + d'_{l,j})}{R_{l,j}}; \\
 &\quad (a'_{l,j} B'_{l-1,j} + d'_{l,j}) (a_{l,j} C_{l-1,j} + f_{l,j}) + \\
 C'_{l,j} &= \frac{+ (a'_{l,j} C'_{l-1,j} + f'_{l,j}) (b_{l,j} - a_{l,j} A_{l-1,j})}{R_{l,j}}; \\
 R_{l,j} &= (b_{l,j} - a_{l,j} A_{l-1,j}) (b'_{l,j} - a'_{l,j} A'_{l-1,j}) + \\
 &\quad + (a_{l,j} B_{l-1,j} + d_{l,j}) (a'_{l,j} B'_{l-1,j} + d'_{l,j}). \quad (1.5.21)
 \end{aligned}$$

При этом значения $A_{0,j}$; $B_{0,j}$; $C_{0,j}$; $A'_{0,j}$; $B'_{0,j}$; $C'_{0,j}$ трудно получать из краевых условий.

Вычисления производятся следующим образом.

По рекуррентным соотношениям (1.5.17) находим A''_l ; B''_l ($l = \overline{1, p}$); затем по формулам (1.5.21) для всех i и j — $A_{l,j}$; $B_{l,j}$; $C_{l,j}$; $A'_{l,j}$; $B'_{l,j}$; $C'_{l,j}$. По формулам (1.5.20), (1.5.16) определяем все $z_{l,j}$; $h_{l,j}$ и $H_{l,j,l}$. Аналогичным образом вычислительный процесс строится для $\alpha = 2$.

Предложенный метод обеспечивает совместное решение линейных конечно-разностных систем, не прибегая к итерационному процессу, как это предлагается в работе [112]. Согласно [112] каждое из уравнений конечно-разностной системы в обоих координатных направлениях решается независимо друг от друга. При этом неизвестные значения переменных задаются из предыдущей итерации. Такое построение итерационного процесса помимо нерациональной затраты машинного времени приводит к тому, что несмотря на применение абсолютно устойчивых схем для аппроксимации каждого дифференциального уравнения системы, вычислительный процесс для системы в целом сходится только при специальных значениях шага по времени.

Разработанный алгоритм реализован в виде стандартной программы для ЭВМ типа М-20, имеющих два куба МОЗУ.

Предлагаемый алгоритм и соответствующая ему программа опробованы нами на конкретном примере, т. е. для

проведения расчетов выбрана территория 1-го отделения совхоза «Малик» Сырдарьинской области Узбекской ССР, являющаяся с 1964 г. опытным участком, на котором проверяется эффективность вертикального дренажа для мелиоративных целей. Причиной выбора настоящего участка для расчетов являлась хорошая изученность данной территории.

Природные условия. Опытный участок вертикального дренажа расположен в пределах второй и третьей террасы р. Сырдарья, так называемом Шур-узякском понижении. Границами участка являются: на востоке — канал «Малик», на севере, западе и на юге — водосборы и дрены.

По климатическим условиям опытный участок относится к засушливой зоне с жарким летом и умеренной зимой. Среднегодовая температура воздуха участка не превышает 12—14°C. Абсолютный минимум температуры, наблюдаемый в декабре—январе, достигает 7—10°C. Заметное увеличение температуры воздуха наблюдается с мая, а наибольшее значение (27—30°C) — в июле. Среднегодовая температура воздуха составляет 12,6°C.

В прямой зависимости с температурой воздуха находится содержание влаги в нем. Низкая относительная влажность отмечается в летние дни, а высокая — в осенне-зимние и весенние периоды. Если в январе было 75—86% при температуре воздуха — 1,6°C, то в июле при температуре воздуха +26—27°C относительная влажность снизилась до 50%.

Месячный максимум осадков в подавляющем большинстве лет отмечается в марте. Большое количество атмосферных осадков выпадает зимой и весной. Сумма осадков за период с ноября по апрель составляет более 90% годовой суммы осадков, с мая по октябрь включительно — менее 10% от годовой суммы. Среднегодовая величина осадков не превышает 260—300 мм.

Опытный участок орошается водой девятой ветки канала «Малик» (канал № 9). Канал работает в основном в вегетационный период и в период промывок. Территория опытного участка изрезана коллекторно-дренажными системами. В плане они образуют прямоугольники, окружающие поливные карты с четырех сторон.

В геологическом строении участка принимают участие аллювиально-пролювиальные отложения четвертичного возраста.

Общая мощность четвертичных отложений на участке составляет 250—270 м. Четвертичные отложения подстилаются отложениями неогена, которые представлены глинами и песками. Скважиной, пробуренной «Средазнефтеразведкой» в пределах восточной части участка, вскрыты следующие породы четвертичного возраста. С поверхности до глубины 20,6 м породы представлены суглинками легкого типа. Ниже суглин-

ка залегают темно-серые пески мощностью 28,0 м. В интервале глубины 48—68 м вскрыты плотные суглинки, местами глины. Под суглинками с глубины 68 м залегают пески с включением гравия и гальки. Мощность песка составляет 19 м. Пески подстилаются глиной мощностью 15 м. С глубины 102 до 254 м отложения представлены чередующимися песками, глинами и суглинками. Породы легкого типа являются водоносными.

Гидрогеологические исследования в пределах изучаемой территории проводятся Голодностепской гидрогеологической станцией начиная с 1960 г. с целью анализа режима грунтовых вод.

По условиям питания, транзита и расходования литологического строения водовмещающих пород, а также по режиму и гидродинамическим параметрам в толще четвертичных отложений выделяются грунтовые и напорные воды. Эти два типа подземных вод гидравлически связаны между собой через слабопроницаемые суглинистые отложения.

Грунтовые воды. Режим грунтовых вод опытного участка изучался главным образом по мелким скважинам гидрохимкустов и по одиночным скважинам.

Глубина залегания грунтовых вод изменяется от 0,5 до 3,4 м. Движение грунтовых вод опытного участка направлено в основном с юга на север. Источником питания их являются фильтрационные воды каналов, инфильтрация с орошаемых площадей, инфильтрация атмосферных осадков, а также приток воды из подстилающих песчаных горизонтов путем вертикальной напорной фильтрации. Грунтовые воды расходятся в основном на испарение и дренажный отток.

Сезонный режим грунтовых вод характеризуется следующим образом: в январе и феврале происходит подъем уровня грунтовых вод, связанный с усилением питания их из подстилающих песчаных горизонтов, а также подъем уровня напорных вод, достигающий 0,5—0,7 м от поверхности земли в конце февраля и начале марта. Начиная с конца февраля наблюдается медленное снижение уровня грунтовых вод до октября, связанное с уменьшением фильтрации снизу, так как в напорных водах с этого же момента начинается снижение, продолжающееся до октября. Это связано с увеличением дефицита влажности воздуха, что создает условия для усиления испарения с поверхности грунтовых вод. К концу сентября уровень грунтовых вод достигает глубины 2,5—3,0 м.

С октября происходит медленный подъем уровня, который продолжается до конца года. Уровень воды поднимается с глубины 3 м до 1 м. Многолетний режим грунтовых вод склады-

вается из сезонных режимов. С 1960 по 1965 гг. отмечается медленный подъем уровня грунтовых вод. Величина подъема не превышает 0,3—0,5 м. Разница уровней при максимальном положении составляет 0,1—0,2 м. Минерализация грунтовых вод пестрая. Плотный остаток по площади изменяется от 2—3 до 15—18 г/л. Территория опытного участка покрыта различными сельскохозяйственными культурами: хлопчатником, люцерной, кукурузой и бахчевыми, режим грунтовых вод под которыми различен.

Напорные воды. В толще четвертичных отложений имеется ряд водоносных горизонтов с характерными различными величинами напоров. Первый от поверхности напорный водоносный горизонт исследован детально в связи со строительством опытного участка вертикального дренажа, а остальные изучены в региональном масштабе для оценки запасов с целью водоснабжения. В связи с наличием практически непроницаемых пород на глубине 48 м остальные нижележащие напорные горизонты не входят в наш объект исследования, поэтому остановимся на характерных чертах первого напорного водоносного горизонта.

Первый напорный водоносный горизонт представлен аллювиальным песком с включением мелкого гравия, залегающим под толщей суглинков мощностью 20—25 м голодностепского комплекса.

Мощность изучаемого водоносного горизонта в пределах исследуемого района изменяется от 24 до 33 м. Источником формирования напорных вод являются: подземный приток с юга, который расходуется путем вертикальной напорной фильтрации в зону грунтовых вод, а также подземный сток в северном и западном направлениях. Пьезометрический уровень залегает на глубине 0,5—3,0 м от поверхности земли.

Характер изменения режима напорных вод аналогичен характеру изменения режима грунтовых вод.

Наблюдения за режимом уровня грунтовых вод и пьезометрической поверхности напорных вод показали, что пьезометрическая поверхность напорных вод почти повсеместно залегает выше уровня грунтовых вод. При этом разница напоров достигает 1,0 м и более в северной, западной и юго-восточной части территории. Высокое положение уровня грунтовых вод отмечается по скважинам, расположенным вблизи каналов и в рисовых полях.

Графики колебания уровней грунтовых и напорных вод по пьезометрическим кустам показывают, что ход колебания уровней их идентичный. Разница напоров составляет от 0,0 до 2,0 м и изменяется по времени. Большое влияние при этом оказывают климатические факторы, поливно-промывочные мероприятия.

Подготовка на ЭВМ исходных данных для количественной оценки взаимодействия водоносных горизонтов. При решении задачи количественной оценки взаимодействия водоносных горизонтов необходимы следующие исходные данные:

1) карты гидроизогипс и гидроизопьез водоносных горизонтов на какой-либо конкретный период;

2) точное очертание границы расчетной площади с точными количественными характеристиками того или иного природного или искусственного фактора;

3) коэффициенты фильтрации водоносных горизонтов и их мощности;

4) величины водоотдачи грунтового водоносного горизонта и упругой водоотдачи напорного водоносного горизонта;

5) данные о дренажных скважинах и коллекторно-дренажной сети (местоположение, режимы работы, абсолютные отметки и т. д.);

б) величины инфильтрации и испарения и их изменение во времени.

В качестве исходных данных нами использованы результаты исследований Голодностепской режимной станции.

Как было описано выше, в толще водоносных пород, представленных чередующимися супесями, суглинками, песками и глинами, выделяются два водоносных горизонта: а) приуроченный к покровным мелкоземам; б) приуроченный к нижележащим пескам. Условным водоупором являются глины и тяжелые суглинки, залегающие на глубине 47—56 м, практически изолирующие верхние водоносные горизонты Голодностепского комплекса от нижележащих водоносных горизонтов других комплексов. Для опробирования предлагаемой методики выбрана двухслойная схема строения водоносных горизонтов с водоупором на глубине 47 м. При этом учитывалось влияние работы опытно-эксплуатационных скважин вертикально-го дренажа, пробуренных в 1964 г.

Для составления карты начальных и граничных условий и расчетных параметров области фильтрации с двухслойной средой используется та же методика, что и для однослойной схемы [6], с той лишь разницей, что в нашем случае составляются две карты начальных и граничных условий, которые отражают горизонты грунтовых и напорных вод [58].

Область фильтрации граничит с коллекторами: с севера — с «Пограничным», с запада — «Восточным», с востока — с каналом «Малик» и с юга — с дренаем, разделяющей совхозы «Малик» и «Ильич».

Следует учесть, что размеры сетки дискретной области фильтрации зависят от масштаба проводимых исследований. Например, чем меньше масштаб исследований, тем крупнее размеры сеток, и наоборот.

Сеточная область фильтрации в данном участке состоит из 260 узловых точек. Участком сеточной области является квадрат размером 300×300 м.

Начальное положение депрессионной поверхности грунтовых вод области фильтрации было снято с карт гидроизогипс и глубин залегания грунтовых вод участка и составлено на период 1 октября 1964 г., т. е. на период, когда опытные откачки еще не начаты. При определении граничных условий использованы материалы управления оросительных систем Сырдарьинского района.

Граничные условия характеризуются следующими данными: влияние дрен и коллекторов учитывается через среднегодовые уровни воды в них, которые определяются интерполяцией отметок, фиксированных на различных гидропостах. Уровни воды в каналах, коллекторах и дренах приняты постоянными во времени, так как по данным наблюдений колебания уровня воды в них за расчетный период происходят в незначительных пределах.

Влияние испарения и инфильтрации на режим уровня грунтовых вод учтено по данным лизиметрических данных, полученных для разных глубин залегания уровня грунтовых вод М. С. Алимовым в 1964—1965 гг. При этом допускалось, что испарение с поверхности грунтовых вод с глубины более 3 м не происходит и инфильтрационные воды полностью расходятся на испарение.

За начальную пьезометрическую поверхность напорного водоносного горизонта принята пьезометрическая поверхность, фиксированная также на 1 октября 1964 г.

На границе пьезометрической области фильтрации задаются постоянные напоры, так как влияние откачки из опытно-эксплуатационных скважин не достигает границы области фильтрации.

Внутри области фильтрации имеются 5 опытно-эксплуатационных скважин, из которых ведется откачка воды из напорного водоносного горизонта. Скважины заложены по системе «конверт»: четыре скважины по углам, одна на середине. Расстояние между ними составляет 970—1400 м. Скважины — совершенные.

С октября 1964 г. ведется откачка воды из этих скважин. Откачка производилась с частыми остановками из-за ненадежности установленных насосов. Скважины работали от 10 до 26—27 дней в месяц, но каждый месяц были фиксированы общие месячные расходы скважин. В наших расчетах влияние откачки воды из скважин на режим уровня напорных и грунтовых вод учитывается через их среднесуточные расходы.

Выбранные для расчетов водоносные горизонты состоят из ряда слоев разной водопроницаемости и зернистости. Коэф-

фициенты их фильтрации изменяются по вертикали и в плане, но амплитуда колебания этого параметра для каждого водоносного горизонта в отдельности весьма мала. Поэтому в наших расчетах использована средневзвешенная величина коэффициента фильтрации и средние мощности водоносных горизонтов, характеризующиеся следующими данными: $\kappa_{\text{в}}=0,023$ м/сутки; $z=24$ м; $\kappa=18,3$ м/сутки; $t=28,5$ м.

При расчете водоотдачи использовались материалы М. С. Алимova по данной территории, а для определения упругой водоотдачи — результаты опытно-эксплуатационных откачек из скважин вертикального дренажа. При этом водоотдача μ составила 0,164, упругая водоотдача $\mu^*=0,0012$.

Результаты расчетов количественной характеристики перетоков жидкости в пределах территории опытного участка «Малик» с использованием ЭВМ и оценка их достоверности. Количественная характеристика перетоков жидкости определена для промежутка времени с января 1964 г. по конец февраля 1966 г. (с января 1964 г. по октябрь 1964 г. вертикальный дренаж не функционирует; с ноября 1964 г. по декабрь 1965 г. — период работы вертикального дренажа, и, наконец, январь—февраль 1966 г. — период восстановления депрессионных воронок).

Для сопоставления полученных на ЭВМ результатов произведено несколько определений величины перетока жидкости по формуле Дарси:

$$Q = k \frac{H-h}{h_{\text{ср}}} F,$$

где H — пьезометрический уровень взаимодействующего напорного водоносного горизонта, м;

h — уровень грунтовых вод, м;

$h_{\text{ср}}$ — мощность покровного водоносного горизонта, т. е. расстояние от кровли напорного горизонта до зеркала грунтовых вод, м;

k — вертикальный коэффициент фильтрации покровного водоносного слоя, м/сутки.

Параметры расчета перетока жидкости, принятые в аналитическом и машинном методах расчета, почти одинаковы. Поэтому полученные результаты являются сопоставимыми. Кроме того, результаты аналитического определения могут быть использованы как точные эталоны для сопоставления с данными машинного метода потому, что в процессе расчетов на каждый месяц составляются карты гидроизогипс и гидроизопьез для определения точной разности уровней напорных и грунтовых вод, в результате чего учитывается влияние инфильтрации оросительных вод в годовом разрезе.

Сопоставление результатов машинного метода и данных, полученных аналитическим методом, приводится в табл. 1.

Из табл. 1 видно: за январь и июль результаты совершенно несопоставимы, что составляет 20% всех определений; один результат (за июнь) дает недопустимые отклонения (на 41,2%), что составляет 10% всех определений. Остальные определения за семь месяцев (70%) дают хорошую сходимость с абсолютной погрешностью в пределах от 1 до 16%. Сопоставление суммарного количества перетоков жидкости за 10 месяцев, полученное двумя методами, дает абсолютную погрешность всего 4.2%.

Т а б л и ц а 1

Месяц	Результаты аналитических расчетов перетоков жидкости, м ³ /сутки	Результаты машинного расчета перетоков жидкости, м ³ /сутки	Абсолютная погрешность методов		Относительная погрешность
			м ³ /сутки	%	
I	164585,2	49747,5	—	—	—
II	113331,0	101108,4	+12222,6	10,8	+0,107848
III	133546,8	123940,2	+ 9606,6	7,2	+0,071934
IV	151924,8	150655,2	+12696,0	0,8	+0,008367
V	158050,8	133110,0	+24940,8	15,7	+0,157802
VI	79025,0	111616,8	—32591,8	—41,2	—0,412421
VII	—26341,8	101648,7	—	—	—
VIII	90664,8	94050,0	— 3385,2	3,7	—0,037337
IX	59360,9	55293,0	+ 4067,9	6,8	+0,068528
X	54108,8	41322,3	+12785,5	2,3	0,2363
Итого	1004599,0	962942,0	42107,0	4,2	0,0416

Результаты, полученные для периода работы скважин, т. е. с ноября 1964 г. по декабрь 1965 г. и для периода после прекращения действия скважин, т. е. за январь—февраль 1966 г., таковы:

Месяц	Переток жидкости, м ³ /месяц	Месяц	Переток жидкости, м ³ /месяц
XI	37959,9	III	30942,9
XII	28426,8	IV	49821,9
I	23968,5	V	109195,5
II	107306,7	VI	115790,1
VII	163110,0	XI	88068,8
VIII	110867,4	XII	60345,9
IX	140753,4	I	48394,2
X	97871,1	II	43872,6

Глава II

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В СЛОИСТЫХ ПЛАСТАХ МОДЕЛИ ХАНТУША

Рассмотрим модель трехслойного водоносного пласта, исследованного М. С. Хантушем [97].

По этой модели пласт состоит из хорошо проницаемого напорного водоносного горизонта, на кровле и подошве которого расположены слабопроницаемые перемычки.

Исследуем неустановившийся приток к совершенным вертикальным скважинам, пробуренным в хорошо проницаемый слой. Примем, что в хорошо проницаемом слое движение происходит в горизонтальной плоскости (вертикальные составляющие скорости фильтрации отсутствуют), а в слабопроницаемых перемычках — только по вертикали. Поэтому в таком слоистом пласте движение будет описываться системой уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2}, \\ \mu \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \\ &+ k_1 \frac{\partial H_2(x, y, m + m'', t)}{\partial z} - k_2 \frac{\partial H(x, y, m'', t)}{\partial z}, \\ \frac{1}{a_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

где H_1, H_2 ; a_1, a_2 ; κ_1, κ_2 — напоры, коэффициенты пьезопроводности и коэффициенты фильтрации слабопроницаемых слоев соответственно; T — проводимость; μ — упругая водоотдача хорошо проницаемого водоносного слоя; x, y — координаты горизонтальной плоскости, z — вертикальная координата; t — время.

В § 1 данной главы приводится аналитическое решение задачи о неустановившемся притоке жидкости к галереям в хорошо проницаемом (среднем) слое в ограниченном пласте. В п. 1 рассматривается неустановившийся приток к круговой

галерее с заданным расходом в трехслойном ограниченном пласте с непроницаемой границей, когда на верхней границе покровного слабопроницаемого слоя и нижней границе подошвенного слоя заданы напоры. В п. 2 исследуется случай, когда верхняя граница покровного слоя и нижняя граница подошвенного слоя непроницаемы. В п. 3 дано решение задачи, когда на одной из границ слоя задано условие непроницаемости, а на границе другого слоя — напор. В п. 4 приводится решение задачи при условиях п. 1, когда в хорошо проницаемом слое работают s круговых галерей (батарей) с заданными (разными) дебитами. Из решения этого пункта можно получить, как частный случай, решение задачи, рассматриваемой в п. 1. В п. 5 исследуется нестационарный приток жидкости к прямолинейной галерее с заданным расходом на галерее в трехслойном ограниченном пласте, полосообразным в плане (протяженность L и ширина l). В п. 6 задача, рассмотренная в п. 5, обобщается на случай s прямолинейных галерей.

Для всех этих пунктов даны точные аналитические решения.

В § 2 описывается численный метод решения задач, рассмотренных в § 1. Здесь применяется неявная конечно-разностная схема сквозного счета, не зависящая от местоположения галереи, и все вычисления осуществляются по одним и тем же формулам. Для проверки точности результатов численного счета используются уравнения материального баланса. Приводятся конкретные примеры, иллюстрирующие предлагаемый численный метод.

§ 1. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К БАТАРЕЯМ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДРЕН В ТРЕХСЛОЙНОМ ОГРАНИЧЕННОМ ПЛАСТЕ МОДЕЛИ ХАНТУША

1. Пусть трехслойный пласт в горизонтальной плоскости ограничен окружностью радиусом R_k . Рассмотрим неустановившийся приток к батарее вертикальных скважин (дрен), расположенных на окружности R_r и пробуренных в хорошо проницаемый горизонт. Полагаем, что все скважины имеют одинаковые расходы и расположены симметрично за все время эксплуатации батареи с расстоянием между скважинами, равным

$$2\sigma = \frac{2\pi R_r}{n},$$

где n — число скважин в батарее. Тогда эта задача равносильна неустановившемуся притоку жидкости к галерее в трехслойном пласте и сводится к интегрированию системы уравнений в частных производных:

$$\frac{1}{a_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2}, \quad (\text{II.1.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{k_1}{T} \cdot \frac{\partial H_1(r, m + m'', t)}{\partial z} - \\ - \frac{k_2}{T} \cdot \frac{\partial H_2(r, m'', t)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.2})$$

$$\frac{1}{a_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} \quad (\text{II.1.3})$$

при следующих начальных и краевых условиях:

$$H_1(r, z, 0) = H(r, 0) = H_2(r, z, 0) = H_0, \quad (\text{II.1.4})$$

$$H_1(r, m + m' + m'', t) = H_0, \quad (\text{II.1.5})$$

$$H_1(r, m + m'', t) = H(r, t), \quad (\text{II.1.6})$$

$$\frac{\partial H(0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial H(R_k, t)}{\partial r} = 0, \quad (\text{II.1.7})$$

$$\frac{\partial H(R_r + 0, t)}{\partial r} - \frac{\partial H(R_r - 0, t)}{\partial r} = \frac{Q_r}{2\pi T R_r}, \quad (\text{II.1.8})$$

$$H_2(r, m'', t) = H(r, t), \quad (\text{II.1.9})$$

$$H_2(r, 0, t) = H_0, \quad (\text{II.1.10})$$

где R_r — радиус галереи, H_0 — заданное значение напора.

Напор $H(r, t)$ будем искать в виде

$$H(r, t) = v(r, t) - \frac{Q_r}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_r} \right); \quad (\text{II.1.11})$$

здесь $v(r, t)$ — регулярная часть решения,

$$\alpha = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R_r \\ 1, & R_r \leq r \leq R_k. \end{cases}$$

Тогда задача (II.1.1) — (II.1.10) преобразуется таким образом:

$$\frac{1}{a_j} \cdot \frac{\partial H_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_j}{\partial z^2}, \quad (\text{II.1.12})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} k_i \times \\ \times \frac{\partial H_i[r, (2-i)m + m'', t]}{\partial z} - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.13})$$

$$H_j(r, z, 0) = H_0, \quad (\text{II.1.14})$$

$$H_j[r, (2-j)m + m'', t] = v(r, t) - \frac{Q_r}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_r} \right), \quad (\text{II.1.15})$$

$$H_j[r, (2-j)(m + m' + m''), t] = H_0 \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (\text{II.1.16})$$

$$v(r, 0) = H_0 + \frac{Q_r}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_r} \right), \quad (\text{II.1.17})$$

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v(R_k, t)}{\partial r} = 0. \quad (\text{II.1.18})$$

Применяя к системе уравнений с начальными и краевыми условиями (II.1.12)–(II.1.18) преобразование Лапласа, получаем

$$\frac{1}{a_j} (p \bar{H}_j - H_0) = \frac{d^2 \bar{H}_j}{dz^2}, \quad (\text{II.1.19})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} [p \bar{v} - H_0 - \varphi(r)] &= \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d \bar{v}}{dr} \right) + \\ &+ \frac{1}{T} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} k_i \frac{d \bar{H}_i[r, (2-i)m + m'', p]}{dz} - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2 p}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.20})$$

$$\bar{H}_j[r, (2-j)(m + m' + m''), p] = \frac{H_0}{p}, \quad (\text{II.1.21})$$

$$\bar{H}_j[r, (2-j)m + m'', p] = \bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (\text{II.1.22})$$

$$\frac{d \bar{v}(0, p)}{dr} = 0, \quad (\text{II.1.23})$$

$$\frac{d \bar{v}(R_k, p)}{dr} = 0, \quad (\text{II.1.24})$$

где

$$\varphi(r) = \frac{Q_r}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_r} \right). \quad (\text{II.1.25})$$

Из уравнения (II.1.19) следует, что

$$\bar{H}_j = C_{1j}(r, p) e^{q_j z} + C_{2j} e^{-q_j z} + \frac{H_0}{p}; \quad (\text{II.1.26})$$

здесь

$$q_j = \sqrt{\frac{p}{a_j}}. \quad (\text{II.1.27})$$

В силу условий (II.1.21) и (II.1.22) из (II.1.26) находим

$$C_{1j} = \frac{\left[\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] e^{-q_j (m+m'+m'')(2-j)}}{2 \operatorname{sh} q_j [(2-j)m' + (j-1)m'']}, \quad (\text{II.1.28})$$

$$C_{2j} = \frac{\left[\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] e^{q_j (m+m'+m'')(2-j)}}{2 \operatorname{sh} q_j [(2-j)m' + (j-1)m'']}, \quad (\text{II.1.29})$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_j(r, z, p) = & (-1)^j \left[\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \right. \\ & \left. - \frac{H_0}{p} \right] \frac{\operatorname{sh} q_j [z - (2-j)(m+m'+m'')]}{\operatorname{sh} q_j [(2-j)m' + (j-1)m'']} + \frac{H_0}{p}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{II.1.30})$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \frac{dH_j[r, (2-j)m + m'', p]}{dz} = & (-1)^j \left[\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \right. \\ & \left. - \frac{H_0}{p} \right] q_j \operatorname{cth} q_j [(2-j)m' + (j-1)m''], \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{II.1.31})$$

Подставляя в (II.1.20) соотношение (II.1.31), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}}{dr} \right) - \omega^2(p) \bar{v} = & - [H_0 + \varphi(r)] \frac{\omega^2(p)}{p} + \\ & + \frac{Q_r}{\pi T R_k^2 p}; \end{aligned} \quad (\text{II.1.32})$$

здесь

$$\begin{aligned} \omega^2(p) = & \frac{p}{a} + \frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{p}{a_1}} \operatorname{cth} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) + \\ & + \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{p}{a_2}} \operatorname{cth} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.1.33})$$

Решение уравнения (II.1.32) будем искать в виде

$$\bar{v} = \bar{v}_1(r, p) + \bar{v}_2(p), \quad (\text{II.1.34})$$

где

$$\bar{v}_2(p) = \frac{H_0}{p} - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2 p \omega^2(p)}, \quad (\text{II.1.35})$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}_1}{dr} \right) - \omega^2(p) \bar{v}_1 = - \varphi(r) \frac{\omega^2(p)}{p}. \quad (\text{II.1.36})$$

Тогда $\bar{v}_1$ из (II.1.36) при использовании конечного преобразования Ханкеля может быть записано так:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 = & \frac{Q_r}{2\pi T p} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_r}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_r} \right\} + \\ & + \frac{Q_r}{\pi T p} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_l \right)}{\xi_l^2} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)} - \\ & - \frac{Q_r}{\pi T p} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_l \right)}{\xi_l^2 + R_k^2 \omega^2(p)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.37})$$

где ξ_l является корнем уравнения $J_1(\xi_l) = 0$, а $J_0(x)$ — функциями Бесселя.

Таким образом, из (II.1.35) и (II.1.37) имеем

$$\begin{aligned} \bar{v}(r, p) = & \frac{H_0 + \varphi(r)}{p} - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2 p \omega^2(p)} - \\ & - \frac{Q_r}{\pi T p} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_l \right)}{\xi_l^2 + R_k^2 \omega^2(p)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)}. \end{aligned} \quad (\text{II.1.38})$$

Корни функций $\omega^2(p)$ и $R_k^2 \omega^2(p) + \xi_l^2$ лежат на отрицательной части вещественной оси, причем точка $p = 0$ не является ни корнем этих функций, ни точкой ветвления в силу соотношения

$$V \bar{p} \operatorname{cth} V \bar{p} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{p + n^2 \pi^2}.$$

Формулу (II.1.33) запишем так:

$$\omega^2(p) = \frac{\sqrt{\frac{p}{a_1}} \sqrt{\frac{p}{a_2}} m' m''}{\operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right)} \Phi(p), \quad (\text{II.1.39})$$

где

$$\Phi(p) = \frac{p}{a} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right)}{\frac{p}{\sqrt{a_1 a_2}} m' m''} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k_1}{T m'} \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}}} + \\
& + \frac{k_2}{T m''} \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'}.
\end{aligned}$$

Подставим (II.1.39) в формулу (II.1.38).

$$\begin{aligned}
\bar{v} = & \frac{H_0 + \varphi(r)}{p} - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right)}{m' m'' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \sqrt{\frac{p}{a_2}} p \Phi(p)} - \\
& - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2 p} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{\operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_1}} \sqrt{\frac{p}{a_2}} m' m''} J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i \right)}{\xi_i^2 \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right)} \times \\
& \times \frac{R_k^2 \sqrt{\frac{p}{a_1}} \sqrt{\frac{p}{a_2}} m' m''}{p \Phi(p) + \Phi(p)} \times \\
& \times \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)}. \quad (\text{II.1.40})
\end{aligned}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{m' m'' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \sqrt{\frac{p}{a_2}} p \Phi(p)},$$

представляющее отношение двух обобщенных полиномов. Поэтому для нахождения его оригинала можно использовать теорему разложения.

Найдем корни уравнения $p \Phi(p) = 0$. Точка $p = 0$ является простым корнем этого уравнения, имеющего бесчисленное множество корней, определяемых из уравнения

$$\Phi(p) = 0.$$

Эти корни лежат в отрицательной части действительной оси, причем точка $p=0$ не является корнем. Поэтому, полагая $p=-\theta$, это уравнение можно переписать так:

$$-\frac{\theta}{a} + \frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{\theta}{a_1}} \operatorname{ctg} \left(m' \sqrt{\frac{\theta}{a_1}} \right) + \\ + \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{\theta}{a_2}} \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\theta}{a_2}} \right) = 0. \quad (\text{II.1.41})$$

Вычислим

$$\frac{d\Phi(p)}{dp} = \frac{1}{2m''} \sqrt{\frac{a_2}{p}} \left(\frac{1}{a} - \frac{k_1}{Tm'} \right) \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \\ + \frac{1}{2m'} \sqrt{\frac{a_1}{p}} \left(\frac{1}{a} - \frac{k_2}{Tm''} \right) \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \\ + \frac{1}{2Tp} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \left[\frac{k_1}{m''} + \frac{k_2 a_1}{m' a_2} \right] \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \\ + \frac{1}{2Tp} \left[\frac{k_1}{m'} + \frac{k_2}{m''} \right] \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right).$$

Теперь можно вычислить выражение

$$\left. \frac{\operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{\frac{m' m'' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \sqrt{\frac{p}{a_2}}}{p \frac{d\Phi(p)}{dp}}} \right|_{p=-\theta_j} = -\frac{1}{\theta_j \psi(\theta_j)},$$

где

$$\psi(\theta) = \frac{1}{2a} \left[\sqrt{\frac{\theta}{a_1}} m' \operatorname{ctg} \left(m' \sqrt{\frac{\theta}{a_1}} \right) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\theta}{a_2}} m'' \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\theta}{a_2}} \right) + 1 \right] - \\ - \frac{1}{2T \sqrt{a_1 a_2}} (k_1 m'' + k_2 m') \operatorname{ctg} \left(m' \sqrt{\frac{\theta}{a_1}} \right) \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\theta}{a_2}} \right) + \\ + \frac{1}{2T} \left(\frac{k_1 m'}{a_1} + \frac{k_2 m''}{a_2} \right). \quad (\text{II.1.42})$$

Таким образом, в силу (II.1.42) можно выписать оригинал соотношения

$$\frac{Q_r}{\pi T R_K^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right)}{m' m'' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \sqrt{\frac{p}{a_2}} p \Phi(p)} = - \frac{Q_r}{\pi T R_K^2} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)}. \quad (\text{II.1.43})$$

Будем находить теперь оригинал второго слагаемого формулы (II.1.38), имеющего в точке $p=0$ вычет, равный

$$\frac{Q_r}{\pi T} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_K} \xi_i \right)}{\xi_i^2 + \frac{R_K^2}{T} \left(\frac{k_1}{m'} + \frac{k_2}{m''} \right)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)}. \quad (\text{II.1.44})$$

Далее, имеется бесчисленное множество полюсов, определяемых из следующего уравнения (относительно положительных σ):

$$\begin{aligned} \frac{\xi_i^2}{R_K^2} - \frac{\sigma}{a} + \frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{\sigma}{a_1}} \operatorname{ctg} \left(m' \sqrt{\frac{\sigma}{a_1}} \right) + \\ + \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{\sigma}{a_2}} \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma}{a_2}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.1.45})$$

Вычислим производную от выражения

$$L(p) = \frac{\xi_i^2}{R_K^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{\frac{p}{\sqrt{a_1 a_2}} m' m''} + \Phi(p),$$

$$\begin{aligned} \frac{dL(p)}{dp} = \frac{\xi_i^2 \sqrt{a_1 a_2}}{R_K^2 m' m'' p^2} \left\{ p \frac{m'}{2 \sqrt{p a_1}} \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{p m''}{2 \sqrt{p a_2}} \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \frac{d\Phi(p)}{dp} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dL(p)}{dp} \Big|_{p=-\sigma_v} = \frac{\xi_i^2 \sqrt{a_1 a_2}}{R_K^2 m' m''} \left[- \frac{m'}{2 \sqrt{\sigma_v a_1}} \cdot \frac{1}{\sigma_v} \cos \left(m' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}} \right) \times \right. \\ \times \sin \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} \right) - \frac{m''}{2 \sqrt{\sigma_v a_2}} \cdot \frac{1}{\sigma_v} \sin \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}} \right) \times \\ \times \sin \left(m' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} \right) + \frac{\xi_i^2 \sqrt{a_1 a_2}}{R_K^2 m' m''} \cdot \frac{1}{\sigma_v^2} \sin \left(m' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}} \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \sin \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} \right),$$

где σ_v — положительные корни уравнения (II.1.45).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \chi(\sigma_v, \xi_i) &= \frac{\sigma_v m' m''}{\sqrt{a_1 a_2} \sin \left(m' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}} \right) \sin \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} \right)} \times \\ &\times \frac{dL(p)}{dp} \Big|_{p=-\sigma_v} = \frac{\xi_i^2}{R_K^2 \sigma_v} - \frac{\xi_i^2}{2R_K^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma_v}} \left[\frac{m'}{\sqrt{a_1}} \operatorname{ctg} \left(m' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m''}{\sqrt{a_2}} \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} \right) + \psi(\sigma) \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.1.46})$$

Тогда относительно полюсов, определяемых уравнением (II.1.45), будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{\operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{m' m'' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \sqrt{\frac{p}{a_2}}} J_0 \left(\frac{R_r}{R_K} \xi_i \right) \\ &\frac{Q_r}{\pi T R_K^2 p} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{m' m'' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \sqrt{\frac{p}{a_2}}}{\xi_i^2 \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}}{\frac{R_K^2 \sqrt{\frac{p}{a_1}} \sqrt{\frac{p}{a_2}} m' m''}{+ \psi(p)}} \times \\ &\times \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} \rightarrow \frac{Q_r}{\pi T R_K^2} \sum_v \sum_i \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_K} \xi_i \right)}{\sigma_v \chi(\sigma_v, \xi_i)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} e^{-\sigma_v t}. \end{aligned} \quad (\text{II.1.47})$$

Окончательно из формул (II.1.43), (II.1.44), (II.1.47) можем записать оригинал функции $v(r, t)$:

$$\begin{aligned} v(r, t) &= H_0 + \varphi(r) - \frac{Q_r}{\pi R_K^2 \left(\frac{k_1}{m'} + \frac{k_2}{m''} \right)} + \frac{Q_r}{\pi T R_K^2} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} - \\ &- \frac{\theta_r}{\pi T} \sum_i \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_K} \xi_i \right)}{\xi_i^2 + \frac{R_K^2}{T} \left(\frac{k_1}{m'} + \frac{k_2}{m''} \right)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{Q_r}{\pi T R_K^2} \sum_v \sum_i \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_K} \xi_i \right)}{\sigma_v \chi(\sigma_v, \xi_i)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} e^{-\sigma_v t}. \quad (\text{II.1.48})$$

Итак, напор в хорошо проницаемом слое представляется в форме

$$\begin{aligned} H(r, t) = H_0 - \frac{Q_r}{\pi R_K^2 \left(\frac{k_1}{m'} + \frac{k_2}{m''} \right)} + \frac{Q_r}{\pi T R_K^2} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} - \\ - \frac{Q_r}{\pi T} \sum_i \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_K} \xi_i \right)}{\xi_i^2 + \frac{R_K^2}{T} \left(\frac{k_1}{m'} + \frac{k_2}{m''} \right)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} + \\ + \frac{Q_r}{\pi T R_K^2} \sum_v \sum_i \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_K} \xi_i \right)}{\sigma_v \chi(\sigma_v, \xi_i)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} e^{-\sigma_v t}. \quad (\text{II.1.49}) \end{aligned}$$

Зная $v(r, t)$, решение в слабопроницаемых слоях можно получить непосредственно интегрированием (II.1.12) —

$$\begin{aligned} H_1(r, z, t) = \frac{z - m - m''}{m'} H_0 + \frac{m + m' + m'' - z}{m'} (v - \varphi) + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{m'} \right)^2 a_1(t-\tau)} \sin \frac{n\pi}{m'} (m + m' + m'' - z) \right\} \times \\ \times \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (\text{II.1.50}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2(r, z, t) = \frac{m'' - z}{m''} H_0 + \frac{z}{m''} (v - \varphi) + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{m''} \right)^2 a_2(t-\tau)} \sin \frac{n\pi}{m''} z \right\} \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (\text{II.1.51}) \end{aligned}$$

2. Рассмотрим задачу, исследованную в п. 1, но при условии, что верхняя граница верхнего слабопроницаемого слоя и подошва нижнего слабопроницаемого пропластка непроницаемы. Тогда эта задача может быть сформулирована так.

Найти решение системы уравнений (II.1.12) при $j=1, 2$ и (II.1.13) с начальными и краевыми условиями вида

$$H_j(r, z, 0) = H_0, \quad (\text{II.1.52})$$

$$\frac{\partial H_j [r, (2-j)(m+m'+m'')]}{\partial z} = 0, \quad (\text{II.1.53})$$

$$H_j [r, (2-j)m+m'', t] = v(r, t) - \frac{Q_r}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_r} \right), \quad j = 1, 2, \quad (\text{II.1.54})$$

$$\frac{\partial v(R_k, t)}{\partial r} = 0, \quad (\text{II.1.55})$$

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial r} = 0, \quad (\text{II.1.56})$$

$$v(r, 0) = H_0 + \frac{Q_r}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_k} \right). \quad (\text{II.1.57})$$

Применяя преобразование Лапласа к системе уравнений (II.1.12), (II.1.13) и краевым условиям (II.1.53)–(II.1.56), получаем

$$\frac{d^2 \bar{H}_j}{dz^2} = \frac{1}{a_j} [p \bar{H}_j - H_0], \quad (\text{II.1.58})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} [p \bar{v} - H_0 - \varphi(r)] &= \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d \bar{v}}{dr} \right) + \frac{k_1}{T} \cdot \frac{d \bar{H}_1(r, m+m'', p)}{dz} - \\ &- \frac{k_2}{T} \cdot \frac{d \bar{H}_2(r, m'', p)}{dz} - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2 p}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.59})$$

$$\frac{d \bar{H}_j [r, (2-j)(m+m'+m''), p]}{dz} = 0, \quad (\text{II.1.60})$$

$$\bar{H}_j [r, (2-j)m+m'', p] = \bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p}, \quad j = 1, 2, \quad (\text{II.1.61})$$

$$\frac{d \bar{v}(0, p)}{dr} = 0, \quad (\text{II.1.62})$$

$$\frac{d \bar{v}(R_k, p)}{dr} = 0. \quad (\text{II.1.63})$$

Из (II.1.58) и (II.1.60), (II.1.61) имеем

$$\bar{H}_1(r, z, p) = \left[\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a_1}} (z - m + m' + m'')}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a_1}} m'} + \frac{H_0}{p}, \quad (\text{II.1.64})$$

$$\frac{\partial \bar{H}_1(r, m + m'', p)}{\partial z} = - \left[\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \sqrt{\frac{p}{a_1}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right), \quad (\text{II.1.65})$$

$$\bar{H}_2(r, z, p) = \left[\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a_2}} z}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a_2}} m''} + \frac{H_0}{p}, \quad (\text{II.1.66})$$

$$\frac{\partial \bar{H}_2(r, m'', p)}{\partial z} = \left[\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \sqrt{\frac{p}{a_2}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right). \quad (\text{II.1.67})$$

Подставляя (II.1.65), (II.1.67) в уравнение (II.1.59), получаем

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}}{dr} \right) - \omega^2(p) \bar{v} = - [H_0 + \varphi(r)] \frac{\omega^2(p)}{p} + \frac{Q_r}{\pi T R_K^2 p}; \quad (\text{II.1.68})$$

здесь

$$\begin{aligned} \omega^2(p) = & \frac{p}{a} + \frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{p}{a_1}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) + \\ & + \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{p}{a_2}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right). \end{aligned} \quad (\text{II.1.69})$$

Решение будем искать в виде

$$\bar{v}(r, p) = \bar{v}_1(r, p) + \bar{v}_2(p), \quad (\text{II.1.70})$$

где

$$\bar{v}_2(p) = \frac{H_0}{p} - \frac{Q_r}{\pi T R_K^2 p \omega^2(p)}, \quad (\text{II.1.71})$$

а функция $\bar{v}_1(r, p)$ определится из уравнения

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}_1}{dr} \right) - \omega^2(p) \bar{v}_1 = - \varphi(r) \frac{\omega^2(p)}{p} \quad (\text{II.1.72})$$

с краевыми условиями

$$\frac{d\bar{v}_1(0, p)}{dr} = 0, \quad (\text{II.1.73})$$

$$\frac{d\bar{v}_1(R_K, p)}{dr} = 0. \quad (\text{II.1.74})$$

Функция $\omega^2(p)$ в точке $p=0$ имеет нуль первого порядка, так как

$$V\bar{p} \operatorname{th} V\bar{p} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{p - \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}},$$

и бесчисленное множество нулей, определяемых из уравнения

$$\frac{1}{a} + \frac{k_1}{T \sqrt{a_1 b}} \operatorname{tg} \left(m' \sqrt{\frac{\theta}{a_1}} \right) + \frac{k_2}{T \sqrt{a_2 b}} \operatorname{tg} \left(m'' \sqrt{\frac{\theta}{a_2}} \right) = 0. \quad (\text{II.1.75})$$

Применяя конечное преобразование Ханкеля к уравнению (II.1.72), его решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{v}(r, p) = & \frac{H_0 + \varphi(r)}{p} - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2 p \omega^2(p)} - \\ & - \frac{Q_r}{\pi T p} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i \right)}{\xi_i^2 + R_k^2 \omega^2(p)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.76})$$

где ξ_i — корни уравнения $J_1(\xi_i) = 0$.

Функцию $\omega^2(p)$ перепишем так:

$$\begin{aligned} \omega^2(p) = & \frac{p}{\operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right)} \left\{ \frac{1}{a} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \times \right. \\ & \times \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right) + \frac{k_1}{T} \frac{1}{\sqrt{p a_1}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right) + \\ & \left. + \frac{k_2}{T \sqrt{p a_2}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right) \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \right\}. \end{aligned}$$

Тогда формула

$$\begin{aligned} & \frac{Q_r}{\pi T R_k^2 p \omega^2(p)} = \\ & = \frac{Q_r \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right)}{\pi T R_k^2 \left[\frac{1}{a} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right) + \frac{k_1 m'}{T a_1} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right) \times \right.} \end{aligned}$$

$$\times \frac{\operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'} + \frac{k_2 m''}{T a_2} \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''} \Bigg]$$

будет представлять собой отношение двух обобщенных полиномов. Поэтому для корня $p = 0$ можно записать оригинал в форме

$$\frac{Q_r}{\pi T R_k^2 p \omega^2(p)} \rightarrow \frac{Q_r}{\pi T R_k^2} \left[\frac{t}{\frac{1}{a_1} + \frac{k_1 m'}{T a_1} + \frac{k_2 m''}{T a_2}} + \frac{\frac{k_1 m'^3}{T a_1^2} + \frac{k_2 m''^3}{T a_2^2}}{3 \left(\frac{1}{a} + \frac{k_1 m'}{T a_1} - \frac{k_2 m''}{T a_2} \right)^2} \right]. \quad (\text{II.1.77})$$

Введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned} \psi(p) = & \frac{1}{a} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right) + \\ & + \frac{k_1 m'}{T a_1} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right) \frac{\operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'} + \frac{k_2 m''}{T a_2} \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \times \\ & \times \frac{\operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''}. \end{aligned} \quad (\text{II.1.78})$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(p)}{dp} = & \frac{m'}{2a \sqrt{p a_1}} \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \\ & + \frac{m''}{2a \sqrt{p a_2}} \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \left(\frac{k_1 m''}{2T p \sqrt{a_1 a_2}} + \right. \\ & + \left. \frac{k_2 m'}{2T p \sqrt{a_1 a_2}} \right) \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \left(\frac{k_1 m'}{2T p a_1} + \right. \\ & + \left. \frac{k_2 m''}{2T p a_2} \right) \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right). \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\left. \frac{d\psi(p)}{dp} \right|_{p=-\theta_j} = \frac{m'}{2a \sqrt{\theta_j a_1}} \sin \left(m' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_1}} \right) \cos \left(m'' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_2}} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m''}{2a \sqrt{\theta_j a_2}} \cos \left(m' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_1}} \right) \sin \left(m'' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_2}} \right) + \\
& + \frac{1}{2T \theta_j \sqrt{a_1 a_2}} (k_1 m'' + k_2 m') \sin \left(m' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_1}} \right) \sin \left(m'' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_2}} \right) - \\
& - \frac{1}{2T \theta_j} \left(\frac{k_1 m'}{a_1} + \frac{k_2 m''}{a_2} \right) \cos \left(m' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_1}} \right) \cos \left(m'' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_2}} \right),
\end{aligned}$$

где θ_j — положительные корни уравнения (II.1.57).

Введем обозначение:

$$\Phi(\theta_j) = \frac{1}{\cos \left(m' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_1}} \right) \cos \left(m'' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_2}} \right)} \cdot \frac{d\psi}{dp} \bigg|_{p=-\theta_j}. \quad (\text{II.1.79})$$

Уравнение

$$\frac{\xi_l^2}{R_k^2} + \omega^2(p) = 0 \quad (\text{II.1.80})$$

имеет бесчисленное множество корней, лежащих на отрицательной части действительной оси. Заметим, что среди корней этого уравнения нет корня $p=0$. Обозначим через σ корни уравнения (II.1.80). Тогда (II.1.80) равносильно уравнению

$$\begin{aligned}
& \frac{\xi_l^2}{R_k^2} - \frac{\sigma}{a} - \frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{\sigma}{a_1}} \operatorname{tg} \left(m' \sqrt{\frac{\sigma}{a_1}} \right) - \\
& - \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{\sigma}{a_2}} \operatorname{tg} \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma}{a_2}} \right) = 0; \quad (\text{II.1.80}')
\end{aligned}$$

здесь $\sigma > 0$.

Преобразуем сумму

$$\begin{aligned}
& \sum_l \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_l \right)}{\xi_l^2 + R_k^2 \omega^2(p)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)} = \\
& = \frac{1}{R_k^2} \sum_l \frac{\operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_l \right)}{\frac{\xi_l^2}{R_k^2} \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + p \psi(p)} \times \\
& \quad \times \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)}
\end{aligned}$$

и обозначим

$$\psi_1(p, \xi_i) = \frac{\xi_i^2}{R_K^2} \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + p \psi(p).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(p)}{dp} &= \left(\frac{1}{a} + \frac{k_1 m'}{2Ta_1} + \frac{k_2 m''}{2Ta_2} \right) \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \\ &+ \left[\frac{k_1}{2T\sqrt{a_1 p}} + \left(\frac{p}{a} + \frac{\xi_i^2}{R_K^2} \right) \frac{m'}{2\sqrt{pa_1}} \right] \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \times \\ &\times \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \left[\frac{k_2}{2T\sqrt{pa_2}} + \left(\frac{p}{a} + \frac{\xi_i^2}{R_K^2} \right) \frac{m''}{2\sqrt{pa_2}} \right] \times \\ &\times \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \left(\frac{k_1}{2T} \cdot \frac{m''}{\sqrt{a_1 a_2}} + \right. \\ &+ \left. \frac{k_2}{2T} \cdot \frac{m'}{\sqrt{a_1 a_2}} \right) \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right), \\ \frac{d\psi(p)}{dp} \Big|_{p=-\sigma_v} &= \left(\frac{1}{a} + \frac{k_1 m'}{2Ta_1} + \frac{k_2 m''}{2Ta_2} \right) \cos \left(m' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}} \right) \times \\ &\times \cos \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} \right) + \left[\frac{k_1}{T} + \left(-\frac{\sigma_v}{a} + \frac{\xi_i^2}{R_K^2} \right) m' \right] \times \\ &\times \frac{1}{2\sqrt{\sigma_v a_1}} \sin \left(m' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}} \right) \cos \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} \right) + \\ &+ \left[\frac{k_2}{T} + \left(-\frac{\sigma_v}{a} + \frac{\xi_i^2}{R_K^2} \right) m'' \right] \frac{1}{2\sqrt{\sigma_v a_2}} \cos \left(m' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}} \right) \times \\ &\times \sin \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} \right) - \frac{1}{2T\sqrt{a_1 a_2}} (k_1 m'' + k_2 m') \times \\ &\times \sin \left(m' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}} \right) \sin \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} \right). \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$\begin{aligned} \chi(\xi_i, \sigma_v) &= \frac{1}{a} + \frac{k_1 m'}{2Ta_1} + \frac{k_2 m''}{2Ta_2} + \\ &+ \left[\frac{k_1}{T} + \left(\frac{\xi_i^2}{R_K^2} - \frac{\sigma_v}{a} \right) m' \right] \frac{1}{2\sqrt{\sigma_v a_1}} \operatorname{tg} \left(m' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}} \right) + \\ &+ \left[\frac{k_2}{T} + \left(\frac{\xi_i^2}{R_K^2} - \frac{\sigma_v}{a} \right) m'' \right] \frac{1}{2\sqrt{\sigma_v a_2}} \operatorname{tg} \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} \right) - \end{aligned}$$

$$-\frac{k_1 m'' + k_2 m'}{2T \sqrt{a_1 a_2}} \operatorname{tg} \left(m' \sqrt{\frac{\tau_v}{a_1}} \right) \operatorname{tg} \left(m'' \sqrt{\frac{\tau_v}{a_2}} \right). \quad (\text{II.1.81})$$

Тогда окончательно оригинал (II.1.76) можно записать так:

$$\begin{aligned} v(r, t) = & H_0 + \varphi(r) - (At + B) \frac{Q_r}{\pi T R_K^2} - \\ & - \frac{Q_r}{\pi T R_K^2} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j^2 \Phi(\theta_j)} - \frac{Q_r}{\pi T} \sum_i \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_K} \xi_i \right)}{\xi_i^2} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} + \\ & + \frac{Q_r}{\pi T R_K^2} \sum_v \sum_i \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_K} \xi_i \right)}{\sigma_v \chi(\xi_i, \sigma_v)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} e^{-\sigma_v t}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.82})$$

где

$$A = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{k_1 m'}{T a_1} + \frac{k_2 m''}{T a_2}}, \quad B = \frac{1}{3T} \frac{\frac{k_1 m'^3}{a_1^2} + \frac{k_2 m''^3}{a_2^2 T}}{\left[\frac{1}{a} + \frac{k_1 m'}{T a_1} + \frac{k_2 m''}{T a_2} \right]},$$

или

$$\begin{aligned} H(r, t) = & H_0 - (At + B) \frac{Q_r}{\pi T R_K^2} - \frac{Q_r}{\pi T R_K^2} \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j^2 \Phi(\theta_j)} - \\ & - \frac{Q_r}{\pi T} \sum_i \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_K} \xi_i \right)}{\xi_i^2} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} + \\ & + \frac{Q_r}{\pi T R_K^2} \sum_v \sum_i \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_K} \xi_i \right)}{\sigma_v \chi(\xi_i, \sigma_v)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} e^{-\sigma_v t}. \end{aligned} \quad (\text{II.1.83})$$

Зная $v(r, t)$, $H_1(r, z, t)$ и $H_2(r, z, t)$ и интегрируя (II.1.12), можно найти

$$\begin{aligned} H_2(r, z, t) = & \frac{2}{m''} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{2m''}{(2n+1)\pi} H_0 + \right. \\ & + \frac{(2n+1)\pi a_2}{2m''} \int_0^t \exp \left[\left(\frac{2n+1}{2m''} \pi \right)^2 a_2 \tau \right] [v(r, \tau) - \varphi(r)] d\tau \Bigg\} \times \\ & \times \exp \left[- \left(\frac{2n+1}{2m''} \right)^2 a_2 t \right] \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2m''}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.84})$$

$$\begin{aligned}
H_1(r, z, t) = & \frac{2}{m'} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{2m'}{(2n+1)\pi} H_0 + \right. \\
& + \frac{(2n+1)\pi a_1}{2m'} \int_0^t \exp \left[\left(\frac{2n+1}{2m'} \pi \right)^2 a_1 \tau \right] [v(r, \tau) - \varphi(r)] d\tau \Big\} \times \\
& \times \exp \left[- \left(\frac{2n+1}{2m'} \right)^2 a_1 t \right] \cos \frac{(2n+1)\pi}{2m'} (m + m' + m'' - z).
\end{aligned}
\tag{II.1.85}$$

3. Рассмотрим задачу, исследованную в п. 2, но вместо краевого условия $\frac{\partial H_2(r, 0, t)}{\partial z} = 0$ примем $H_2(r, 0, t) = H_0$, т. е. на подошве нижнего слабопроницаемого слоя поддерживается постоянное значение напора. Тогда эта задача сведется к интегрированию системы уравнений (II.1.12) при $j=1, 2$ и (II.1.13) с начальными и краевыми условиями

$$H_j(r, z, 0) = H_0, \tag{II.1.86}$$

$$H_j[r, (2-j)m + m'', t] = v(r, t) - \varphi(r), \quad j = 1, 2, \tag{II.1.87}$$

$$\frac{\partial H_1(r, m + m' + m'', t)}{\partial z} = 0, \tag{II.1.88}$$

$$H_2(r, 0, t) = H_0, \tag{II.1.89}$$

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial r} = 0, \tag{II.1.90}$$

$$\frac{\partial v(R_K, t)}{\partial r} = 0, \tag{II.1.91}$$

$$v(r, 0) = H_0 - \varphi(r). \tag{II.1.92}$$

Применяя преобразование Лапласа к системе уравнений (II.1.13), (II.1.15) и (II.1.87), (II.1.91), получаем

$$\frac{1}{a_j} [p\bar{H}_j - H_0] = \frac{d^2 \bar{H}_j}{dz^2}, \quad j = 1, 2, \tag{II.1.93}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} [p\bar{v} - H_0 - \varphi(r)] = & \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}}{dr} \right) + \frac{k_1}{T} \frac{d\bar{H}_1(r, m + m'', p)}{dz} - \\
& - \frac{k_2}{T} \cdot \frac{d\bar{H}_2(r, m'', p)}{dz} - \frac{Q_r}{\pi TR_K^2 p},
\end{aligned}
\tag{II.1.94}$$

$$\frac{d\bar{H}_1(r, m + m' + m'', p)}{dz} = 0, \tag{II.1.95}$$

$$\bar{H}_1(r, m + m'', p) = \bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p}, \quad (\text{II.1.96})$$

$$\bar{H}_2(r, 0, p) = \frac{H_0}{p}, \quad (\text{II.1.97})$$

$$\bar{H}_2(r, m'', p) = \bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p}, \quad (\text{II.1.98})$$

$$\frac{d\bar{v}(0, p)}{dr} = 0, \quad (\text{II.1.99})$$

$$\frac{d\bar{v}(R_\kappa, p)}{dr} = 0. \quad (\text{II.1.100})$$

Решение уравнения (II.1.93) при $j = 1$ с учетом краевых условий (II.1.95) и (II.1.96) запишется так:

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(r, z, p) = \\ = - \left[\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \frac{\text{ch} \left\{ (r - m - m' - m'') \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right\}}{\text{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right)} + \frac{H_0}{p}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.101})$$

откуда

$$\frac{d\bar{H}_1(r, m + m'', p)}{dz} = - \left[\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \sqrt{\frac{p}{a_1}} \text{th} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right). \quad (\text{II.1.102})$$

Далее, из (II.1.93) при $j = 2$ и краевых условиях (II.1.97) и (II.1.98) найдем

$$H_2(r, z, p) = \left[\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \frac{\text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} z \right)}{\text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right)} + \frac{H_0}{p}. \quad (\text{II.1.103})$$

Тогда

$$\frac{\partial H_2(r, m'', p)}{\partial z} = \left[\bar{v} - \frac{\varphi(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \sqrt{\frac{p}{a_2}} \text{cth} \sqrt{\frac{p}{a_2}} m''. \quad (\text{II.1.104})$$

Подставляя (II.1.102) и (II.1.104) в уравнение (II.1.94), получаем

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}}{dr} \right) - \omega^2(p) \bar{v} = - [H_0 + \varphi(r)] \frac{\omega^2(p)}{p} + \frac{Q_r}{\pi T R_\kappa^2 p}, \quad (\text{II.1.105})$$

где

$$\omega^2(p) = \frac{p}{a} + \frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{p}{a_1}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) + \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{p}{a_2}} \operatorname{cth} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right). \quad (\text{II.1.106})$$

Решение уравнения (II.1.103) будем искать в виде

$$\bar{v}(r, p) = \bar{v}_1(r, p) + \bar{v}_2(p), \quad (\text{II.1.107})$$

где

$$\bar{v}_2(p) = \frac{H_0}{p} - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2 p \omega^2(p)}, \quad (\text{II.1.108})$$

а $\bar{v}_1(r, p)$ является решением уравнения

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}_1}{dr} \right) - \omega^2(p) \bar{v}_1 = -\varphi(r) \frac{\omega^2(p)}{p} \quad (\text{II.1.109})$$

с краевыми условиями

$$\frac{d\bar{v}_1(0, p)}{dr} = 0, \quad (\text{II.1.110})$$

$$\frac{d\bar{v}_1(R_k, p)}{dr} = 0. \quad (\text{II.1.111})$$

Применяя конечное преобразование Ханкеля к уравнению (II.1.109), его решение можно записать так:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1(r, p) = & \frac{H_0 + \varphi(r)}{p} - \frac{Q_r}{\pi T p} \sum_i \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i \right)}{\xi_i^2 + R_k^2 \omega^2(p)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} - \\ & - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2 p \omega^2(p)}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.112})$$

Заметим, что

$$\lim_{p \rightarrow 0} \omega^2(p) = \frac{k_2}{T m''}, \quad (\text{II.1.113})$$

$$\xi_i^2 + R_k^2 \omega^2(p) = R_k^2 \frac{m'' \left\{ \sqrt{\frac{p}{a_2}} \gamma(p, \xi_i) \right\}}{\operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)},$$

где

$$\gamma(p, \xi_i) = \left[\frac{p}{a} + \frac{\xi_i^2}{R_k^2} \right] \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k_1 m' p}{T a_1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{\frac{p m' m''}{\sqrt{a_1 a_2}}} + \\
& + \frac{k_2}{T m''} \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right).
\end{aligned}$$

Представим $\omega^2(p)$ в форме

$$\omega^2(p) = \frac{\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \eta(p)}{\operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)},$$

где

$$\begin{aligned}
\eta(p) = & \frac{p}{a} \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''} + \\
& + \frac{k_1 m' p}{T a_1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}}} + \\
& + \frac{k_2}{T m''} \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta(p)}{dp} = & \frac{1}{2 \sqrt{\frac{p}{a_2}}} \left[\frac{1}{a m''} + \frac{1}{T} \left(\frac{k_1 m'}{a_1 m''} + \frac{k_2}{a_2} \right) \times \right. \\
& \times \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \frac{1}{2a} \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \times \\
& \times \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \frac{m'}{2 a m'' \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}} \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) \\
& \left. + \frac{1}{2 T \sqrt{a_1 p}} \left(k_1 + k_2 \frac{m'}{m''} \right) \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) \right], \\
\left. \frac{d\eta(p)}{dp} \right|_{p=-\theta_j} = & \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\theta_j}{a_2}}} \left[\frac{1}{a m''} + \frac{1}{T} \left(\frac{k_1 m'}{a_1 m''} + \frac{k_2}{a_2} \right) \right] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos \left(m' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_1}} \right) \sin \left(m'' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_2}} \right) + \\
& + \frac{1}{2a} \cos \left(m' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_1}} \right) \cos \left(m'' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_2}} \right) - \\
& - \frac{m'}{2am'' \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}} \sin \left(m' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_1}} \right) \sin \left(m'' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_2}} \right) + \\
& + \frac{1}{2T \sqrt{\frac{\theta_j}{a_1} a_1}} \left(k_1 + k_2 \frac{m'}{m''} \right) \times \\
& \times \sin \left(m' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_1}} \right) \cos \left(m'' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_2}} \right); \quad (\text{II.1.114})
\end{aligned}$$

здесь θ_j — положительные корни уравнения

$$\frac{\theta}{a} + \frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{\theta}{a_1}} \operatorname{tg} \left(m' \sqrt{\frac{\theta}{a_1}} \right) + \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{\theta}{a_2}} \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\theta}{a_2}} \right) = 0.$$

Вычислим

$$\left. \frac{d\gamma(p)}{dp} \right|_{p=-\sigma_v} = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} m''}{\cos \left(m' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}} \right) \sin \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} \right)} \chi(\sigma_v, \xi_t),$$

где

$$\begin{aligned}
\chi(\sigma_v, \xi_t) &= \frac{\xi_t^2}{2R_k^2} \left[\frac{m'}{\sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}}} \operatorname{tg} \left(m' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}} \right) \right] - \\
&- \frac{m''}{2 \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}}} \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} \right) + \frac{1}{2\sigma} \Big] + \psi(\sigma_v), \\
\psi(\sigma) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{T} \left(\frac{k_1 m'}{a_1} + \frac{k_2 m''}{a_2} \right) \right] + \\
&+ \frac{m''}{2a} \sqrt{\frac{\sigma}{a_2}} \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma}{a_2}} \right) - \frac{m'}{2a} \sqrt{\frac{\sigma}{a_1}} \operatorname{tg} \left(m' \sqrt{\frac{\sigma}{a_1}} \right) + \\
&+ \frac{m'}{2T \sqrt{a_1 a_2}} \left(k_1 + k_2 \frac{m'}{m''} \right) \operatorname{tg} \left(m' \sqrt{\frac{\sigma}{a_1}} \right) \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma}{a_2}} \right); \quad (\text{II.1.115})
\end{aligned}$$

здесь σ_v — положительные корни уравнения

$$\frac{\xi_l^2}{R_k^2} + \frac{\sigma}{a} + \frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{\sigma}{a_1}} \operatorname{tg} \left(m' \sqrt{\frac{\sigma}{a_1}} \right) + \frac{k_2}{T} \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma}{a_2}} \right) = 0.$$

Таким образом, оригинал функции (II.1.112) запишется так:

$$\begin{aligned} v(r, t) = & H_0 + \varphi(r) - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2} \left[\frac{k_2}{T m''} - \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} \right] - \\ & - \frac{Q_r}{\pi T} \sum_i \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i \right)}{\xi_i^2 + \frac{R_k^2 k_2}{T m''}} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} + \\ & + \frac{Q_r}{\pi T R_k^2} \sum_v \sum_i \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i \right)}{\sigma_v \chi(\sigma_v, \xi_i)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} e^{-\sigma_v t}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} H(r, t) = & H_0 - \frac{Q_r}{\pi T R_k^2} \left[\frac{k_2}{T m''} - \sum_j \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} \right] - \\ & - \frac{Q_r}{\pi T} \sum_i \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i \right)}{\xi_i^2 + \frac{R_k^2 k_2}{T m''}} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} + \\ & + \frac{Q_r}{\pi T R_k^2} \sum_v \sum_i \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} \xi_i \right)}{\sigma_v \chi(\sigma_v, \xi_i)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} e^{-\sigma_v t}. \quad (\text{II.1.116}) \end{aligned}$$

Решения H_1 и H_2 можно найти непосредственным интегрированием уравнения (II.1.12):

$$\begin{aligned} H_1(r, z, t) = & \frac{2}{m'} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp \left[- \left(\frac{2n+1}{2m'} \pi \right)^2 a_1 t \right] \times \\ & \times \cos \frac{2n+1}{2m'} \pi (m + m' + m'' - z) \left\{ \frac{(2n+1) \pi a_1}{2m'} \times \right. \\ & \times \int_0^t \exp \left[\left(\frac{2n+1}{2m'} \pi \right)^2 a_1 \tau \right] [v(r, \tau) - \varphi(r)] d\tau + \frac{2m'}{(2n+1) \pi} H_0 \Bigg\}, \quad (\text{II.1.117}) \end{aligned}$$

$$H_2(r, z, t) = \frac{m'' - z}{m''} H_0 + \frac{z}{m''} (v - \varphi) + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{m''} \right)^2 a_2 (t - \tau) \right] \sin \frac{n\pi}{m''} z \right\} \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (\text{II.1.118})$$

4. Рассмотрим трехслойный пласт, полосообразный в плане. Пусть в хорошо проницаемый напорный пласт пресбурена цепочка скважин, расположенных на расстоянии L_r от начала координат.

Положим, что расходы скважины и расстояние между ними одинаковы за все время эксплуатации. Будем считать, что при $x=0$ и $x=L$ напорный пласт непроницаем. Тогда эта задача сведется к интегрированию системы уравнений с заданными начальными и краевыми условиями:

$$\frac{1}{a_j} \cdot \frac{\partial H_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_j}{\partial z^2}, \quad (\text{II.1.119})$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} k_i \frac{\partial H_i [x, (i-2)m + m'', t]}{\partial z}, \quad (\text{II.1.120})$$

$$H_j(x, z, 0) = H_0, \quad (\text{II.1.121})$$

$$H_j[x, (2-j)m + m'', t] = H(x, t), \quad (\text{II.1.122})$$

$$H_j[x, (2-j)(m + m' + m''), t] = H_0, j = 1, 2, \quad (\text{II.1.123})$$

$$H(x, 0) = H_0, \quad (\text{II.1.124})$$

$$\frac{\partial H(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H(L, t)}{\partial x} = 0, \quad (\text{II.1.125})$$

$$\frac{\partial H(L_r + 0, t)}{\partial x} - \frac{\partial H(L_r - 0, t)}{\partial x} = \frac{Q_r}{lT}, \quad (\text{II.1.126})$$

где L_r — координата галереи, Q_r — расход на галерее,

T — проводимость пласта, l — ширина пласта.

Решение задачи будем искать в виде

$$H = - \frac{Q_r}{LT} \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha (x - L_r) \right] + v(x, t), \quad (\text{II.1.127}) \\ \alpha = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L_r \\ 1, & L_r \leq x \leq L \end{cases},$$

где $v(x, t)$ — регулярная часть решения.

Тогда задача (II.1.119) — (II.1.126) сведется к следующей:

$$\frac{1}{a_j} \cdot \frac{\partial H_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_j}{\partial z^2}, \quad (\text{II.1.128})$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} k_i \frac{\partial H_i [x, (i-2)m + m'', t]}{\partial z} - \frac{Q_r}{lTL}, \quad (\text{II.1.129})$$

$$H_j(x, z, 0) = H_0, \quad (\text{II.1.130})$$

$$H_j[x, (2-j)m + m'', t] = v - \frac{Q_r}{lT} \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha(x - L_r) \right], \quad (\text{II.1.131})$$

$$H_j[x, (2-j)(m + m' + m''), t] = H_0, \quad j = 1, 2, \quad (\text{II.1.132})$$

$$v(x, 0) = H_0 + \frac{Q_r}{lT} \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha(x - L_r) \right], \quad (\text{II.1.133})$$

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0, \quad (\text{II.1.134})$$

$$\frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0. \quad (\text{II.1.134}')$$

Применим к системе (II.1.128) — (II.1.129) преобразование Лапласа. Тогда с учетом начальных условий (II.1.130) и (II.1.133) будем иметь

$$\frac{1}{a_1} (p \bar{H}_1 - H_0) = \frac{\partial^2 \bar{H}_1}{\partial z^2}, \quad (\text{II.1.135})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} [p \bar{v} - H_0 - \varphi(x)] &= \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} + \frac{k_1}{T} \frac{\partial \bar{H}_1(x, m + m'', p)}{\partial z} - \\ &- \frac{k_2}{T} \frac{\partial \bar{H}_2(x, m'', p)}{\partial z} - \frac{Q_r}{lTLp}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.136})$$

$$\frac{1}{a_2} (p \bar{H}_2 - H_0) = \frac{\partial^2 \bar{H}_2}{\partial z^2}, \quad (\text{II.1.137})$$

где

$$\varphi(x) = \frac{Q_r}{lT} \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha(x - L_r) \right]. \quad (\text{II.1.138})$$

Краевые условия (II.1.131), (II.1.132), (II.1.134) после преобразования Лапласа запишутся так:

$$\bar{H}_1(x, m + m'', p) = \bar{v}(x, p) - \frac{\varphi(x)}{p}, \quad (\text{II.1.139})$$

$$\bar{H}_2(x, m'', p) = \bar{v}(x, p) - \frac{\varphi(x)}{p}, \quad (\text{II.1.140})$$

$$\bar{H}_1(x, m + m' + m'', p) = \frac{H_0}{p}, \quad (\text{II.1.141})$$

$$\bar{H}_2(x, 0, p) = \frac{H_0}{p}, \quad (\text{II.1.142})$$

$$\frac{d\bar{v}(0, p)}{dx} = 0, \quad (\text{II.1.143})$$

$$\frac{d\bar{v}(L, p)}{dx} = 0. \quad (\text{II.1.144})$$

Из уравнения (II.1.135) имеем

$$\bar{H}_1 = \left[\bar{v} - \frac{H_0}{p} - \frac{\varphi(x)}{p} \right] \frac{\text{sh} \left\{ \sqrt{\frac{p}{a_1}} (m + m' + m'' - z) \right\}}{\text{sh} \left\{ \sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right\}} + \frac{H_0}{p}, \quad (\text{II.1.145})$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{H}_1(x, m + m'', p)}{dz} = & - \left[\bar{v} - \frac{H_0}{p} - \frac{\varphi(x)}{p} \right] \times \\ & \times \sqrt{\frac{p}{a_1}} \text{cth} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right). \end{aligned} \quad (\text{II.1.146})$$

Аналогично из уравнения (II.1.137) находим

$$\bar{H}_2 = \left[\bar{v} - \frac{H_0}{p} - \frac{\varphi(x)}{p} \right] \frac{\text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} z \right)}{\text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right)} + \frac{H_0}{p}, \quad (\text{II.1.147})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{H}_2(x, m'', p)}{dz} = & \left[\bar{v} - \frac{H_0}{p} - \frac{\varphi(x)}{p} \right] \sqrt{\frac{p}{a_2}} \text{cth} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right). \end{aligned} \quad (\text{II.1.148})$$

Подставляя (II.1.146) и (II.1.148) в уравнение (II.1.136), получаем

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} - \omega^2(p) \bar{v} = - [H_0 + \varphi(x)] \frac{\omega^2(p)}{p} + \frac{Q_r}{iTLp}, \quad (\text{II.1.149})$$

где

$$\omega^2(p) = \frac{p}{a} + \frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{p}{a_1}} \text{cth} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) +$$

$$+ \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{p}{a_2}} \operatorname{cth} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right). \quad (\text{II.1.150})$$

Решение уравнения (II.1.149) будем искать в виде

$$\bar{v}(x, p) = \bar{v}_1(x, p) + \bar{v}_2(p), \quad (\text{II.1.151})$$

где

$$\bar{v}_2(p) = \frac{H_0}{p} - \frac{Q_r}{iTLp\omega^2(p)}, \quad (\text{II.1.152})$$

а $\bar{v}_1(x, p)$ будет определяться из уравнения

$$\frac{d^2 \bar{v}_1}{dx^2} - \omega^2(p) \bar{v}_1 = -\varphi(x) \frac{\omega^2(p)}{p}. \quad (\text{II.1.153})$$

Применим к (II.1.153) косинус преобразования Фурье —

$$\tilde{f}(n) = \int_0^1 f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (\text{II.1.154})$$

Тогда уравнение (II.1.153) с учетом краевых условий (II.1.143), (II.1.144) при $n \neq 0$ преобразуется таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{-n^2 \pi^2 \bar{v}_1}{L^2} - \bar{v}_1 \omega^2(p) &= -\frac{Q_r}{iT} \cdot \frac{\omega^2(p)}{p} \cdot \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi L_r}{L}, \\ \bar{v}_1 \left[\omega^2(p) + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right] &= \frac{Q_r}{iT} \cdot \frac{\omega^2(p)}{p} \cdot \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi L_r}{L}, \\ \bar{v}_1 &= \frac{Q_r \omega^2(p) L^2 \cos \frac{n\pi L_r}{L}}{iT p n^2 \pi^2 \left[\omega^2(p) + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right]}. \end{aligned} \quad (\text{II.1.155})$$

При $n = 0$ имеем

$$\begin{aligned} -\bar{v}_1 \omega^2(p) &= -\frac{Q_r}{iT} \cdot \frac{\omega^2(p)}{p} \left[\frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_r)^2}{2} \right], \\ \bar{v}_1 &= \frac{Q_r}{iT p} \left[\frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_r)^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.1.156})$$

На основании (II.1.155) и (II.1.156), применяя обратное косинусу преобразование, находим

$$\bar{v}_1 = \frac{Q_r}{iLTp} \left[\frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_r)^2}{2} \right] +$$

$$+ \frac{2Q_r L \omega^2(p)}{iT \pi^2 p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi L_r}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}}{n^2 \left[\omega^2(p) + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right]}.$$

Подставляя это выражение в (II.1.151) с учетом (II.1.152), в области изображения получаем

$$\begin{aligned} \bar{v} = & \frac{H_0}{p} - \frac{Q_r}{iT L p \omega^2(p)} + \frac{Q_r}{iT p L \omega^2(p)} \left[\frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_r)^2}{2} \right] + \\ & + 2 \frac{Q_r L \omega^2(p)}{iT \pi^2 p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi L_r}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}}{n^2 \left[\omega^2(p) + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right]}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \bar{v} = & \frac{H_0}{p} - \frac{Q_r}{iT L p \omega^2(p)} + \frac{Q_r}{iT L p \omega^2(p)} \left[\frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_r)^2}{2} \right] + \\ & + \frac{2Q_r L}{iT p \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi L_r}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}}{n^2} - \frac{2Q_r}{iT L p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi L_r}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}}{\omega^2(p) + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\bar{v}(x, p) = \frac{H_0 + \varphi(x)}{p} - \frac{Q_r}{iT L p \omega^2(p)} - \frac{2Q_r}{iT L p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi L_r}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}}{\omega^2(p) + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}}. \quad (\text{II.1.157})$$

Исследуем теперь соотношение

$$\bar{A}(p) = \frac{1}{p \omega^2(p)}, \quad (\text{II.1.158})$$

которое в силу (II.1.150) можно записать так:

$$\begin{aligned} & \frac{\text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right)}{\frac{p m' m''}{\sqrt{a_1 a_2}}} \\ & p \left[\frac{p}{a} \cdot \frac{\text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right)}{\frac{p m' m''}{\sqrt{a_1 a_2}}} + \frac{k_1}{T m'} \cdot \frac{\text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right) \text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right)}{\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{k_2}{Tm''} \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'\right) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''\right)}{\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'} \Big] \quad (\text{II.1.159})$$

Эта дробь представляет собой отношение двух обобщенных полиномов. Поэтому для нахождения ее оригинала можно применить теорему разложения. Корнями знаменателя (II.1.159) являются $p=0$, простой полюс и бесчисленное множество корней уравнения

$$\frac{p}{a} + \frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{p}{a_1}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'\right) - \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{p}{a_2}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''\right) = 0. \quad (\text{II.1.160})$$

Корни этого уравнения лежат на отрицательной части действительной оси, поэтому, полагая $p = -\theta$, его можно переписать таким образом:

$$\frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{\theta}{a_1}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\theta}{a_1}} m'\right) + \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{\theta}{a_2}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\theta}{a_2}} m''\right) = \frac{\theta}{a}. \quad (\text{II.1.161})$$

Заметим, что

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \bar{A}(p) = \frac{1}{\frac{k_1}{Tm'} + \frac{k_2}{Tm''}}. \quad (\text{II.1.162})$$

Вычислим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dp} \left[\frac{p}{a} \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}}\right) \operatorname{sh}\left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}}\right)}{\frac{pm' m''}{\sqrt{a_1 a_2}}} + \right. \\ & \left. + \frac{k_1}{Tm'} \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''\right)}{\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''} + \frac{k_2}{Tm''} \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'\right)}{\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'} \right] = \\ & = \frac{\sqrt{a_2}}{2m'' \sqrt{p}} \left(\frac{1}{a} - \frac{k_1}{Tm' p} \right) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''\right) + \\ & + \frac{\sqrt{a_1}}{2m' \sqrt{p}} \left(\frac{1}{a} - \frac{k_2}{Tm'' p} \right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'\right) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''\right) + \\ & + \frac{1}{2Tp} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \left(\frac{k_1 a_2}{m'' a_1} + \frac{k_2}{m''} \right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''\right) + \\ & + \frac{1}{2Tp} \left(\frac{k_1}{m'} + \frac{k_2}{m''} \right) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'\right) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 G(p) &= \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''\right)}{\frac{pm' m''}{\sqrt{a_1 a_2}}} \\
 &= \frac{p \frac{d}{dp} \left[\frac{p}{a} \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''\right)}{\frac{pm' m''}{\sqrt{a_1 a_2}}} + \frac{k_1}{Tm'} \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''\right)}{\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''} + \right.}{1} \\
 &\quad \left. + \frac{k_2}{Tm''} \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'\right)}{\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'} \right]}{p \left\{ \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'\right) + \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''\right) + \right.} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2a} + \frac{k_1 m'' + k_2 m'}{2T \sqrt{a_1 a_2}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m'\right) \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m''\right) + \right.} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2T} \left(\frac{k_1 m'}{a_1} + \frac{k_2 m''}{a_2} \right) \right\}}. \quad (\text{II.1.163})
 \end{aligned}$$

При $p = -\theta_j$ ($\theta_j > 0$ — корни уравнения (II.1.161)) имеем

$$G(p) \Big|_{p=-\theta_j} = \frac{1}{\psi(\theta_j)}, \quad (\text{II.1.164})$$

где

$$\begin{aligned}
 \psi(\theta_j) &= \frac{1}{2a} \left[m' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_1}} \operatorname{ctg}\left(m' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_1}}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + m'' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_2}} \operatorname{ctg}\left(m'' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_2}}\right) \right] - \frac{k_1 m'' + k_2 m'}{2T \sqrt{a_1 a_2}} \times \\
 &\quad \times \operatorname{ctg}\left(m' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_1}}\right) \operatorname{ctg}\left(m'' \sqrt{\frac{\theta_j}{a_2}}\right) + \frac{1}{2T} \left(\frac{k_1 m'}{a_1} + \frac{k_2 m''}{a_2} \right). \quad (\text{II.1.165})
 \end{aligned}$$

Следовательно, оригинал (II.1.158) запишется в виде

$$\bar{A}(p) \rightarrow A(t) = \frac{Tm'm''}{k_1 m'' + k_2 m'} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)}. \quad (\text{II.1.166})$$

Аналогично соотношение

$$\bar{B}(p) = \frac{1}{p \left[\omega^2(p) + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right]} \quad (\text{II.1.167})$$

в силу (II.1.150) можно записать так:

$$\bar{B}(p) = \frac{\frac{\text{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \text{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{\frac{pm' m''}{\sqrt{a_1 a_2}}}}{p \left[\left(\frac{p}{a} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \frac{\text{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \text{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{\frac{pm' m''}{\sqrt{a_1 a_2}}} + \frac{k_1}{Tm'} \times \right.} \\ \left. \times \frac{\text{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \text{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}}} + \frac{k_2}{Tm''} \cdot \frac{\text{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) \text{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right)}{m' \sqrt{\frac{p}{a_1}}} \right]} \quad (\text{II.1.168})$$

Формула (II.1.168) представляет собой отношение двух обобщенных полиномов. Поэтому для нахождения его оригинала можно применить теорему разложения.

Корнями знаменателя соотношения (II.1.168) являются $p=0$, простой полюс и бесчисленное множество корней уравнения

$$\frac{p}{a} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{p}{a_1}} \text{cth} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) + \\ + \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{p}{a_2}} \text{cth} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) = 0. \quad (\text{II.1.169})$$

Корни этого уравнения лежат на отрицательной части действительной оси. Поэтому, полагая $p = -\sigma$, уравнение (II.1.169) можно записать следующим образом:

$$\frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{\sigma}{a_1}} \text{ctg} \left(m' \sqrt{\frac{\sigma}{a_1}} \right) + \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{\sigma}{a_2}} \text{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma}{a_2}} \right) + \\ + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = \frac{\sigma}{a}. \quad (\text{II.1.170})$$

Заметим, что

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \bar{B}(p) = \frac{1}{\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{k_1}{Tm'} + \frac{k_2}{Tm''}}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dp} \left\{ \left(\frac{p}{a} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{\frac{pm' m''}{\sqrt{a_1 a_2}}} + \right. \\
 & \quad + \frac{k_1}{Tm'} \cdot \frac{\operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}}} + \\
 & \quad \left. + \frac{k_2}{Tm''} \cdot \frac{\operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right)}{m' \sqrt{\frac{p}{a_1}}} \right\} = \\
 & = \left[\frac{\sqrt{a_1 a_2}}{pm' m'' a} + \frac{1}{2Tp} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \left(\frac{k_1 a_1}{m'' a_1} + \frac{k_2}{m'} \right) - \frac{1}{p^2} \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{m' m''} \times \right. \\
 & \quad \times \left. \left(\frac{p}{a} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \right] \times \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \\
 & \quad + \frac{1}{2Tp} \left(\frac{k_1}{m'} + \frac{k_2}{m''} \right) \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \\
 & \quad + \left[\frac{\sqrt{a_2}}{2m''} \cdot \frac{1}{p^{3/2}} \left(\frac{p}{a} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) - \frac{k_1 \sqrt{a_2}}{2Tm' m'' p^{3/2}} \right] \operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \times \\
 & \quad \times \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) + \left[\frac{\sqrt{a_1}}{2m' p^{3/2}} \left(\frac{p}{a} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{k_2 \sqrt{a_1}}{2Tm' m'' p^{3/2}} \right] \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right). \quad (\text{II.1.171})
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \frac{\operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{\frac{pm' m''}{\sqrt{a_1 a_2}}} \\
 & \frac{p \frac{d}{dp} \left[\left(\frac{p}{a} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{\frac{pm' m''}{\sqrt{a_1 a_2}}} + \frac{k_1}{Tm'} \times \right.}{\left. \times \frac{\operatorname{ch} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \operatorname{sh} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right)}{m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}}} + \frac{k_2}{Tm''} \cdot \frac{\operatorname{ch} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right) \operatorname{sh} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right)}{m' \sqrt{\frac{p}{a_1}}} \right]} \Bigg|_{p=-\sigma_1} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sigma_v \chi(\sigma_v, n)}, \quad (\text{II.1.172})$$

где

$$\chi(\sigma_v, n) = \psi(\sigma_v) + \frac{n^2 \pi^2}{2\sigma_v L^2} \left[1 - \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}} m' \operatorname{ctg} \left(m' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_1}} \right) - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} m'' \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma_v}{a_2}} \right) \right]; \quad (\text{II.1.173})$$

здесь $\sigma_v > 0$ — корни уравнения (II.1.170).

В силу (II.1.171), (II.1.172) оригинал $B(t)$ запишется так:

$$\bar{B}(p) \rightarrow B(t) = \frac{1}{\frac{k_1 m'' - k_2 m'}{T m' m''} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_v t}}{\sigma_v \chi(\sigma_v, n)}. \quad (\text{II.1.174})$$

На основании формул (II.1.166) и (II.1.174) оригинал соотношения (II.1.157) окончательно будет иметь вид

$$v(x, t) = H_0 + \varphi(x) - \frac{Q_r m' m''}{iL(k_1 m'' + k_2 m')} + \frac{Q_r}{iTL} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} - \\ - \frac{2Q_r}{iLT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi L_r}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}}{\frac{k_1 m'' + k_2 m'}{T m' m''} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} + \frac{2Q_r}{iLT} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi L_r}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}}{\sigma_v \chi(\sigma_v, n)} e^{-\sigma_v t}. \quad (\text{II.1.175})$$

Таким образом, напор $H(x, t)$ в хорошо проницаемом слое представляется в форме

$$H(x, t) = H_0 \frac{Q_r m' m''}{iL(k_1 m'' + k_2 m')} + \frac{Q_r}{iTL} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} - \\ - \frac{2Q_r}{iLT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi L_r}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}}{\frac{k_1 m'' + k_2 m'}{T m' m''} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} + \frac{2Q_r}{iLT} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi L_r}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}}{\sigma_v \chi(\sigma_v, n)} e^{-\sigma_v t}. \quad (\text{II.1.176})$$

Напоры в слабопроницаемых слоях $H_1(x, z, t)$, $H_2(x, z, t)$ при непосредственном интегрировании уравнения (II.1.128) с начальными и краевыми условиями (II.1.130) — (II.1.132) будут

$$H_1(x, z, t) = \frac{z - m + m''}{m'} H_0 + \frac{m + m' + m'' - z}{m'} H +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{m'}\right)^2 a_1 (t-\tau)} \sin \frac{n\pi}{m'} (m + m' + m'' - z) \right\} \times \\ \times \frac{\partial H(x, z, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (\text{II.1.177})$$

$$H_2(x, z, t) = \frac{m'' - z}{m''} H_0 + \frac{z}{m''} H + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{m''}\right)^2 a_2 (t-\tau)} \sin \frac{n\pi}{m''} z \right\} \frac{\partial H(x, z, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (\text{II.1.178})$$

где $H(x, z, t)$ следует подставить из формулы (II.1.176).

5. Если в ограниченном, полоосообразном в плане, трех-слойном пласте пробурено s цепочек скважин в основной напорный пласт, то, считая, что на каждой цепочке скважины работают с одинаковым расходом и одинаковым расстоянием между ними, получаем такую задачу.

Проинтегрировать систему (II.1.119)–(II.1.120) с начальными и краевыми условиями (II.1.121)–(II.1.125) и

$$\frac{\partial H(L_{ri} + 0, t)}{\partial x} - \frac{\partial H(L_{ri} - 0, t)}{\partial x} = \frac{Q_{ri}}{lT}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (\text{II.1.179})$$

где Q_{ri} — расход на i -й галерее;

L_{ri} — расстояние от начала координат до i -й галереи.

Вместо H введем новую функцию v по формуле

$$v = H + \frac{1}{lT} \left[\frac{x^2}{2L} \sum_{i=1}^s Q_i - \sum_{i=1}^s \alpha_i Q_i (x - L_{ri}) \right], \quad (\text{II.1.180})$$

где

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < L_{ri} \\ 1, & L_{ri} \leq x \leq L. \end{cases}$$

Тогда получим такую систему уравнений с начальными и краевыми условиями:

$$\frac{1}{a_j} \cdot \frac{\partial H_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_j}{\partial z^2}, \quad (\text{II.1.181})$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} x_i \frac{\partial H_i[x, (2-i)m+m'', t]}{\partial z} - \frac{\sum_{i=1}^s Q_i}{lTL}, \quad (\text{II.1.182})$$

$$H_j(x, z, 0) = H_0, \quad (\text{II.1.183})$$

$$H_j[x, (2-j)m + m'', t] = v -$$

$$- \frac{1}{iT} \left[\frac{x^2}{2L} \sum_{i=1}^s Q_i - \sum_{i=1}^s \alpha_i Q_i (x - L_{ri}) \right], \quad (\text{II.1.184})$$

$$H_j[x, (2-j)(m + m' + m''), t] = H_0, \quad j = 1, 2, \quad (\text{II.1.185})$$

$$v(x, 0) = H_0 + \frac{1}{iT} \left[\frac{x^2}{2L} \sum_{i=1}^s Q_i - \sum_{i=1}^s \alpha_i Q_i (x - L_{ri}) \right], \quad (\text{II.1.186})$$

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0. \quad (\text{II.1.187})$$

К системе (II.1.181)–(II.1.182) применим преобразование Лапласа. Тогда она запишется так:

$$\frac{1}{a_1} (p\bar{H}_1 - H_0) = \frac{\partial^2 \bar{H}_1}{\partial z^2}, \quad (\text{II.1.188})$$

$$\frac{1}{a} \left[p\bar{H} - H_0 - \varphi(x) \right] = \quad (\text{II.1.189})$$

$$= \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} - \frac{k_1}{T} \cdot \frac{\partial \bar{H}_1(x, m + m'', p)}{\partial z} -$$

$$- \frac{k_2}{T} \cdot \frac{\partial \bar{H}_2(x, m'', p)}{\partial z} - \frac{Q}{iTLp},$$

$$\frac{1}{a_2} (p\bar{H}_2 - H_0) = \frac{\partial^2 \bar{H}_2}{\partial z^2}, \quad (\text{II.1.190})$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{iT} \left[\frac{x^2}{2L} \sum_{i=1}^s Q_i - \sum_{i=1}^s \alpha_i Q_i (x - L_{ri}) \right],$$

$$Q = \sum_{i=1}^s Q_i.$$

Краевые условия (II.1.184), (II.1.185), (II.1.187) после применения к ним преобразования Лапласа примут вид

$$\bar{H}_1(x, m + m'', p) = \bar{v} - \frac{\varphi(x)}{p}, \quad (\text{II.1.191})$$

$$\bar{H}_2(x, m'', p) = \bar{v} - \frac{\varphi(x)}{p}, \quad (\text{II.1.192})$$

$$\frac{d\bar{v}(0, p)}{dx} = 0, \quad (\text{II.1.193})$$

$$\frac{d\bar{v}(L, p)}{dx} = 0, \quad (\text{II.1.194})$$

$$\bar{H}_1(x, m + m' + m'', p) = \frac{H_0}{p}, \quad (\text{II.1.195})$$

$$\bar{H}_2(x, 0, p) = \frac{H_0}{p}. \quad (\text{II.1.196})$$

Из уравнений (II.1.188) и (II.1.190) с учетом краевых условий (II.1.191), (II.1.192), (II.1.195), (II.1.196) имеем

$$H_1 = \left[\bar{v} - \frac{H_0}{p} - \frac{\varphi(x)}{p} \right] \frac{\text{sh} \left\{ \sqrt{\frac{p}{a_1}} (m + m' + m'' - z) \right\}}{\text{sh} \left\{ m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right\}} + \frac{H_0}{p},$$

$$H_2 = \left[\bar{v} - \frac{H_0}{p} - \frac{\varphi(x)}{p} \right] \frac{\text{sh} \left\{ \sqrt{\frac{p}{a_2}} z \right\}}{\text{sh} \left\{ \sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right\}} + \frac{H_0}{p},$$

$$\frac{\partial \bar{H}_1(x, m + m'', p)}{\partial z} = - \left[\bar{v} - \frac{H_0}{p} - \frac{\varphi(x)}{p} \right] \sqrt{\frac{p}{a_1}} \text{cth} \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} m' \right), \quad (\text{II.1.197})$$

$$\frac{\partial \bar{H}_2(x, m'', p)}{\partial z} = - \left[\bar{v} - \frac{H_0}{p} - \frac{\varphi(x)}{p} \right] \sqrt{\frac{p}{a_2}} \text{cth} \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} m'' \right). \quad (\text{II.1.198})$$

Подставляя (II. 1.197), (II.1.198) в (II.1.189), получаем

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} - \omega^2(p) \bar{v} = - \left[H_0 + \varphi(x) \right] \frac{\omega^2(p)}{p} + \frac{Q}{TLp}, \quad (\text{II.1.199})$$

где

$$\begin{aligned} \omega^2(p) = & \frac{p}{a} + \frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{p}{a_1}} \text{cth} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) + \\ & + \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{p}{a_2}} \text{cth} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.1.200})$$

Решение уравнения (II.1.199) будем искать в виде

$$\bar{v}(x, p) = \bar{v}_1(x, p) + \bar{v}_2(p), \quad (\text{II.1.201})$$

где

$$\bar{v}_2(p) = \frac{H_0}{p} - \frac{Q}{iT L p \omega^2(p)}, \quad (\text{II.1.202})$$

а функция $\bar{v}_1(p)$ будет определяться из уравнения

$$\frac{d^2 \bar{v}_1}{dx^2} - \omega^2(p) \bar{v}_1 = -\varphi(x) \frac{\omega^2(p)}{p} \quad (\text{II.1.203})$$

с краевыми условиями

$$\frac{d\bar{v}_1(0, p)}{dx} = 0, \quad (\text{II.1.204})$$

$$\frac{d\bar{v}_1(L, p)}{dx} = 0. \quad (\text{II.1.205})$$

Применим к уравнению (II.1.203) косинус преобразование Фурье:

$$\tilde{f}(n) = \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Сначала применим косинус преобразования к правой части уравнения (II.1.203). При $n \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^L \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \\ &= \frac{Q}{2iT L} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi x}{L} dx - \frac{Q_1}{iT} \int_{L_{r_1}}^{L_{r_2}} (x - L_{r_1}) \cos \frac{n\pi x}{L} dx - \\ & \quad - \dots - \frac{Q_s}{iT} \int_{L_{rs}}^L (x - L_{rs}) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \\ &= \frac{Q}{2iT L} \cdot \frac{2L^3}{n^2 \pi^2} (-1)^n - \frac{Q_1}{iT} \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \left[(-1)^n - \cos \frac{n\pi L_{r_1}}{L} \right] - \\ & \quad - \dots - \frac{Q_s}{iT} \cdot \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \left[(-1)^n - \cos \frac{n\pi L_{rs}}{L} \right] = \\ &= \frac{(-1)^n L^2 \sum_{i=1}^s Q_i}{iT n^2 \pi^2} - \frac{(-1)^n L^2 \sum_{i=1}^s Q_i}{iT n^2 \pi^2} + \\ &+ \frac{L^2}{iT n^2 \pi^2} \sum_{i=1}^s Q_i \cos \frac{n\pi L_{ri}}{L} = \frac{L^2}{iT n^2 \pi^2} \sum_{i=1}^s Q_i \cos \frac{n\pi L_{ri}}{L}, \quad (\text{II.1.206}) \end{aligned}$$

а при $n = 0$ —

$$\int_0^L \varphi(x) dx = \frac{QL^2}{6lT} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s Q_i (L - L_{ri})^2. \quad (\text{II.1.207})$$

Таким образом, при $n = 0$ в силу (II.1.206) уравнение (II.1.203) после применения к нему косинуса преобразования примет вид

$$-\frac{n^2\pi^2}{L^2} \tilde{\bar{v}}_1 - \omega^2(p) \tilde{\bar{v}}_1 = -\frac{L^2\omega^2(p)}{lTn^2\pi^2 p} \sum_{i=1}^s Q_i \cos \frac{n\pi L_{ri}}{L},$$

откуда

$$\tilde{\bar{v}}_1 = \frac{L^2}{lTp} \frac{\sum_{i=1}^s Q_i \cos \frac{n\pi L_{ri}}{L}}{n^2\pi^2} - \frac{1}{l\pi p} \frac{\sum_{i=1}^s Q_i \cos \frac{n\pi L_{ri}}{L}}{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \omega^2(p)}. \quad (\text{II.1.208})$$

При $n = 0$ имеем

$$\tilde{\bar{v}}_1 = \frac{1}{p} \left[\frac{QL^2}{6lT} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s Q_i (L - L_{ri})^2 \right]. \quad (\text{II.1.209})$$

На основании (II.1.208), (II.1.209), используя формулу обращения косинуса преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \bar{v}_1(x, p) = & \frac{1}{Lp} \left[\frac{QL^2}{6lT} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s Q_i (L - L_{ri})^2 \right] + \\ & + \frac{2L}{p l T \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^s Q_i \cos \frac{n\pi L_{ri}}{L}}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L} - \\ & - \frac{2}{l T L p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^s Q_i \cos \frac{n\pi L_{ri}}{L}}{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \omega^2(p)} \cos \frac{n\pi x}{L}. \end{aligned} \quad (\text{II.1.210})$$

Итак, соотношение (II.1.201) в силу формул (II.1.202) и (II.1.210) запишется так:

$$v(x, p) = \frac{H_0}{p} - \frac{Q}{l T L p \omega^2(p)} + \frac{1}{L p} \left[\frac{QL^2}{6lT} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s Q_i (L - L_{ri})^2 \Big] + \frac{2L}{iT\pi p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^s Q_i \cos \frac{n\pi L_{ri}}{L}}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L} - \\
& - \frac{2}{iTpL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^s Q_i \cos \frac{n\pi L_{ri}}{L}}{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \omega^2(p)} \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (\text{II.1.211})
\end{aligned}$$

Используя предельное соотношение

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0),$$

при $f(t) = F(p)$ из формулы (II.1.211) получаем

$$\begin{aligned}
H_0 + f(x) = H_0 + L \left[\frac{QL^2}{6iT} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s Q_i (L - L_{ri})^2 \right] + \\
+ \frac{2L}{iT\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^s Q_i \cos \frac{n\pi L_{ri}}{L}}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L},
\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
f(x) = L \left[\frac{QL^2}{6iT} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s Q_i (L - L_{ri})^2 \right] + \\
+ \frac{2L}{iT\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^s Q_i \cos \frac{n\pi L_{ri}}{L}}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (\text{II.1.212})
\end{aligned}$$

С учетом (II.1.212) формула (II.1.211) примет вид

$$\begin{aligned}
\bar{v}(x, p) = \frac{H_0 + \varphi(x)}{p} - \frac{Q}{iTLP\omega^2(p)} - \frac{2}{iLTp} \times \\
\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^s Q_i \cos \frac{n\pi L_{ri}}{L}}{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \omega^2(p)} \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (\text{II.1.213})
\end{aligned}$$

Пользуясь результатами 4-го пункта данного параграфа, оригинал (II.1.213) может быть записан как

$$v(x, t) = H_0 + f(x) - \frac{Qm'm''}{iL(k_1m'' + k_2m'')} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Q}{iTL} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} - \frac{2}{iLT} \times \\
& \times \sum_{n=1}^s \frac{\sum_{l=1}^s Q_l \cos \frac{n\pi L_{rl}}{L}}{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{k_1 m'' + k_2 m'}{T m' m''}} \cos \frac{n\pi x}{L} + \\
& + \frac{2}{iLT} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sum_{l=1}^s Q_l \cos \frac{n\pi L_{rl}}{L} \right) \cos \frac{n\pi x}{L}}{\sigma_v \chi(\sigma_v, n)} e^{-\sigma_v t}, \quad (\text{II.1.214})
\end{aligned}$$

где $\theta_j > 0$ — корни уравнения (II.1.161);

$\sigma_v > 0$ — корни уравнения (II.1.170);

$\psi(\theta)$ и $\chi(\sigma, n)$ — функции, определяемые формулами (II.1.165) и (II.1.173) соответственно.

Из (II.1.214) следует, что напор в хорошо проницаемом слое имеет вид

$$\begin{aligned}
H(x, t) = H_0 - \frac{Q m' m''}{iL (k_1 m'' + k_2 m')} + \frac{Q}{iTL} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} - \\
- \frac{2}{iLT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{l=1}^s Q_l \cos \frac{n\pi L_{rl}}{L}}{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{k_1 m'' + k_2 m'}{T m' m''}} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{2}{iLT} \times \\
\times \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sum_{l=1}^s Q_l \cos \frac{n\pi L_{rl}}{L} \right) \cos \frac{n\pi x}{L}}{\sigma_v \chi(\sigma_v, n)} e^{-\sigma_v t}. \quad (\text{II.1.215})
\end{aligned}$$

Напоры в слабопроницаемых слоях $H_1(x, z, t)$ и $H_2(x, z, t)$ будут определяться из соотношений (II.1.177) и (II.1.178) соответственно. Заметим, что в этих формулах $H(x, t)$ надо подставлять из (II.1.215).

6. Пусть в рассматриваемом пласте имеется s круговых батарей со скважинами, расположенными на окружностях радиусом R_l ($l = 1, 2, \dots, s$).

Будем считать, что дебиты скважин каждой батареи одинаковы и расположены симметрично за все время эксплуатации. Тогда эта задача сведется к интегрированию системы (II.1.1) — (II.1.3) с условиями (II.1.4) — (II.1.7), (II.1.9), (II.1.10) и условий

$$\frac{\partial H(R_{rl} + 0, t)}{\partial r} - \frac{\partial H(R_{rl} - 0, t)}{\partial r} = \frac{Q_{rl}}{2\pi T R_{rl}}, \quad (\text{II.1.216})$$

где R_{rl} — радиус галереи, Q_{rl} — расход галереи.

Если вместо функции H ввести новую функцию

$$v(r, t) = H(r, t) + \frac{1}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} \sum_{i=1}^s Q_{rl} - \sum_{i=1}^s \alpha_i Q_i \ln \frac{r}{R_{rl}} \right),$$

где

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R_{rl} \\ 1, & R_{rl} \leq r \leq R_k \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

то наша задача сведется к интегрированию системы уравнений

$$\frac{1}{a_j} \cdot \frac{\partial H_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_j}{\partial z^2}, \quad (\text{II.2.217})$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) +$$

$$+ \frac{1}{T} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} k_i \frac{\partial H_i [r, (2-i)m + m'', t]}{\partial z} - \frac{\sum_{i=1}^s Q_i}{\pi T R_k^2} \quad (\text{II.1.218})$$

с начальными и краевыми условиями

$$H_j(r, z, 0) = H_0, \quad (\text{II.1.219})$$

$$H_j[r, (2-j)m + m'', t] =$$

$$= v(r, t) - \frac{1}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} \sum_{i=1}^s Q_{rl} - \sum_{i=1}^s \alpha_i Q_i \ln \frac{r}{R_{rl}} \right), \quad (\text{II.1.220})$$

$$H_j[r, (2-j)(m + m' + m''), t] = H_0, \quad (\text{II.1.221})$$

$$v(r, 0) = H_0 + \frac{1}{2\pi T} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} \sum_{i=1}^s Q_i - \sum_{i=1}^s \alpha_i Q_i \ln \frac{r}{R_{rl}} \right), \quad (\text{II.1.222})$$

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v(R_k, t)}{\partial r} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (\text{II.1.223})$$

После применения преобразования Лапласа к системе (II.1.217) — (II.1.223) аналогично тому, как было сделано в п. 1, получим

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \omega^2(p) \bar{v} = - [H_0 + \varphi(r)] \frac{\omega^2(p)}{p} + \frac{Q}{\pi T R_k^2 p}, \quad (\text{II.1.224})$$

$$\omega^2(p) = \frac{p}{a} + \frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{p}{a_1}} \operatorname{cth} \left(m' \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) + \\ + \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{p}{a_2}} \operatorname{cth} \left(m'' \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right), \quad (\text{II.1.225})$$

$$Q = \sum_{l=1}^s Q_{rl}.$$

Решение уравнения (II.1.224) будем искать в виде

$$\bar{v}(r, p) = \bar{v}_1(r, p) + \bar{v}_2(p), \quad (\text{II.1.226})$$

где

$$\bar{v}_2(p) = \frac{H_0}{p} - \frac{Q}{\pi T R_k^2 p \omega^2(p)}, \quad (\text{II.1.227})$$

а $\bar{v}_1(r, p)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}_1}{dr} \right) - \omega^2(p) \bar{v}_1 = -\varphi(r) \frac{\omega^2(p)}{p} \quad (\text{II.1.228})$$

и краевым условиям

$$\frac{d\bar{v}_1(0, p)}{dr} = 0, \quad \frac{d\bar{v}_1(R_k, p)}{dr} = 0.$$

Опуская выкладки, аналогичные приведенным в п. 1, получаем

$$\bar{v}(r, p) = \frac{H_0 + \varphi(r)}{p} - \frac{Q}{\pi T R_k^2 p \omega^2(p)} - \frac{1}{\pi T p} \times \\ \times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum_{l=1}^s Q_{rl} J_0 \left(\frac{R_{rl}}{R_k} \xi_l \right)}{\xi_l^2 + R_k^2 \omega^2(p)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)}, \quad (\text{II.1.229})$$

где ξ_l — корни уравнения $J_1(\xi_l) = 0$.

Процедура перехода к оригиналу в формуле (II.1.229) аналогична нахождению оригинала (II.1.38). Поэтому, опуская эти выкладки, запишем только окончательный результат:

$$v(r, t) = H_0 + \varphi(r) - \frac{Q m' m''}{\pi R_k^2 (k_1 m'' + k_2 m')} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Q}{\pi T} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} - \frac{1}{\pi T R_K^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^s Q_{rl} J_0 \left(\frac{R_{rl}}{R_K} \xi_l \right)}{\frac{k_1 m'' + k_2 m'}{T m' m''} + \frac{\xi_l^2}{R_K^2}} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)} + \\
& + \frac{1}{\pi T R_K^2} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^s Q_{rl} J_0 \left(\frac{R_{rl}}{R_K} \xi_l \right)}{\sigma_v \chi(\sigma_v, \xi_l)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)} e^{-\sigma_v t},
\end{aligned}$$

где $\theta_j > 0$ — корни уравнения

$$-\frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{\theta}{a_1}} \operatorname{ctg} \left(m' \sqrt{\frac{\theta}{a_1}} \right) + \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{\theta}{a_2}} \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\theta}{a_2}} \right) = \frac{\theta}{a},$$

$\sigma_v > 0$ — корни уравнения

$$\begin{aligned}
-\frac{k_1}{T} \sqrt{\frac{\sigma}{a_1}} \operatorname{ctg} \left(m' \sqrt{\frac{\sigma}{a_1}} \right) + \frac{k_2}{T} \sqrt{\frac{\sigma}{a_2}} \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\sigma}{a_2}} \right) + \\
+ \frac{\xi_l^2}{R_K^2} = \frac{\sigma}{a}.
\end{aligned}$$

Окончательно напор в хорошо проницаемом пласте может быть записан в виде

$$\begin{aligned}
H(r, t) = H_0 - \frac{Q m' m''}{\pi R_K^2 (k_1 m' + k_2 m'')} + \frac{Q}{\pi T} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j \psi(\theta_j)} - \\
- \frac{1}{\pi T R_K^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^s Q_{rl} J_0 \left(\frac{R_{rl}}{R_K} \xi_l \right)}{\frac{k_1 m'' + k_2 m'}{T m' m''} + \frac{\xi_l^2}{R_K^2}} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)} + \\
+ \frac{1}{\pi T R_K^2} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^s Q_{rl} J_0 \left(\frac{R_{rl}}{R_K} \xi_l \right)}{\sigma_v \chi(\sigma_v, \xi_l)} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)} e^{-\sigma_v t},
\end{aligned}
\tag{II.1.230}$$

где

$$\begin{aligned}
\psi(\theta) = \frac{1}{2a} \left[\sqrt{\frac{\theta}{a_1}} m' \operatorname{ctg} \left(m' \sqrt{\frac{\theta}{a_1}} \right) + \right. \\
\left. + \sqrt{\frac{\theta}{a_2}} m'' \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\theta}{a_2}} \right) + 1 \right] - \frac{k_1 m'' + k_2 m'}{2T \sqrt{a_1 a_2}} \times \\
\times \operatorname{ctg} \left(m' \sqrt{\frac{\theta}{a_1}} \right) \operatorname{ctg} \left(m'' \sqrt{\frac{\theta}{a_2}} \right) + \frac{1}{2T} \left(\frac{k_1 m''}{a_1} + \frac{k_2 m'}{a_2} \right).
\end{aligned}$$

Напоры в слабопроницаемых слоях $H_1(r, z, t)$ и $H_2(r, z, t)$ будут определяться из формул (II.1.177) и (II.1.178) соответственно. При этом следует помнить, что в эти формулы необходимо подставить $H(r, t)$ из соотношения (II.1.230).

§ 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К БАТАРЕЯМ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДРЕН В МНОГОСЛОЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ПЛАСТАХ

Для задач, рассмотренных в § 1 данной главы, могут быть разработаны эффективные численные методы решения, основанные на методе конечных разностей с использованием ЭВМ. Причем, если аналитические решения удастся получить только для тех гидромеханических задач, которые сводятся к интегрированию одномерных систем уравнений, или для простых в плане форм геометрии многослойного пласта, то численными методами можно решать задачи для произвольных в плане форм геометрии многослойного пласта с учетом несимметричности потока горизонтальной плоскости.

Рассмотрим модель трехслойного пласта и задачи, для которых в § 1 было построено аналитическое решение.

Круговая галерея. Дадим метод численного решения задачи (II. 1. 1) — (II. 1. 10). Прежде всего перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$u = \frac{H_1}{H_{\text{хар}}}, \quad h = \frac{H}{H_{\text{хар}}}, \quad w = \frac{H_2}{H_{\text{хар}}}; \quad (\text{II.2.1})$$

$$\xi = \frac{r}{R_{\text{к}}}, \quad \eta = \frac{z}{m}, \quad \tau = \frac{a}{R_{\text{к}}^2} t; \quad (\text{II.2.2})$$

$$\alpha = \frac{a}{a_1} \cdot \frac{m^2}{R_{\text{к}}^2}, \quad \beta_1 = \frac{k_1 R_{\text{к}}^2}{Tm}, \quad \beta_2 = \frac{k_2 R_{\text{к}}^2}{Tm}, \quad \gamma = \frac{am^2}{a_2 R_{\text{к}}^2}; \quad (\text{II.2.3})$$

$$Q^* = \frac{Q_{\text{г}} R_{\text{к}}}{2\pi T R_{\text{г}} H_{\text{хар}}}, \quad w = \frac{H_0}{H_{\text{хар}}}, \quad (\text{II.2.4})$$

где $H_{\text{хар}}$ — некоторый характерный напор. В качестве $H_{\text{хар}}$ можно взять, например, начальный напор.

Принимая во внимание (II.2.1) — (II.2.4), задачу (II.1.1) — (II.1.10) преобразуем к виду

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad (\text{II.2.5})$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial h}{\partial \xi} + \beta_1 \frac{\partial u \left(\xi, \frac{m+m''}{m}, \tau \right)}{\partial \eta} -$$

$$- \beta_2 \frac{\partial w \left(\xi, \frac{m''}{m}, \tau \right)}{\partial \eta}, \quad (\text{II.2.6})$$

$$\gamma \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \quad (\text{II.2.7})$$

$$u(\xi, \eta, 0) = h(\xi, 0) = w(\xi, h, 0) = w_0, \quad (\text{II.2.8})$$

$$u \left(\xi, \frac{m + m' + m''}{m}, \tau \right) = w_0, \quad (\text{II.2.9})$$

$$u \left(\xi, \frac{m + m''}{m}, \tau \right) = h(\xi, \tau), \quad (\text{II.2.10})$$

$$\frac{\partial h(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial h(1, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (\text{II.2.11})$$

$$\frac{\partial h(\xi_r + 0, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial h(\xi_r - 0, \tau)}{\partial \xi} = Q^*, \quad (\text{II.2.12})$$

$$w(\xi, 0, \tau) = w_0, \quad (\text{II.2.13})$$

$$w \left(\xi, \frac{m''}{m}, \tau \right) = h(\xi, \tau). \quad (\text{II.2.14})$$

Для интегрирования системы (II.2.5) — (II.2.7) конечно-разностным методом отрезок (0,1) разобьем на n равных отрезков точками $\xi_i = i\Delta\xi$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, где $\Delta\xi$ — шаг разбиения, а отрезки $\left(0, \frac{m''}{m}\right)$ и $\left(\frac{m + m''}{m}, \frac{m + m' + m''}{m}\right)$ — на l_2 и l_1 равных отрезков соответственно точками $\eta_j = j\Delta\eta_2$, $j = 0, 1, 2, \dots, l_2$, $\eta_s = \frac{m + m' + m''}{m} - s\Delta\eta_1$, $s = 0, 1, 2, \dots, l_1$, где $\Delta\eta_2$, $\Delta\eta_1$ — равномерные шаги разбиения.

Будем считать, что $\xi_r \in \xi_i$, например, $\xi_r = \xi_q$. Введем равномерный шаг по времени $\Delta\tau$. Тогда для безразмерного временного слоя $\tau_k = k\Delta\tau$ можно записать устойчивую конечно-разностную схему:

$$\begin{aligned} h_{i,k} - h_{i,k-1} = & \theta (h_{k,i+1} - 2h_{i,k} + h_{i-1,k}) + \\ & + \frac{\Delta\tau}{2\xi_i \Delta\eta} (h_{i+1} - h_{i-1}) - \beta_1 \Delta\tau \frac{\partial u \left(\xi_i, \frac{m + m''}{m}, \tau_k \right)}{\partial \eta} - \\ & - \beta_2 \Delta\tau \frac{\partial w \left(\xi_i, \frac{m''}{m}, \tau_k \right)}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (\text{II.2.15})$$

$$u_{s, k} - u_{s, k-1} = \theta_1 (u_{s+1, k} - 2u_{s, k} + u_{s-1, k}), \quad (\text{II.2.16})$$

$$w_{j, k} - w_{j, k-1} = \theta_2 (w_{j+1, k} - 2w_{j, k} + w_{j-1, k}), \quad (\text{II.2.17})$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1; \quad s = 1, 2, \dots, l_1-1;$$

$$j = 1, 2, \dots, l_2-1;$$

$$\theta = \frac{\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2}, \quad \theta_1 = \frac{\Delta\tau}{(\Delta\eta_1)^2}, \quad \theta_2 = \frac{\Delta\tau}{(\Delta\eta_2)^2}.$$

Принимая во внимание (II.2.14) и (II.2.15), уравнения (II.2.9), (II.2.13) можно переписать так:

$$u_{i, s, k} = A_{s+1, k} u_{s+1, k} + B_{s+1, k}, \quad (\text{II.2.18})$$

$$A_{s+1, k} = \frac{Q_1}{1 + (2 - A_{s, k}) \theta_1}, \quad (\text{II.2.19})$$

$$B_{s+1, k} = \frac{u_{s, k+1} + \theta_1 B_{s, k}}{1 + (2 - A_{s, k}) \theta_1}, \quad (\text{II.2.20})$$

$$A_{1, k} = 0, \quad B_{1, k} = w_0, \quad (\text{II.2.21})$$

$$w_{j, k} = C_{j+1, k} w_{j+1, k} + D_{j+1, k}, \quad (\text{II.2.22})$$

$$C_{j+1, k} = \frac{\theta_2}{1 + (2 - C_{j, k}) \theta_2}, \quad (\text{II.2.23})$$

$$D_{j+1, k} = \frac{w_{j, k+1} + \theta_2 D_{j, k}}{1 + (2 - C_{j, k}) \theta_2}, \quad (\text{II.2.24})$$

$$C_{1, k} = 0, \quad D_{1, k} = w_0. \quad (\text{II.2.25})$$

Тогда производные $\frac{\partial H}{\partial \eta}$, $\frac{\partial w}{\partial \xi}$ в точках $\eta = \eta_{l_1}$, $\eta = \eta_{l_2}$ с точностью $O[(0\eta)^2]$ могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u \left(\xi_i, \frac{m + m''}{m}, \tau_k \right)}{\partial \eta} &= \frac{1}{2\Delta\eta_1} \left\{ [-3 + (4 - A_{l_1-1, k})] h_{l, k} + \right. \\ &\quad \left. + (4 - B_{l, l_1-1, k}) B_{l, l_2, k} - B_{l, l_1-1, k} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{II.2.26})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w \left(\xi_i, \frac{m''}{m}, \tau_k \right)}{\partial \eta} &= \frac{1}{2\Delta\eta_2} \left\{ [-3 + (4 - C_{l_2-1, k}) C_{l_2, k}] h_{l, k} + \right. \\ &\quad \left. + (4 - D_{l_2-1, k}) D_{l_2, k} - D_{l_2-1, k} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.27})$$

Уравнение (II.2.15) в силу (II.2.26), (II.2.27) и первого соотношения (II.2.11) записывается так:

$$h_{l, k} = E_{l+1, k} h_{l+1, k} + F_{l+1, k}, \quad (\text{II.2.28})$$

$$E_{i+1, k} = \frac{\theta + \frac{\Delta\tau}{2\xi_i \Delta\xi}}{1 + (2 - E_{i, k}) \theta + \frac{\Delta\tau}{2\xi_i \Delta\xi} E_i - \frac{\beta_1 \Delta\tau}{2\Delta\tau_{i1}} [(4 - A_{i-1, k}) \times \\ \times A_{i, k} - 3] - \frac{\beta_2 \Delta\tau}{2\Delta\tau_{i2}} [(4 - C_{i-1, k}) C_{i, k} - 3]} , \quad (II.2.29)$$

$$h_{i, k-1} + \theta F_i - \frac{\Delta\tau}{2\xi_i \Delta\xi} F_i + \beta_1 \frac{\Delta\tau}{2\Delta\tau_{i1}} [(4 - A_{i-1, k}) B_{i, k}] + \\ + \beta_2 \frac{\Delta\tau}{2\Delta\tau_{i2}} [(4 - C_{i-1, k}) D_{i, k} - D_{i-1, k}] \\ F_{i+1, k} = \frac{1 + (2 - E_{i, k}) \theta + \frac{\Delta\tau}{2\xi_i \Delta\xi} E_i - \frac{\beta_1 \Delta\tau}{2\Delta\tau_{i1}} [(4 - A_{i-1, k}) A_{i, k} - 3] - \\ - \frac{\beta_2 \Delta\tau}{2\Delta\tau_{i2}} [(4 - C_{i-1, k}) C_{i, k} - 3]}{1 + (2 - E_{i, k}) \theta + \frac{\Delta\tau}{2\xi_i \Delta\xi} E_i - \frac{\beta_1 \Delta\tau}{2\Delta\tau_{i1}} [(4 - A_{i-1, k}) A_{i, k} - 3] - \\ - \frac{\beta_2 \Delta\tau}{2\Delta\tau_{i2}} [(4 - C_{i-1, k}) C_{i, k} - 3]} , \quad (II.2.30)$$

$$E_{1, k} = 1, \quad F_{1, k} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q-1, q+1, \dots, n-1, \quad (II.2.31)$$

$$1 - 2\theta + 2 \frac{\Delta\tau}{\xi_{q+1} \Delta\xi} - \beta_1 \frac{\Delta\tau}{2\Delta\tau_{i1}} [(4 - A_{i-1, k}) A_{i, k} - 3] - \\ - \beta_2 \frac{\Delta\tau}{2\Delta\tau_{i2}} [(4 - C_{i-1, k}) C_{i, k} - 3] \\ E_{q+1, k} = \frac{-5\theta - \frac{7\Delta\tau}{2\xi_{q+1} \Delta\xi} + E_{q, k} (4 - E_{q-1, k}) \left(\theta + \frac{\Delta\tau}{2\xi_{q+1} \Delta\xi} \right)}{1 - 2\theta + 2 \frac{\Delta\tau}{\xi_{q+1} \Delta\xi} - \beta_1 \frac{\Delta\tau}{2\Delta\tau_{i1}} [(4 - A_{i-1, k}) A_{i, k} - 3] - \\ - \beta_2 \frac{\Delta\tau}{2\Delta\tau_{i2}} [(4 - C_{i-1, k}) C_{i, k} - 3]} , \quad (II.2.32)$$

$$- h_{q+1, k-1} - \beta_1 \frac{\Delta\tau}{2\Delta\tau_{i1}} [(4 - A_{i-1, k}) B_{i, k} - B_{i-1, k}] - \\ - \beta_2 \frac{\Delta\tau}{2\Delta\tau_{i2}} [(4 - C_{i-1, k}) D_{i, k} - D_{i-1, k}] \\ F_{q+1, k} = \frac{-5\theta - \frac{7\Delta\tau}{2\xi_{q+1} \Delta\xi} + E_{q, k} (4 - E_{q-1, k}) \left(\theta + \frac{\Delta\tau}{2\xi_{q+1} \Delta\xi} \right)}{1 - 2\theta + 2 \frac{\Delta\tau}{\xi_{q+1} \Delta\xi} - \beta_1 \frac{\Delta\tau}{2\Delta\tau_{i1}} [(4 - A_{i-1, k}) A_{i, k} - 3] - \\ - \beta_2 \frac{\Delta\tau}{2\Delta\tau_{i2}} [(4 - C_{i-1, k}) C_{i, k} - 3]} + \\ + \frac{[2\Delta\xi\theta^* + F_{q-1, k} - (4 - E_{q-1, k}) F_{q, k}] \left(\theta + \frac{\Delta\tau}{2\xi_{q+1} \Delta\xi} \right)}{-5\theta - \frac{7\Delta\tau}{2\xi_{q+1} \Delta\xi} + E_{q, k} (4 - E_{q-1, k}) \left(\theta + \frac{\Delta\tau}{2\xi_{q+1} \Delta\xi} \right)} . \quad (II.2.33)$$

Во всех формулах (II.2.15) – (II.2.33) значения $u_{s, k-1}$, $h_{i, k-1}$, $w_{j, k-1}$ считаются известными. Например, при $k=1$ это будут заданные начальные данные.

По рекуррентным формулам (II.2.19) — (II.2.21), (II.2.23) — (II.2.25), (II.2.29) — (II.2.33) последовательно вычисляются:

$$\begin{aligned} & A_{2, k, \dots}, A_{l_1, k}; B_{2, k, \dots}, B_{l_1, k}; \\ & C_{2, k, \dots}, C_{l_2, k}; D_{2, k, \dots}, D_{l_2, k}; \\ & E_{2, k, \dots}, E_{n, k}; F_{2, k, \dots}, F_{n, k}. \end{aligned}$$

Такую последовательность вычислений назовем прямой прогонкой. В силу второго условия (II.2.11) и (II.2.28) имеем

$$h_{n, k} = \frac{F_{n, k}}{1 - E_{n, k}}. \quad (\text{II.2.34})$$

Тогда из уравнения (II.2.28) и (II.2.34) можно последовательно определить $h_{n-1, k}, h_{n-2, k}, \dots, h_{1, k}, h_{0, k}$. Далее, из уравнений (II.2.18) и (II.2.22) и условий (II.2.10) и (II.2.14) последовательно вычисляются $u_{l_1, k}, u_{l_1-1, k}, \dots, u_{1, k}; w_{l_2, k}, w_{l_2-1, k}, w_{1, k}$. Эту последовательность вычислений назовем обратной прогонкой.

Следовательно, такая модификация позволяет численно решить систему уравнений (II.2.5) — (II.2.7) с начальными и краевыми условиями (II.2.8) — (II.2.14) для любого момента времени $\tau_k, k = 1, 2, \dots$.

В этой схеме численного интегрирования есть один недостаток, а именно: при разбиении отрезка $(0, 1)$ точками ξ_i в число узловых точек должна входить точка ξ_r . Поэтому в окрестности галереи будет иметь место неравномерный шаг разбиения. Этот недостаток метода можно устранить, если вместо искомой функции h ввести новую функцию:

$$v = h + Q^* \xi_r \left(\frac{\xi^2}{2} - \alpha \ln \frac{\xi}{\xi_r} \right), \quad (\text{II.2.35})$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq \xi_r \\ 1, & \xi_r \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Тогда формулы (II.2.18) — (II.2.21), (II.2.22) — (II.2.25) сохраняют силу. А вместо формул (II.2.28) — (II.2.33) будем иметь

$$v_{l, k} = M_{l+1, k} v_{l+1, k} + N_{l+1, k}, \quad (\text{II.2.36})$$

$$\begin{aligned} M_{l+1, k} = & \frac{\Delta \tau}{\theta + \frac{\Delta \tau}{2 \xi_l \Delta \eta}} \cdot \\ & \frac{1 + (2 - M_{l, k}) \theta + \frac{\Delta \tau}{2 \xi_l \Delta \xi} M_l - \beta_1 \frac{\Delta \tau}{2 \Delta \eta_1} [(4 - A_{l_1-1, k}) \times \\ & \times A_{l_1, k} - 3] - \beta_2 \frac{\Delta \tau}{2 \Delta \eta_2} [(4 - C_{l_2-1, k}) C_{l_2, k} - 3]}{1 + (2 - M_{l, k}) \theta + \frac{\Delta \tau}{2 \xi_l \Delta \xi} M_l - \beta_1 \frac{\Delta \tau}{2 \Delta \eta_1} [(4 - A_{l_1-1, k}) \times \\ & \times A_{l_1, k} - 3] - \beta_2 \frac{\Delta \tau}{2 \Delta \eta_2} [(4 - C_{l_2-1, k}) C_{l_2, k} - 3]}, \end{aligned} \quad (\text{II.2.37})$$

$$\begin{aligned}
& h_{l, k-1} + \theta N_{l, k} - \frac{\Delta \tau}{2\xi_l \Delta \xi} N_{l, k} + \beta_1 \frac{\Delta \tau}{2\Delta \xi_1} [(4 - A_{l-1, k}) \times \\
& \quad \times B_{l, k} - B_{l-1, k}] + \beta_2 \frac{\Delta \tau}{2\Delta \xi_2} [(4 - C_{l-1, k}) \times \\
& \quad \times D_{l, k} - D_{l-1, k} - 2\xi_r Q^*] \\
N_{l+1, k} = & \frac{1 + (2 - M_{l, k}) \theta + \frac{\Delta \tau}{2\xi_l \Delta \xi} M_l - \beta_1 \frac{\Delta \tau}{2\Delta \eta_1} \times \\
& \times [(4 - A_{l-1, k}) A_{l, k} - 3] - \beta_2 \frac{\Delta \tau}{2\Delta \eta_2} \times \\
& \times [(4 - C_{l-1, k}) C_{l, k} - 3]}{1 + (2 - M_{l, k}) \theta + \frac{\Delta \tau}{2\xi_l \Delta \xi} M_l - \beta_1 \frac{\Delta \tau}{2\Delta \eta_1} \times \\
& \times [(4 - A_{l-1, k}) A_{l, k} - 3] - \beta_2 \frac{\Delta \tau}{2\Delta \eta_2} \times \\
& \times [(4 - C_{l-1, k}) C_{l, k} - 3]} ,
\end{aligned} \tag{II.2.38}$$

$$M_{1, k} = 1, \quad N_{1, k} = 0. \tag{II.2.39}$$

Таким образом, по формулам (II.2.19) – (II.2.21), (II.2.23) – (II.2.25), (II.2.37) – (II.2.39) реализуется прямая прогонка.

В силу второго краевого условия (II.2.11), (II.2.35) и (II.2.36) имеем

$$v_{n, k} = \frac{N_{n, k}}{1 - M_{n, k}}. \tag{II.2.40}$$

Следовательно, по формулам (II.2.36), (II.2.18), (II.2.22), принимая во внимание (II.2.35), (II.2.9) и (II.2.14), реализуется обратная прогонка.

Очевидно, что вторая схема расчета должна быть точнее первой. Точность найденного численного решения можно проверить по балансовому уравнению, которое для данной задачи запишется так:

$$v_{cp}(\tau) = v_{cp}(0) - 2\xi_r Q^* \tau + \int_0^\tau q_1(\tau) d\tau + \int_0^\tau q_2(\tau) d\tau, \tag{II.2.41}$$

где

$$v_{cp}(\tau) = \int_0^1 \xi v(\xi, \tau) d\xi, \tag{II.2.42}$$

$$q_1(\tau) = \beta_1 \int_0^1 \xi \frac{\partial u\left(\xi, \frac{m+m''}{m}, \tau\right)}{\partial \eta} d\xi, \tag{II.2.43}$$

$$q_2(\tau) = -\beta_2 \int_0^1 \xi \frac{\partial w\left(\xi, \frac{m''}{m}, \tau\right)}{\partial \eta} d\xi, \tag{II.2.44}$$

$$\Delta v_{cp} = v_{cp}(\tau) - v_{cp}(0) + 2\xi_r Q^*(\tau) - \int_0^\tau q_1(\tau) d\tau - \int_0^\tau q_2(\tau) d\tau. \quad (\text{II.2.41a})$$

Для иллюстрации описанного выше алгоритма рассмотрим пример со следующими данными: $a_1 = a_2 = 100 \text{ м}^2/\text{сутки}$, $a = 1000000 \text{ м}^2/\text{сутки}$, $m = 100 \text{ м}$, $m' = m'' = 10 \text{ м}$, $k' = k'' = 0,01 \text{ м}/\text{сутки}$, $T = 1000 \text{ м}^2/\text{сутки}$, $\bar{Q} = Q^* \xi_r = \frac{1}{\pi}$, $R_k = 2000 \text{ м}$, $\xi_r^* = 0,3; 0,5$.

В табл. 2, 3 приводятся понижения напоров:

$$s^* = \frac{2T(H - H_0)}{Q} R_r^*$$

и даются перетоки жидкости из слоев. Точность хорошо видна при проверке по балансовому уравнению.

Прямолинейная галерея. Исследуем численный метод решения задач неустановившегося притока жидкости к галерее в трехслойном пласте. После преобразования (II.1.127) эта задача сводится к интегрированию системы уравнений (II.1.128) — (II.1.129) с начальными и краевыми условиями (II.1.130) — (II.1.134).

Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$u = \frac{H_1}{H_{\text{хар}}}, \quad h = \frac{H}{H_{\text{хар}}}, \quad w = \frac{H_2}{H_{\text{хар}}}, \quad (\text{II.2.45})$$

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{z}{m}, \quad \tau = \frac{a}{L^2} t, \quad (\text{II.2.46})$$

$$\alpha = \frac{a}{a_1} \cdot \frac{m^2}{L^2}, \quad \beta_1 = \frac{k_1 L^2}{Tm}, \quad \beta_2 = \frac{k_2 L^2}{Tm}, \quad \gamma = \frac{a}{a_2} \cdot \frac{m^2}{L^2}, \quad (\text{II.2.47})$$

$$Q^* = \frac{Q_r L}{lTH_{\text{хар}}}, \quad w_0 = \frac{H}{H_{\text{хар}}}; \quad (\text{II.2.48})$$

здесь $H_{\text{хар}}$ — некоторый характерный напор. Тогда соотношения (II.1.128) — (II.1.134) переписутся так:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad (\text{II.2.49})$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \beta_1 \frac{\partial u \left(\xi, \frac{m + m''}{m}, \tau \right)}{\partial \eta} - \beta_2 \frac{\partial w \left(\xi, \frac{m''}{m}, \tau \right)}{\partial \eta} - Q^*, \quad (\text{II.2.50})$$

$$\gamma \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \quad (\text{II.2.51})$$

Точки	Время, сутки				
	0,50	1,00	2,00	4,00	8,00

$$\xi_r^* = 0,3$$

0	0,05006	0,06989	0,08183	0,08586	0,08632
2	0,05051	0,07035	0,08226	0,08629	0,08676
4	0,05228	0,07176	0,08357	0,08759	0,08806
6	0,05509	0,07412	0,08579	0,08979	0,09025
8	0,05905	0,07746	0,08891	0,09290	0,09337
10	0,06421	0,08183	0,09301	0,09699	0,09745
12	0,07061	0,08727	0,09815	0,10210	0,10257
14	0,05371	0,06927	0,07981	0,08373	0,08420
16	0,04094	0,05533	0,06550	0,06949	0,06486
18	0,03124	0,04441	0,05420	0,05807	0,05854
20	0,02385	0,03580	0,04521	0,04905	0,04952
22	0,01821	0,02899	0,03802	0,04184	0,04230
24	0,01391	0,02361	0,03228	0,03606	0,03653
26	0,01065	0,01936	0,02769	0,03145	0,03192
28	0,00820	0,01603	0,02406	0,02780	0,02827
30	0,00638	0,01347	0,02123	0,02495	0,02541
32	0,00505	0,01153	0,01907	0,02277	0,02324
34	0,00411	0,01012	0,01749	0,02118	0,02165
36	0,00350	0,00918	0,01642	0,02010	0,02057
38	0,00315	0,00864	0,01581	0,01948	0,01994
40	0,00304	0,00846	0,01561	0,01928	0,01974

$$\xi_r^* = 0,5$$

0	0,01550	0,02763	0,03734	0,04121	0,04168
2	0,01572	0,02784	0,03755	0,04142	0,04188
4	0,01638	0,02850	0,03818	0,04205	0,04251
6	0,01749	0,02961	0,03924	0,04311	0,04357
8	0,01908	0,03118	0,04075	0,04461	0,04508
10	0,02119	0,03323	0,04273	0,04658	0,04705
12	0,02385	0,03580	0,04521	0,04905	0,04952
14	0,02712	0,03892	0,04823	0,05206	0,05253
16	0,03105	0,04264	0,05182	0,05565	0,05611
18	0,03570	0,04701	0,05606	0,05987	0,06034
20	0,04114	0,05208	0,06099	0,06479	0,06526
22	0,03223	0,04273	0,05150	0,05529	0,05575
24	0,02526	0,03528	0,04389	0,04767	0,04814
26	0,01984	0,02935	0,03783	0,04160	0,04206
28	0,01566	0,02468	0,03302	0,03679	0,03725
30	0,01249	0,02105	0,02927	0,03302	0,03349
32	0,01013	0,01829	0,02641	0,03016	0,03062
34	0,00844	0,01628	0,02432	0,02806	0,02852
36	0,00731	0,01492	0,02290	0,02663	0,02710
38	0,00668	0,01414	0,02208	0,02581	0,02628
40	0,00647	0,01389	0,02182	0,02555	0,02601

$$u(\xi, \eta, 0) = w_0, \quad (\text{II.2.52})$$

$$u\left(\xi, \frac{m+m'+m''}{m}, \tau\right) = w_0, \quad (\text{II.2.53})$$

$$u\left(\xi, \frac{m+m''}{m}, \tau\right) = h(\xi, \tau) - Q^* \left[\frac{1}{2} \xi^2 - \alpha(\xi - \xi_r) \right], \quad (\text{II.2.54})$$

$$h(\xi, 0) = w_0 + Q^* \left[\frac{1}{2} \xi^2 - \alpha(\xi - \xi_r) \right], \quad (\text{II.2.55})$$

Т а б л и ц а 3

Время, сутки	Перетоки жидкости			
	$Q\tau$	q_1	q_2	$s_{\text{ср}}$
0,5000	-0,03979	0,01105	0,01105	0,01769
1,0000	-0,07958	0,02627	0,02627	0,02705
1,5000	-0,11937	0,04347	0,04347	0,03244
2,0000	-0,15916	0,06182	0,06182	0,03555
2,5000	-0,19894	0,08082	0,08082	0,03734
3,0000	-0,23873	0,10019	0,10019	0,03838
3,5000	-0,27852	0,11979	0,11979	0,03898
4,0000	-0,31831	0,13952	0,13952	0,03932
4,5000	-0,35810	0,15931	0,15931	0,03952
5,0000	-0,39789	0,17915	0,17915	0,03964
5,5000	-0,43768	0,19902	0,19902	0,03970
6,0000	-0,47747	0,21890	0,21890	0,03974
6,5000	-0,51725	0,23878	0,23878	0,03976
7,0000	-0,55704	0,25867	0,25867	0,03978
7,5000	-0,59683	0,27857	0,27857	0,03978
8,0000	-0,63662	0,29846	0,29846	0,03979
8,5000	-0,67641	0,31836	0,31836	0,03979

$$\frac{\partial h(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial h(1, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (\text{II.2.56})$$

$$w(\xi, \eta, 0) = w_0, \quad (\text{II.2.57})$$

$$w(\xi, 0, \tau) = w_0, \quad (\text{II.2.58})$$

$$w\left(\xi, \frac{m''}{m}, \tau\right) = h(\xi, \tau) - Q^* \left[\frac{1}{2} \xi^2 - \alpha(\xi - \xi_r) \right]. \quad (\text{II.2.59})$$

Отрезок $(0, 1)$ разделим на n равных частей точками $\xi_i = i \Delta \xi$, $\Delta \xi$ — равномерный шаг. Отрезки

$$\left(\frac{m+m''}{m}, \frac{m+m'+m''}{m} \right)$$

и $\left(0, \frac{m''}{m} \right)$ разобьем на l_1 и l_2 соответственно точками

$$\eta_j = \frac{m+m'+m''}{m} - j\Delta\eta_1, \quad \eta_s = s\Delta\eta_2,$$

$\Delta\eta_1$ и $\Delta\eta_2$ — равномерные шаги. Введем равномерный шаг по времени. Тогда система уравнений (II.2.49) — (II.2.51) с начальными и краевыми условиями (II.2.52) — (II.2.59) аппроксимируется конечно-разностной схемой с точностью $O[(\Delta\xi)^2 + (\Delta\eta)^2 + \Delta\tau]$:

$$u_j = A_{j+1, k} u_{j+1} + B_{j+1, k}, \quad (\text{II.2.60})$$

$$A_{i+1, k} = \frac{1}{2 - A_{i, k} + \delta \frac{(\Delta\eta_1)^2}{\Delta\tau}}, \quad (\text{II.2.61})$$

$$B_{i+1, k} = A_{i+1, k} \left[B_{i, k} + \delta \frac{(\Delta\eta_1)^2}{\Delta\tau} u_{i, k-1} \right], \quad (\text{II.2.62})$$

$$A_{1, k} = 1, \quad B_{1, k} = 0, \quad (\text{II.2.63})$$

$$w_s = C_{s+1, k} w_{s+1} + D_{s+1, k}, \quad (\text{II.2.64})$$

$$C_{s+1, k} = \frac{1}{2 - C_{s, k} + \gamma \frac{(\Delta\eta_2)^2}{\Delta\tau}}, \quad (\text{II.2.65})$$

$$D_{s+1, k} = C_{s+1, k} \left[D_{s, k} + \gamma \frac{(\Delta\eta_2)^2}{\Delta\tau} w_{s, k-1} \right], \quad (\text{II.2.66})$$

$$C_{1, k} = 0, \quad D_{1, k} = w_0, \quad (\text{II.2.67})$$

$$h_{i, k} = E_{i+1, k} h_{i+1, k} + F_{i+1, k}, \quad (\text{II.2.68})$$

$$E_{i+1, k} = \frac{\frac{\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2}}{1 + (2 - E_{i, k}) \frac{\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2} + \frac{\beta_1}{2\Delta\xi_1} [-3 + (4 - A_{i-1, k}) A_{i, k}] + \frac{\beta_2}{2\Delta\xi_2} [-3 + (4 - C_{i-1, k}) C_{i, k}]}, \quad (\text{II.2.69})$$

$$F_{i+1, k} = \frac{(\Delta\xi)^2}{\Delta\tau} E_{i+1, k} \left\{ h_{i, k-1} + \frac{\beta_1}{2\Delta\eta_1} [(1 - A_{i-1, k}) \times \right. \\ \times B_{i, k} + B_{i-1, k}] + \frac{\beta_2}{2\Delta\eta_2} [(1 - C_{i-1, k}) D_{i, k} + D_{i-1, k}] - \\ \left. - Q^* \left[\frac{\xi_i^2}{2} - \alpha (\xi_i - \xi_r) \right] \left(\frac{\beta_1}{2\Delta\eta_1} + \frac{\beta_2}{2\Delta\eta_2} \right) + F_{i, k} \right\}, \quad (\text{II.2.70})$$

$$E_{1, k} = 1, \quad F_{1, k} = 0. \quad (\text{II.2.71})$$

По формулам (II.2.61) — (II.2.63), (II.2.65) — (II.2.67), (II.2.69) — (II.2.71) вычисляются коэффициенты прогонки.

Точки	Время, сутки				
	0,50	1,00	2,00	4,00	8,00

$$\xi_r = 0,2$$

0	0,10617	0,15443	0,18924	0,20208	0,20356
2	0,10855	0,15659	0,19130	0,20412	0,20560
4	0,11575	0,16308	0,19749	0,21028	0,21176
6	0,12787	0,17404	0,20795	0,22068	0,22216
8	0,14512	0,18966	0,22288	0,23563	0,23700
10	0,11764	0,16008	0,19245	0,20500	0,20647
12	0,09482	0,13479	0,16618	0,17861	0,18008
14	0,07600	0,11324	0,14352	0,15582	0,15729
16	0,06060	0,09494	0,12403	0,13618	0,13765
18	0,04808	0,07945	0,10730	0,11930	0,12077
20	0,03797	0,06640	0,09299	0,10484	0,10630
22	0,02988	0,05547	0,08081	0,09251	0,09397
24	0,02344	0,04638	0,07051	0,08206	0,08352
26	0,01837	0,03888	0,06187	0,07328	0,07474
28	0,01442	0,03277	0,05472	0,06600	0,06745
30	0,01139	0,02788	0,04891	0,06007	0,06152
32	0,00912	0,02406	0,04431	0,05537	0,05682
34	0,00747	0,02120	0,04083	0,05181	0,05326
36	0,00636	0,01922	0,03840	0,04932	0,05077
38	0,00572	0,01806	0,03696	0,04784	0,04929
40	0,00551	0,01767	0,03648	0,04735	0,04880

$$\xi_r = 0,5$$

0	0,02509	0,05155	0,07799	0,08984	0,09130
2	0,02586	0,05255	0,07890	0,09075	0,09222
4	0,02820	0,05526	0,08166	0,09352	0,09497
6	0,03218	0,05984	0,08633	0,09818	0,09964
8	0,03797	0,06640	0,09299	0,10484	0,10630
10	0,04577	0,07508	0,10175	0,11363	0,11509
12	0,05585	0,08606	0,11287	0,12473	0,12619
14	0,06851	0,09958	0,12649	0,13835	0,13981
16	0,08415	0,11591	0,14291	0,15477	0,15623
18	0,10317	0,13541	0,16246	0,17432	0,17578
20	0,12605	0,15846	0,18553	0,19739	0,19885
22	0,10317	0,13541	0,16246	0,17432	0,17578
24	0,08415	0,11591	0,14291	0,15473	0,15623
26	0,06851	0,09958	0,12649	0,13835	0,13981
28	0,05585	0,08606	0,11287	0,12473	0,12619
30	0,04577	0,07508	0,10178	0,11363	0,11509
32	0,03797	0,06640	0,09299	0,10484	0,10630
34	0,03218	0,05984	0,08633	0,09817	0,09964
36	0,02820	0,05526	0,08166	0,09352	0,09498
38	0,02586	0,05265	0,07890	0,09075	0,09222
40	0,02509	0,05165	0,07799	0,08984	0,09130

Обратная прогонка осуществляется так. Из второго условия (II.2.56) и (II.2.68) имеем

$$h_{n,k} = \frac{F_{n,k}}{1 - E_{n,k}}. \quad (\text{II.2.72})$$

Тогда из (II.2.68) находятся $h_{n-1,k}$, $h_{0,k}$. Далее, по формулам (II.2.60) и (II.2.64) с учетом условий (II.2.54), (II.2.59) вычисляются $u_{1,k}, \dots, u_{l,k}$, $w_{1,k}, \dots, w_{l,k}$. Таким путем последовательно для каждого $\tau_k = k \Delta \tau$ определяются напоры в трехслойном пласте.

Т а б л и ц а 5

Время, сутки	Перетоки жидкости			
	$Q\tau$	q_1	q_2	$s_{\text{ср}}$
0,5000	-0,12500	0,03471	0,03471	0,05557
1,0000	-0,25000	0,08251	0,08251	0,08496
1,5000	-0,37500	0,13654	0,13654	0,10189
2,0000	-0,50000	0,19416	0,19416	0,11166
2,5000	-0,62500	0,25383	0,25383	0,11730
3,0000	-0,75000	0,31470	0,31470	0,12055
3,5000	-0,87500	0,37626	0,37626	0,12243
4,0000	-1,00000	0,43822	0,43822	0,12351
4,5000	-1,12500	0,50040	0,50040	0,12414
5,0000	-1,25000	0,56272	0,56272	0,12450
5,5000	-1,37500	0,62511	0,62511	0,12471
6,0000	-1,50000	0,68755	0,68755	0,12483
6,5000	-1,62500	0,75001	0,75001	0,12490
7,0000	-1,75000	0,71249	0,71249	0,12494
7,5000	-1,87500	0,87494	0,87497	0,12496
8,0000	-2,00000	0,93746	0,93746	0,12498
8,5000	-2,12500	0,99996	0,99996	0,12498

Точность численных значений напоров устанавливается по балансовому уравнению, которое для данной задачи принимает вид

$$h_{\text{ср}}(\tau) = h_{\text{ср}}(0) - Q^* \tau + \int_0^{\tau} q_1(\tau) d\tau + \int_0^{\tau} q_2(\tau) d\tau,$$

где

$$h_{\text{ср}}(\tau) = \int_0^1 h(\xi, \tau) d\xi,$$

$$q_1(\tau) = \beta_1 \int_0^1 \frac{\partial u\left(\xi, \frac{m+m''}{m}, \tau\right)}{\partial \eta} d\xi,$$

$$q_2(\tau) = \beta_2 \int_0^1 \frac{\partial w \left(\xi, \frac{m}{m}, \tau \right)}{\partial \eta} d\eta.$$

Для иллюстрации предлагаемого численного алгоритма рассматривается пример с такими данными: $a_1 = a_2 = 100 \text{ м}^2/\text{сутки}$, $a = 1000000 \text{ м}^2/\text{сутки}$, $m = 100 \text{ м}$, $m' = m'' = 20 \text{ м}$, $k' = k'' = 0,01 \text{ м}^2/\text{сутки}$, $x_k = 2000 \text{ м}$, $T = 1000 \text{ м}^2/\text{сутки}$, $\xi_r = 0,2; 0,5$,

$$\overline{Q} = Q^* \frac{l}{x_k}.$$

В табл. 4, 5 приводятся понижения напоров:

$$s^* = \frac{(H - H_0)}{Q} l$$

и даются перетоки жидкости из слоев.

**О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ
К БАТАРЕЯМ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДРЕН
ВО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ НАПОРНЫХ СЛОЯХ,
СВЯЗАННЫХ СО СЛАБОПРОНИЦАЕМОЙ ПЕРЕМЫЧКОЙ**

Исследуем теперь такую задачу. Имеются два хорошо проницаемых напорных водоносных горизонта, находящихся один под другим и связанных между собой слабопроницаемой перемычкой. Будем считать, что движение в слоях происходит следующим образом: в хорошо проницаемых слоях преобладают только горизонтальные потоки, а в слабопроницаемой перемычке — только вертикальные. Такой характер движения в многослойном пласте может быть обусловлен способом эксплуатации хорошо проницаемых напорных горизонтов. Например, если напорные слои эксплуатируются совершенными вертикальными дренами, то, очевидно, можно принять, что потоки в слоях обладают описанными выше свойствами. Тогда движение воды в трехслойном пласте с учетом упругого режима в слабопроницаемом слое будет описываться системой уравнений в частных производных:

$$\mu_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_1 \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) - k \frac{\partial H(x, y, m + m'', t)}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\mu_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_2 \frac{\partial H_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_2 \frac{\partial H_2}{\partial y} \right) + k \frac{\partial H(x, y, m'', t)}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \quad (3)$$

где

$H_1, H_2, \mu_1, \mu_2, T_1, T_2$ — напор, упругая водоотдача и проводимость в хорошо проницаемых напорных слоях соответственно;

k, a, H — коэффициенты фильтрации, пьезопроводности и напора в слабопроницаемой перемычке соответственно;

z — координата по вертикали;
 x, y — координаты горизонтальной плоскости;
 t — время.

При заданных начальных и краевых условиях в произвольной многосвязной области $D(x, y)$ система уравнений (1)–(3) относится к сложным уравнениям математической физики. Насколько нам известно, эта система даже для простейших форм геометрии пласта и простых краевых условий не имеет ни точных, ни численных решений. В работах [51a, 111] М. А. Гусейн-заде и М. С. Хантуш построили точное решение о притоке жидкости в хорошо проницаемые пласты. Однако ими не был учтен упругий режим в слабопроницаемой перемычке.

В работе [43] Ф. Б. Бочевер рассмотрел некоторые задачи, связанные с перетоком жидкости в слоистом пласте.

В настоящей главе дано точное решение задачи о неустановившемся притоке жидкости к двум галереям, пробуренным отдельно в каждый из хорошо проницаемых слоев, в пласте ограниченной протяженности.

В § 1 рассмотрен неустановившийся приток жидкости к круговым галереям в пласте ограниченной протяженности круговой формы в плане, а в § 2 исследуется неустановившийся приток к прямолинейным галереям в ограниченном пласте полосообразной формы в плане. В § 3 даны численные методы решения задач, рассчитанных в §§ 1, 2. Здесь построена новая схема сквозного счета и прогонки приспособления к системе типа (1)–(3). В этой схеме сначала осуществляются две односторонние прогонки вдоль оси, и из прогоночных коэффициентов для уравнения (3) и краевых условий на кровле и подошве слабопроницаемого слоя в уравнениях (1) и (2) удается исключить H . Далее, для H_1 и H_2 применяется прогонка в горизонтальном направлении, которая, однако, отличается от известных нам прогонок, так как приходится осуществлять прогонку увязанных двух уравнений. После определения H_1 и H_2 , сделав обратную прогонку вдоль оси z , находим H . Предлагаемый алгоритм реализован на ЭВМ Минск-22.

§ 1. НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ ПРИТОК ЖИДКОСТИ К КРУГОВЫМ ГАЛЕРЕЯМ В ОГРАНИЧЕННОМ ПЛАСТЕ

Пусть в хорошо проницаемые напорные слои пробурено по одной батарее совершенных вертикальных дрен радиусами R_{r_1} и R_{r_2} соответственно. Будем считать, что трехслойный пласт ограничен в плане и имеет форму круга радиусом R_k . Положим, что скважины на батареях располо-

жены и функционируют так, что их работу можно заменить работой галереи.

Тогда в силу радиальной симметрии эта задача сведется к интегрированию системы уравнений в частных производных:

$$\frac{1}{a_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_1}{\partial r} \right) - \frac{k}{T_1} \cdot \frac{\partial H(r, m + m'', t)}{\partial z}, \quad (\text{III.1.1})$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \quad (\text{III.1.2})$$

$$\frac{1}{a_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_2}{\partial r} \right) + \frac{k}{T_2} \cdot \frac{\partial H(r, m'', t)}{\partial z} \quad (\text{III.1.3})$$

с начальными и краевыми условиями

$$H_1(r, 0) = H_2(r, 0) = H(r, z, 0) = H_0, \quad (\text{III.1.4})$$

$$\frac{\partial H_1(0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial H_1(R_k, t)}{\partial r} = 0, \quad (\text{III.1.5})$$

$$\frac{\partial H_2(0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial H_2(R_k, t)}{\partial r} = 0, \quad (\text{III.1.6})$$

$$\frac{\partial H_1(R_{r_1} + 0, t)}{\partial r} - \frac{\partial H_1(R_{r_1} - 0, t)}{\partial r} = \frac{Q_{r_1}}{2\pi T_1 R_{r_1}}, \quad (\text{III.1.7})$$

$$\frac{\partial H_2(R_{r_2} + 0, t)}{\partial r} - \frac{\partial H_2(R_{r_2} - 0, t)}{\partial r} = \frac{Q_{r_2}}{2\pi T_2 R_{r_2}}, \quad (\text{III.1.8})$$

$$H(r, m'', t), H(r, m + m'', t) = H_1(r, t), \quad (\text{III.1.9})$$

где Q_{r_j} — расход j -й галереи;

R_{r_j} — радиус j -й галереи, $j = 1, 2$.

Если вместо функции $H_j(r, t)$ ввести новую функцию

$$v(r, t) = H_1(r, t) + \frac{Q_{r_1}}{2\pi T_1} \left(\frac{r^2}{2\pi R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_{r_1}} \right), \quad (\text{III.1.10})$$

$$w(r, t) = H_2(r, t) + \frac{Q_{r_2}}{2\pi T_2} \left(\frac{r^2}{2\pi R_k^2} - \beta \ln \frac{r}{R_{r_2}} \right), \quad (\text{III.1.11})$$

где

$$\alpha = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R_{r_1} \\ 1, & R_{r_1} \leq r \leq R_k, \end{cases} \quad (\text{III.1.12})$$

$$\beta = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R_{r_2} \\ 1, & R_{r_2} \leq r \leq R_k, \end{cases} \quad (\text{III.1.13})$$

то задача (III.1.1) — (III.1.9) преобразуется к виду

$$\frac{1}{a_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{k}{T_1} \cdot \frac{\partial H(r, m + m'', t)}{\partial z} -$$

$$- \frac{Q_{r_1}}{\pi T_1 R_k^2}, \quad (\text{III.1.14})$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \quad (\text{III.1.15})$$

$$\frac{1}{a_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{k}{T_2} \cdot \frac{\partial H(r, m'', t)}{\partial z} -$$

$$- \frac{Q_{r_2}}{\pi T_2 R_k^2}, \quad (\text{III.1.16})$$

$$v(r, 0) = H_0 + \frac{Q_{r_1}}{2\pi T_1} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_{r_1}} \right), \quad (\text{III.1.17})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(0, t) = 0, \quad (\text{III.1.18})$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}(R_k, t) = 0, \quad (\text{III.1.19})$$

$$H(r, z, 0) = H_0, \quad (\text{III.1.20})$$

$$H(r, m'', t) = w - \frac{Q_{r_2}}{2\pi T_2} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \beta \ln \frac{r}{R_{r_2}} \right), \quad (\text{III.1.21})$$

$$H(r, m + m'', t) = v - \frac{Q_{r_1}}{2\pi T_1} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_{r_1}} \right), \quad (\text{III.1.22})$$

$$w(r, 0) = H_0 + \frac{Q_{r_2}}{2\pi T_2} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \beta \ln \frac{r}{R_{r_2}} \right), \quad (\text{III.1.23})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(0, t) = 0, \quad (\text{III.1.24})$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}(R_k, t) = 0. \quad (\text{III.1.25})$$

Применяя преобразование Лапласа к системе уравнений (III.1.14) — (III.1.16) с начальными и краевыми условиями (III.1.17) — (III.1.25), получаем

$$\frac{1}{a_1} [p\bar{v} - H_0 - \varphi(r)] = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}}{dr} \right) -$$

$$- \frac{k}{T_1} \cdot \frac{\partial \bar{H}(r, m + m'', p)}{\partial z} - \frac{Q_{r_1}}{\pi T_1 R_k^2 p}, \quad (\text{III.1.26})$$

$$\frac{1}{a} [p\bar{H} - H_0] = \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial z^2}, \quad (\text{III.1.27})$$

$$\frac{1}{a_2} [p\bar{w} - H_0 - \varphi(r)] = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{w}}{dr} \right) - \frac{k}{T_2} \cdot \frac{\partial \bar{H}(r, m'', p)}{\partial z} = \frac{Q_{r_1}}{\pi T_2 R_k^2 p}, \quad (\text{III.1.28})$$

$$\frac{d\bar{v}(0, p)}{dr} = 0, \quad (\text{III.1.29})$$

$$\frac{d\bar{v}(R_k, p)}{dr} = 0, \quad (\text{III.1.30})$$

$$\bar{H}(r, m'', p) = \bar{w} - \frac{\varphi_2(r)}{p}, \quad (\text{III.1.31})$$

$$\bar{H}(r, m + m'', p) = \bar{v} - \frac{\varphi_1(r)}{p}, \quad (\text{III.1.32})$$

$$\frac{d\bar{w}(0, p)}{dr} = 0, \quad (\text{III.1.33})$$

$$\frac{d\bar{w}(R_k, p)}{dr} = 0, \quad (\text{III.1.34})$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(r) &= \frac{Q_{r_1}}{2\pi T_1} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \alpha \ln \frac{r}{R_{r_1}} \right) \\ \varphi_2(r) &= \frac{Q_{r_2}}{2\pi T_2} \left(\frac{r^2}{2R_k^2} - \beta \ln \frac{r}{R_{r_2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.1.35})$$

Общее решение уравнения (III.1.27) записывается так:

$$\bar{H} = C_1(r, p) e^{\sqrt{\frac{p}{a}} z} + C_2(r, p) e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} z} + \frac{H_0}{p}. \quad (\text{III.1.36})$$

Из краевых условий (III.1.31) и (III.1.32) определяются C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} C_1(r, p) &= \\ &= \frac{\left[\bar{v} - \frac{\varphi_1(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} m''} - \left[\bar{w} - \frac{\varphi_2(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} (m+m'')}}{e^{\sqrt{\frac{p}{a}} m} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} m}}, \end{aligned} \quad (\text{III.1.37})$$

$$\begin{aligned} C_2(r, p) &= \\ &= \frac{\left[\bar{w} - \frac{\varphi_2(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] e^{\sqrt{\frac{p}{a}} (m+m'')} - \left[\bar{v} - \frac{\varphi_1(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] e^{\sqrt{\frac{p}{a}} m}}{e^{\sqrt{\frac{p}{a}} m} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} m}}. \end{aligned} \quad (\text{III.1.38})$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}(r, m'', p)}{\partial z} = \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{v} - \frac{\varphi_1(r)}{p} - \frac{H_0}{p}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \\ - \sqrt{\frac{p}{a}} \left[\bar{w} - \frac{\varphi_2(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \operatorname{cth}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right), \quad (\text{III.1.39}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(r, m + m'', p)}{\partial z} = \sqrt{\frac{p}{a}} \left[\bar{v} - \frac{\varphi_1(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \operatorname{cth}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \\ - \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{w} - \frac{\varphi_2(r)}{p} - \frac{H_0}{p}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}. \quad (\text{III.1.40}) \end{aligned}$$

Подставим (III.1.39) и (III.1.40) в уравнения (III.1.26) и (III.1.28):

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} \left[p \bar{v} - H_0 - \varphi_1(r) \right] = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d \bar{v}}{dr} \right) - \\ - \frac{k_1}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \left[\bar{v} - \frac{\varphi_1(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \operatorname{cth}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right) + \\ + \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \left[\frac{\bar{w} - \frac{\varphi_2(r)}{p} - \frac{H_0}{p}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \right] - \frac{Q_{r_1}}{\pi T_1 R_k^2 p}, \quad (\text{III.1.41}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2} \left[p \bar{w} - \varphi_2(r) - H_0 \right] = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d \bar{w}}{dr} \right) + \\ + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{v} - \frac{\varphi_1(r)}{p} - \frac{H_0}{p}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \\ - \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \left[\bar{w} - \frac{\varphi_2(r)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \operatorname{cth}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \frac{Q_{r_2}}{\pi T_2 R_k^2 p}. \quad (\text{III.1.42}) \end{aligned}$$

Обозначим

$$\omega_1^2(p) = \frac{p}{a_1} + \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{cth}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right), \quad (\text{III.1.43})$$

$$\omega_2^2(p) = \frac{p}{a_2} + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{cth}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right). \quad (\text{III.1.44})$$

Тогда (III.1.41) и (III.1.42) запишутся так:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}}{dr} \right) - \omega_1^2(p) \bar{v} + \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \frac{\bar{w}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \right)} = \\ & = \frac{Q_{r_1}}{\pi T_1 R_{\kappa}^2 p} - \left[H_0 + \varphi_1(r) \right] \frac{\omega_1^2(p)}{p} + \frac{k}{T_1 \sqrt{pa}} \cdot \frac{H_0 + \varphi_2(r)}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \right)}, \end{aligned} \quad (\text{III.1.45})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{w}}{dr} \right) - \omega_2^2(p) \bar{w} + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \frac{\bar{v}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \right)} = \\ & = \frac{Q_{r_2}}{\pi T_2 R_{\kappa}^2 p} - \left[H_0 + \varphi_2(r) \right] \frac{\omega_2^2(p)}{p} + \frac{k}{T_2 \sqrt{pa}} \cdot \frac{H_0 + \varphi_1(r)}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{III.1.46})$$

Решение уравнений (III.1.45) и (III.1.46) будем искать в виде

$$\bar{v} = \bar{v}_1(r, p) + \bar{v}_2(p), \quad (\text{III.1.47})$$

$$\bar{w} = \bar{w}_1(r, p) + \bar{w}_2(p), \quad (\text{III.1.48})$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2(p) = \frac{H_0}{p} + \frac{1}{\pi T_1 R_{\kappa}^2 p} \frac{Q_{r_1} \omega_2^2(p) + \frac{Q_{r_2} k}{T_2} \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \right)}}{\frac{k^2 p}{\pi T_2 a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \right)} - \omega_1^2(p) \omega_2^2(p)}, \end{aligned} \quad (\text{III.1.49})$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_2(p) = \frac{H_0}{p} + \frac{1}{\pi T_2 R_{\kappa}^2 p} \frac{Q_{r_2} \omega_1^2(p) + \frac{Q_{r_1} k}{T_1} \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \right)}}{\frac{k^2 p}{\pi T_1 a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \right)} - \omega_1^2(p) \omega_2^2(p)}. \end{aligned} \quad (\text{III.1.50})$$

Функции $\bar{v}_1$ и $\bar{w}_1$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}_1}{dr} \right) - \omega_1^2(p) \bar{v}_1 + \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \frac{\bar{w}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \right)} = \\ & = -\varphi_1(r) \frac{\omega_1^2(p)}{p} + \frac{k}{T_1 \sqrt{pa}} \cdot \frac{\varphi_2(r)}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{\bar{p}}{a}} \right)}, \end{aligned} \quad (\text{III.1.51})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{w}_1}{dr} \right) - \omega_2^2(p) \bar{w}_1 + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{v}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} = \\ = - \varphi_2(r) \frac{\omega_2^2(p)}{p} + \frac{k}{T_2 \sqrt{pa}} \cdot \frac{\varphi_1(r)}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} \end{aligned} \quad (\text{III.1.52})$$

и краевым условиям

$$\frac{d\bar{v}_1(0, p)}{dr} = 0, \quad (\text{III.1.53})$$

$$\frac{d\bar{v}_1(R_k, p)}{dr} = 0, \quad (\text{III.1.54})$$

$$\frac{d\bar{w}_1(0, p)}{dr} = 0, \quad (\text{III.1.55})$$

$$\frac{d\bar{w}_1(R_k, p)}{dr} = 0. \quad (\text{III.1.56})$$

Применяя к уравнениям (III.1.51) и (III.1.52) конечное преобразование Ханкеля, получаем

$$\begin{aligned} - \xi_i^{*2} \bar{v}_1 - \bar{v}_1 \omega_1^2(p) + \frac{k_1}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{w}_1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} = \\ = - \frac{\omega_1^2(p)}{p} \left\{ \frac{Q_{r_1} R_k^2}{4\pi T_1} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_{r_1}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{Q_{r_1} R_k^2}{2\pi T_1 \xi_i^2} J_0 \left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i \right) \right\} + \frac{k}{T_1 \sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} \times \\ \times \left\{ \frac{Q_{r_2} R_k^2}{4\pi T_2} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_{r_2}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{Q_{r_2} R_k^2}{2\pi T_2 \xi_i^2} J_0 \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \xi_i \right) \right\}, \quad (\text{III.1.57}) \\ - \xi_i^{*2} \bar{w}_1 - \bar{w}_1 \omega_2^2(p) + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{v}_1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} = \\ = - \frac{\omega_2^2(p)}{p} \left\{ \frac{Q_{r_2} R_k^2}{4\pi T_2} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_{r_2}} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{Q_{r_1} R_k^2}{2\pi T_2 \xi_i^2} J_0 \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \xi_i \right) \left\} + \frac{k}{T_2 \sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} \left\{ \frac{Q_{r_1} R_k^2}{4\pi T_1} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_{r_1}} \right] + \frac{Q_{r_1} R_k^2}{2\pi T_1 \xi_i^2} J_0 \left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i \right) \right\}; \quad (\text{III.1.58})$$

здесь ξ_i является корнем уравнения

$$J_1(R_k \xi_i^*) = J_1(\xi_i) = 0. \quad (\text{III.1.59})$$

При $\xi_i = 0$ имеем систему

$$- \bar{v}_1 \omega^2(p) + \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{w}_1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} = - \frac{\omega_1^2(p)}{p} \cdot \frac{Q_{r_1} R_k^2}{4\pi T_1} \times \\ \times \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_{r_1}} \right] + \\ + \frac{k}{T_1 \sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} \cdot \frac{Q_{r_2} R_k^2}{4\pi T_2} \times \\ \times \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_{r_2}} \right], \quad (\text{III.1.60}) \\ - \bar{w}_1 \omega_2^2(p) + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{v}_1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} = - \frac{\omega_2^2(p)}{p} \cdot \frac{Q_{r_2} R_k^2}{4\pi T_2} \times \\ \times \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_{r_2}} \right] + \frac{k}{T_2 \sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} \frac{Q_{r_1} R_k^2}{4\pi T_1} \times \\ \times \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_{r_1}} \right]. \quad (\text{III.1.61})$$

Решая систему (III.1.60), (III.1.61), получаем

$$\bar{v}_1 = \frac{Q_{r_1} R_k^2}{4\pi T_1 p} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_{r_1}} \right], \quad (\text{III.1.62})$$

$$\bar{w}_1 = \frac{Q_{r_2} R_k^2}{4\pi T_2 p} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_{r_2}} \right]. \quad (\text{III.1.63})$$

Теперь найдем $\bar{v}_1$ и $\bar{w}_1$ при $\xi_i \neq 0$ из следующей системы:

$$\begin{aligned}
& -\xi_i^{*2} \bar{\bar{\omega}}_1 - \bar{\bar{\omega}} \omega_2^2(p) + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \frac{\bar{\bar{v}}_1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} = \\
& = -\frac{\omega_2^2(p)}{p} \cdot \frac{Q_{r_1} R_{\kappa}^2}{2\pi T_2 \xi_i^2} J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_{\kappa}} \xi_i\right) + \\
& + \frac{k}{T_2 \sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \cdot \frac{Q_{r_1} R_{\kappa}^2}{2\pi I_1 \xi_i^2} J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_{\kappa}} \xi_i\right), \quad (\text{III.1.64})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\xi_i^{*2} + \omega_1^2(p)\right) \bar{\bar{v}} + \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{\bar{\omega}}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} = \\
& = -\frac{\omega_1^2(p)}{p} \cdot \frac{Q_{r_1} R_{\kappa}^2}{2\pi T_1 \xi_i^2} J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_{\kappa}} \xi_i\right) + \\
& + \frac{k}{T_1 \sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \cdot \frac{Q_{r_1} R_{\kappa}^2}{2\pi T_2 \xi_i^2} J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_{\kappa}} \xi_i\right), \quad (\text{III.1.65})
\end{aligned}$$

решая которые получаем

$$\begin{aligned}
& \bar{\bar{v}}_1 = \frac{Q_{r_1} R_{\kappa}^2}{2\pi T_1 p} \cdot \frac{J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_{\kappa}} \xi_i\right)}{\xi_i^2} + \\
& + \frac{Q_{r_1}}{2\pi T_1 p} \cdot \frac{\left[\xi_i^{*2} + \omega_2^2(p)\right] J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_{\kappa}} \xi_i\right)}{\frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \left(\xi_i^{*2} + \omega_1^2\right) \left(\xi_i^2 + \omega_2^2\right)} + \\
& + \frac{Q_{r_1} k}{2\pi T_1 T_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \times \\
& \times \frac{J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_{\kappa}} \xi_i\right)}{\frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \left(\xi_i^{*2} + \omega_1^2\right) \left(\xi_i^{*2} + \omega_2^2\right)}, \quad (\text{III.1.66}) \\
& \bar{\bar{\omega}}_1 = \frac{Q_{r_1} R_{\kappa}^2}{2\pi T_2 \xi_i^2 p} J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_{\kappa}} \xi_i\right) + \frac{Q_{r_1}}{2\pi T_2 p} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{[\xi_i^{*2} + \omega_1^2(p)] J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i\right)}{\frac{k}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - (\xi_i^{*2} + \omega_1^2)(\xi_i^{*2} + \omega_2^2)} + \\
& + \frac{Q_{r_1} k}{2\pi T_1 T_2} \cdot \frac{1}{V p a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \times \\
& \times \frac{J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i\right)}{\frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - (\xi_i^{*2} + \omega_1^2)(\xi_i^{*2} + \omega_2^2)}. \quad (\text{III.1.67})
\end{aligned}$$

Применив теперь формулу обращения преобразования Ханкеля с учетом (III.1.49), (III.1.50), (III.1.62), (III.1.63), (III.1.66), (III.1.67), будем иметь

$$\begin{aligned}
\bar{v}(\tau, p) &= \frac{H_0}{p} + \frac{1}{\pi R_k^2 p T_1} \times \\
& \times \frac{Q_{r_1} \omega_2^2(p) + \frac{Q_{r_1} k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}}{\frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \omega_1^2(p) \omega_2^2(p)} + \\
& + \frac{Q_{r_1}}{2\pi T_1 p} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_{r_1}} \right] + \\
& + \frac{Q_{r_1}}{\pi T_1 p} \sum_j \frac{J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i\right)}{\xi_i^2} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} + \\
& + \frac{Q_{r_1}}{\pi T_1 R_k^2 p} [\xi_i^{*2} + \omega_2^2(p)] J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i\right) + \\
& + \frac{Q_{r_1} k}{\pi T_1 T_2 R_k^2} \cdot \frac{1}{V p a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i\right) \\
& + \sum_i \frac{\frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - (\xi_i^{*2} + \omega_1^2(p))(\xi_i^{*2} + \omega_2^2(p))}{\operatorname{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \times
\end{aligned}$$

$$\times \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)}; \quad (\text{III.1.68})$$

$$\begin{aligned} \bar{w}(\tau, p) = & \frac{H_0}{p} + \frac{1}{\pi R_k^2 p T_2} \times \\ & \times \frac{Q_{r_1} \omega_1^2(p) + \frac{Q_{r_1} k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\text{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}}{\frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\text{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \omega_1^2(p) \omega_2^2(p)} + \\ & + \frac{Q_{r_2}}{2\pi T_2 p} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \right)^2 - \ln \frac{R_k}{R_{r_2}} \right] + \\ & + \frac{Q_{r_2}}{\pi T_2 p} \sum_i \frac{J_0\left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \xi_i\right)}{\xi_i^2} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} + \\ & + \frac{Q_{r_2}}{T_2 p} \left[\xi_i^{*2} + \omega_1^2(p) \right] J_0\left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \xi_i\right) + \\ & + \frac{Q_{r_1} k}{T_1 T_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\text{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i\right) \\ & + \frac{1}{\pi R_k^2} \sum_i \frac{\frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\text{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - (\xi_i^{*2} + \omega_1^2(p))(\xi_i^{*2} + \omega_2^2(p))}{\times} \\ & \times \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)}. \quad (\text{III.1.69}) \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношение (II.3.58), формулы (III.1.68) и (III.1.69) записываем в виде

$$\bar{v} = \frac{H_0 + \varphi_1(r)}{p} + \frac{1}{\pi R_k^2 p T_1} \cdot \frac{Q_{r_1} \omega_2^2(p) + \frac{Q_{r_1}}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\text{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}}{\frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\text{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \omega_1^2 \omega_2^2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi R_K^2} \sum_i \frac{\frac{Q_{r_1}}{T_1 p} \left[\xi_i^{*2} - \omega_2^2(p) \right] J_0 \left(\frac{R_{r_1}}{R_K} \xi_i \right) + \frac{Q_r k}{T_1 T_2 \sqrt{pa}} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{R_{r_2}}{R_K} \xi_i \right)}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}}{\frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - (\xi_i^{*2} + \omega_1^2) (\xi_i^{*2} + \omega_2^2)} \times \\
& \quad \times \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)}; \quad (\text{III.1.70})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} &= \frac{H_0 + \varphi_2(\tau)}{p} + \frac{1}{\pi R_K^2 p T_2} \cdot \frac{\frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - \omega_1^2 \omega_2^2}{\frac{Q_{r_1} \omega_1^2 + \frac{Q_{r_1} k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} + \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}} + \\
& \quad \frac{\frac{Q_{r_1}}{T_2 p} \left[\xi_i^{*2} + \omega_1^2(p) \right] J_0 \left(\frac{R_{r_2}}{R_K} \xi_i \right) + \frac{Q_{r_1} k}{T_1 T_2 \sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} J_0 \left(\frac{R_{r_1}}{R_K} \xi_i \right)}{+ \frac{1}{\pi R_K^2} \sum_i \frac{\frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - (\xi_i^{*2} + \omega_1^2) (\xi_i^{*2} + \omega_2^2)}{\times} \\
& \quad \times \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_K} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)}. \quad (\text{III.1.71})
\end{aligned}$$

Имея в виду (III.1.43) и (III.1.44), после преобразований можем записать

$$\begin{aligned}
& \frac{k^2 p}{T_1 T_2 a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - \omega_1^2 \omega_2^2 = -p \left[\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{k}{a_1 T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{cth} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{k}{T_1 a_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{cth} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right].
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& \frac{Q_{r_1} \omega_1^2(p) + \frac{Q_{r_1} k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}}{\frac{1}{\pi R_K^2 p T_2} \cdot \frac{\frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - \omega_1^2 \omega_2^2}} =
\end{aligned}$$

$$= - \frac{Q_{r_2} \left[\frac{p}{a} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{T_1 m} \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \frac{Q_{r_1} k}{T_1}}{\left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{a}} m} + \frac{k}{a_1 T_2 m} \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{k}{a_2 T_1 m} \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} \times$$

$$\times \left(- \frac{1}{\pi R_K^2 T_2 p^2} \right).$$

Это выражение есть отношение полиномов. Далее, в точке $p=0$ имеется полюс второго порядка и бесчисленное множество полюсов, определяемых из уравнения

$$\left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{a_1 T_2 m} \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{k}{a_2 T_1 m} \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) = 0. \quad (\text{III.1.72})$$

Корни этого уравнения лежат на отрицательной части действительной оси. Поэтому, подставляя $p = -\theta$ ($\theta > 0$) в (III.1.72), получаем

$$-\frac{\theta}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \cdot \frac{\sin \left(m \sqrt{\frac{\theta}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{\theta}{a}}} + \left(\frac{k}{a_1 T_2 m} + \frac{k}{a_2 T_1 m} \right) \cos \left(m \sqrt{\frac{\theta}{a}} \right) = 0,$$

или

$$\sqrt{\frac{\theta}{a}} m \operatorname{ctg} \left(m \sqrt{\frac{\theta}{a}} \right) = \frac{m}{a} \cdot \frac{\theta T_1 T_2 a - k^2 a_1 a_2}{k (a_1 T_2 - a_2 T_1)}. \quad (\text{III.1.73})$$

Положим

$$\tau_1(p) = \left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{a_1 T_2 m} \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) +$$

$$+ \frac{k}{a_2 T_1 m} \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right). \quad (\text{III.1.74})$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma(p)}{dp} &= \frac{1}{a_1 a_2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \times \\ &\times \left[\frac{\operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{2p} - \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{2p m \sqrt{\frac{p}{a}}} \right] + \\ &+ \frac{k}{2a_1 T_2 \sqrt{pa}} \operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{k}{2a_2 T_1 \sqrt{pa}} \operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right), \\ \left. \frac{d\gamma(p)}{dp} \right|_{p=-\theta_j} &= \frac{\sin \left(m \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \right)}{2m \sqrt{\frac{\theta_j}{a}}} \left\{ \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a T_1 T_2 \theta_j} \left[k^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{m (\theta_j T_1 T_2 a - k^2 a_1 a_2)^2}{k (a_1 T_2 + a_2 T_1) a a_1 a_2} \right] + \frac{m}{a} \left[\frac{k}{a_1 T_2} + \frac{k}{a_2 T_1} \right] \right\}. \quad (\text{III.1.75}) \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\psi(\theta_j) = \left. \frac{d\gamma(p)}{dp} \right|_{p=-\theta_j}. \quad (\text{III.1.76})$$

Теперь можно записать

$$\begin{aligned} &Q_{r_1} \omega_1^2(p) + \frac{Q_{r_1} k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} = \\ &= \frac{1}{\pi R_K^2 T p} \cdot \frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - \omega_1^2 \omega^2 = \\ &= - \frac{1}{\pi R_K^2 T_2} \times \\ &\times \sum_j \frac{Q_{r_2} \left[\frac{k}{T_1 m} \cos \left(m \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \right) - \frac{\sqrt{\theta_j}}{a_1 m} \sin \left(m \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \right) \right] + \frac{Q_{r_1} k}{T_1 m}}{\theta_j^2 \psi(\theta_j)} \times \\ &\times e^{-\theta_j t} + \frac{1}{\pi R_K^2} \left\{ A_2 Q_{r_1} - B_2 Q_{r_2} - k (Q_{r_1} + Q_{r_2}) C_2 t \right\}, \quad (\text{III.1.77}) \end{aligned}$$

где

$$A_2 = \frac{k}{T_1 T_2} \cdot \frac{\frac{1}{ma_1 a_2} + \frac{k^2 m}{6a^2 T_1 T_2} + \frac{k}{2a} \left(\frac{1}{a_1 T} + \frac{1}{a_2 T_1} \right)}{k^2 \left(\frac{k}{a T_1 T_2} + \frac{1}{a_1 m T_2} + \frac{1}{a_2 m T_1} \right)^2}, \quad (\text{III.1.78})$$

$$B_2 = \frac{k}{T_2^2} \cdot \frac{\left[\frac{1}{a_1^2 m} + \frac{k}{a} \left(\frac{1}{a_1 T_1} + \frac{km}{3a_1 T_1^2} \right) \right]}{k^2 \left(\frac{k}{T_1 T_2 a} + \frac{1}{a_1 m T_2} + \frac{1}{a_2 T_1 m} \right)^2}, \quad (\text{III.1.79})$$

$$C_2 = \frac{1}{k T_1 T_2 m} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k}{T_1 T_2 a} + \frac{1}{a_1 T_2 m} + \frac{1}{a_2 T_1 m} \right)}. \quad (\text{III.1.80})$$

В формуле (III.1.71) дробь, стоящую под знаком суммы, преобразуем так, чтобы она представляла собой отношение двух обобщенных полиномов. Опуская выкладки, запишем окончательную формулу:

$$\begin{aligned} & \frac{Q_{r_2}}{T_2 p} \left[\xi_i^{*2} + \omega_1^2(p) \right] J_0 \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \xi_i \right) + \frac{Q_{r_1} k}{T_1 T_2 \sqrt{pa}} \cdot \frac{J_0 \left(\frac{R_r}{R_k} i \right)}{\text{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} \times \\ & \frac{1}{\pi R_k^2} \sum_i \frac{\frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\text{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - (\xi_i^{*2} + \omega_1^2) (\xi_i^{*2} + \omega_2^2)}{\times} \\ & \times \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)} = - \frac{1}{\pi R_k^4 p} \sum_i \Omega, \quad (\text{III.1.81}) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega = & \left\{ \frac{Q_{r_2}}{T_2} \left[\left(\xi_i^2 + R_k^2 \frac{p}{a} \right) \frac{\text{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k R_k^2}{m T_1} \text{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times J_0 \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \xi_i \right) \right] + \frac{Q_{r_1} k R_k^2}{T_1 T_2 m} J_0 \left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i \right) \right\} \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(i)}, \\ \omega = & p \left[\left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{a_1 T_1 T_2} \right) \frac{\text{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{a_2 T_1} + \frac{1}{a_1 T_2} \right) \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \Bigg] + \\
& + \frac{\xi_i^4}{R_k^4} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{\xi_i^2}{R_k^2} \left[p \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \right. \\
& \left. + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right].
\end{aligned}$$

Это выражение в точке $p = 0$ имеет вычет, равный

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\pi} \sum_j \frac{\frac{Q_{r_2}}{T_2} \left(\xi_i^2 + \frac{k}{T_1} \cdot \frac{R_k^2}{m} \right) J_0 \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \xi_i \right) + \frac{Q_{r_1} k R_k^2}{T_1 T_2 m} J_0 \left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i \right)}{\xi_i^2 \left[\xi_i^2 + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \frac{k}{m} R_k^2 \right]} \times \\
& \times \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_i \right)}{J_0^2(\xi_i)}. \quad (\text{III.1.82})
\end{aligned}$$

Далее, выражение (III.1.81) имеет бесчисленное множество полюсов $p = -\sigma$, где σ являются корнями уравнения

$$\begin{aligned}
& \xi_i^4 - R_k^2 \sigma \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \xi_i^2 - R_k^4 \sigma \left(\frac{k^2}{T_1 T_2 a} - \frac{\sigma}{a_1 a_2} \right) + \\
& + R_k^2 \left[\left(\frac{1}{a_1 T_2} + \frac{1}{a_2 T_1} \right) k R_k^2 + \xi_i^2 k \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \right] \sqrt{\frac{\sigma}{a}} \operatorname{ctg} \left(m \sqrt{\frac{\sigma}{a}} \right) = \\
& = 0, \sigma > 0. \quad (\text{III.1.83})
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\eta(p) = p \left[\left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \right. \\
\left. + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{a_1 T_2} + \frac{1}{a_2 T_1} \right) \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\xi_i^4}{R_k^4} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} \right] +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\xi_i^2}{R_K^2} \left[p \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \right. \\ \left. + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]. \quad (\text{III.1.84})$$

Тогда

$$\frac{d\eta(p)}{dp} \Big|_{p=-\sigma_v} = \left\{ \frac{\xi_i^4}{2\sigma_v} + \xi_i^2 \frac{R_K^2}{2} \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{mk}{a} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{R_K^4}{2} \left[\frac{3\sigma_v}{a_1 a_2} + \frac{\sigma_v mk}{a} \left(\frac{1}{a_1 T_2} + \frac{1}{a_2 T_1} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{k^2 R_K^4}{T_1 T_2 a} \right\} \times \\ \times \frac{\sin \left(m \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}}} - \left[\frac{\xi_i}{2\sigma_v} + \frac{R_K^4 \sigma_v}{2a_1 a_2} - \frac{\xi_i^2 R_K^2}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{k^2 R_K^4}{2T_1 T_2 a} + \frac{R_K^4 k}{m} \left(\frac{1}{a_1 T_2} + \frac{1}{a_2 T_1} \right) \right] \cos \left(m \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} \right), \quad (\text{III.1.85})$$

где $\sigma_v > 0$ — корни уравнения (III.1.83).

Введем обозначения:

$$\chi(\xi_i, \sigma_v) = \frac{d\eta(p)}{dp} \Big|_{p=-\sigma_v}, \quad (\text{III.1.86})$$

$$\delta_2(\xi_i, \theta_v) = \left(\xi_i^2 - R_K^2 \frac{\sigma_v}{a_1} \right) \frac{\sin \left(m \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} \right)}{\sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} m} + \\ + \frac{k R_K^2}{m T_1} \cos \left(m \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} \right), \quad (\text{III.1.87})$$

$$\gamma_2(\theta_j) = \frac{k}{m T_1} \cos \left(m \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \right) - \frac{V a \theta_j}{m a_1} \sin \left(m \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \right). \quad (\text{III.1.88})$$

Тогда оригинал $\bar{w}$ можно записать так:

$$w(r, t) = H_0 + \varphi_2(r) - \frac{1}{\pi R_K^2 T_2} \sum_j \frac{Q_{r_2} \gamma_2(\theta_j) + \frac{Q_{r_1} k}{m T_1}}{\theta_j^2 \psi(\theta_j)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{-\theta_j t} + \frac{1}{\pi R_k^2} \left\{ A_2 \theta_{r_1} - B_2 \theta_{r_2} - k (\theta_{r_1} + \theta_{r_2}) c_2 t \right\} - \\
& - \frac{1}{\pi T_2} \sum_j \frac{Q_{r_2} \left(\xi_l^2 + \frac{k}{T_1} \cdot \frac{R_k^2}{m} \right) J_0 \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \xi_l \right) + \frac{Q_{r_2} k R_k^2}{m T_1} J_0 \left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_l \right)}{\xi_l^2 \left[\xi_l^2 + k \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \frac{R_k^2}{m} \right]} \times \\
& \quad \times \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)} + \\
& + \frac{1}{\pi T_2} \sum_v \sum_l \frac{Q_{r_2} \delta_2(\xi_l, \sigma_v) J_0 \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \xi_l \right) + \frac{Q_{r_2} k R_k^2}{m T_1} J_0 \left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_l \right)}{\sigma_v \chi(\xi_l, \sigma_v)} \times \\
& \quad \times \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)} e^{-\sigma_v t}. \tag{III.1.89}
\end{aligned}$$

Аналогично можно получить оригинал $\bar{v}$:

$$\begin{aligned}
\bar{v}(r, t) = H_0 + \varphi_1(r) - \frac{1}{\pi R_k^2 T_1} \sum_l \frac{Q_{r_1} \gamma_1(\theta_j) + \frac{k}{m} \cdot \frac{Q_{r_2}}{T_2}}{\theta_j^2 \psi(\theta_j)} e^{-\theta_j t} + \\
+ \frac{1}{\pi R_k^2} \left\{ A_1 Q_{r_2} - B_1 Q_{r_1} - k (Q_{r_1} + Q_{r_2}) c_2 t \right\} - \\
- \frac{1}{\pi T_1} \sum_l \frac{Q_{r_1} \left(\xi_l^2 + \frac{k}{T_2} \cdot \frac{R_k^2}{m} \right) J_0 \left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_l \right) + \frac{Q_{r_1} k R_k^2}{m T_2} J_0 \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \xi_l \right)}{\xi_l^2 \left[\xi_l^2 + k \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \frac{R_k^2}{m} \right]} \times \\
\quad \times \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)} + \\
+ \frac{1}{\pi T_1} \sum_v \sum_l \frac{Q_{r_1} \delta_1(\xi_l, \sigma_v) J_0 \left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_l \right) + \frac{Q_{r_1} k R_k^2}{m T_2} J_0 \left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \xi_l \right)}{\sigma_v \chi(\xi_l, \sigma_v)} \times \\
\quad \times \frac{J_0 \left(\frac{r}{R_k} \xi_l \right)}{J_0^2(\xi_l)} e^{-\sigma_v t}, \tag{III.1.90}
\end{aligned}$$

где

$$\gamma_1(\theta_j) = \frac{k}{mT_2} \cos\left(m \sqrt{\frac{\theta_j}{a}}\right) - \frac{\sqrt{a\theta_j}}{a_2 m} \sin\left(m \sqrt{\frac{\theta_j}{a}}\right), \quad (\text{III.1.91})$$

$$A_1 = \frac{k}{T_1 T_2} \cdot \frac{\frac{1}{a_1 a_2 m} + \frac{k}{2aT_2} \left(\frac{km}{3aT_1} + \frac{1}{a_1}\right) + \frac{k}{2a a_2 T}}{k^2 \left(\frac{k}{T_1 T_2 a} + \frac{1}{a_1 T_2 m} + \frac{1}{a_2 T_1 m}\right)^2}, \quad (\text{III.1.92})$$

$$B_1 = \frac{k}{T_1^2} \cdot \frac{\frac{1}{ma_2^2} + \frac{k}{aT_2} \left(\frac{km}{3aT_2} + \frac{1}{a_2}\right)}{k^2 \left(\frac{k}{aT_1 T_2} + \frac{1}{a_1 T_2 m} + \frac{1}{a_2 T_1 m}\right)^2}, \quad (\text{III.1.93})$$

$$\begin{aligned} \delta_1(\xi_i, \sigma_v) = & \left(\xi_i^2 - R_k^2 \frac{\sigma_v}{a_2} \right) \frac{\sin\left(m \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}}\right)}{m \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}}} + \\ & + \frac{kR_k^2}{T_2 m} \cos\left(\sqrt{\frac{\sigma_v}{a}}\right). \end{aligned} \quad (\text{III.1.94})$$

Из формул (III.1.89) и (III.1.90) следует, что напоры $H_1(r, t)$ и $H_2(r, t)$ в хорошо проницаемых пластах окончательно будут иметь вид

$$\begin{aligned} H_1(r, t) = & H_0 - \frac{1}{\pi R_k^2 T_1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Q_{r_1} \gamma_1(\theta_j) + \frac{k\theta_{r_1}}{mT_2}}{\theta_j^2 \psi(\theta_j)} e^{-\theta_j t} + \\ & + \frac{1}{\pi R_k^2} \left\{ A_1 \theta_{r_1} - B_1 \theta_{r_1} - k(\theta_{r_1} + \theta_{r_2}) c_2 t \right\} - \\ & - \frac{1}{\pi T_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_{r_1} \left(\xi_i^2 + \frac{k}{T_2} \cdot \frac{R_k^2}{m} \right) J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i\right) + \frac{Q_{r_1} k R_k^2}{m T_2} J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i\right)}{\xi_i^2 \left[\xi_i^2 + k \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \frac{R_k^2}{m} \right]} \times \\ & \times \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} + \frac{1}{\pi T_1} \times \\ & \times \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_{r_1} \delta_1(\xi_i, \sigma_v) J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i\right) + \frac{k R_k^2 Q_{r_1}}{m T_2} J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i\right)}{\sigma_v \chi(\xi_i, \sigma_v)} \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2\left(\xi_i\right)} e^{-\sigma_v t}, \quad (\text{III.1.95})$$

$$\begin{aligned} H_2(r, t) = & H_0 - \frac{1}{\pi R_k^2 T_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Q_{r_2} \gamma_2(\theta_j) + \frac{k Q_{r_1}}{m T_1}}{\theta_j^2 \psi(\theta_j)} e^{-\theta_j t} + \\ & + \frac{1}{\pi R_k^2} \left\{ A_2 \theta_{r_1} - B_2 \theta_{r_2} - k (Q_{r_1} + Q_{r_2}) c_2 t \right\} - \\ & - \frac{1}{\pi T_2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_{r_1} \left(\xi_i^2 + \frac{k}{T_1} \cdot \frac{R_k^2}{m} \right) J_0\left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \xi_i\right) + \frac{Q_{r_1} k R_k^2}{m T_1} J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i\right)}{\xi_i^2 \left[\xi_i^2 + k \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \frac{R_k^2}{m} \right]} \times \\ & \times \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2\left(\xi_i\right)} + \frac{1}{\pi T_2} \times \\ & \times \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_{r_2} \delta_2(\xi_i, \sigma_v) J_0\left(\frac{R_{r_2}}{R_k} \xi_i\right) + \frac{Q_{r_1} k R_k^2}{m T_1} J_0\left(\frac{R_{r_1}}{R_k} \xi_i\right)}{\sigma_v \chi(\xi_i, \sigma_v)} \times \\ & \times \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2\left(\xi_i\right)} e^{-\sigma_v t}. \quad (\text{III.1.96}) \end{aligned}$$

Напор в слабопроницаемом слое можно определить непосредственно из уравнения (III.1.2) при известных $H_1(r, t)$ и $H_2(r, t)$.

Сделаем замену функции

$$H(r, z, t) = H_2(r, t) + \frac{z - m''}{m} \left[H_1(r, t) - H_2(r, t) \right] + u(r, z, t). \quad (\text{III.1.97})$$

Тогда уравнение (III.1.2) примет вид

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{m + m'' - z}{m} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{z - m''}{m} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial t}. \quad (\text{III.1.98})$$

Начальное и краевые условия для $u(r, z, t)$ в силу (III.1.4) и (III.1.9) будут

$$u(r, z, 0) = 0, \quad (\text{III.1.99})$$

$$u(r, m'', t) = 0, \quad (\text{III.1.100})$$

$$u(r, m + m'', t) = 0. \quad (\text{III.1.101})$$

Решение неоднородного уравнения (III.1.98) с однородными начальными и краевыми условиями (III.1.99), (III.1.100), (III.1.101) известно. Это решение имеет вид

$$u(r, z, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \exp \left[-a \left(\frac{n\pi}{m} \right)^2 (t - \tau) \right] \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{n\pi}{m} (z - m'') \left[(-1)^n \frac{\partial H_1(r, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial H_2(r, \tau)}{\partial \tau} \right] \right\} d\tau.$$

Таким образом, окончательно напор в слабопроницаемом слое запишем так:

$$H(r, z, t) = \frac{m + m'' - z}{m} H_2(r, t) + \frac{z - m''}{m} H_1(r, t) + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \exp \left[-a \left(\frac{n\pi}{m} \right)^2 (t - \tau) \right] \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{n\pi}{m} (z - m'') \left[(-1)^n \frac{\partial H_1(r, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial H_2(r, \tau)}{\partial \tau} \right] \right\} d\tau. \quad (\text{III.1.102})$$

§ 2. О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ГАЛЕРЕЕ

Пусть в рассматриваемый в этой главе трехслойный пласт, ограниченный, полосообразный в плане, пробурены два ряда (цепочек) из n и s скважин, пробуренных отдельно в хорошо проницаемые слои. Положим, что в каждой цепочке скважины работы производятся с одинаковыми расходами, а расстояния между скважинами постоянны. Тогда приток к цепочке скважин будет равносителен работе прямолинейных галерей. Поэтому задача о неустановившемся притоке жидкости к галереям в трехслойном пласте будет сформулирована следующим образом.

Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{a_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} - \frac{k}{T_1} \cdot \frac{\partial H(x, m + m'', t)}{\partial z}, \quad (\text{III.2.1})$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \quad (\text{III.2.2})$$

$$\frac{1}{a_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} + \frac{k}{T_2} \cdot \frac{\partial H(x, m'', t)}{\partial z} \quad (\text{III.2.3})$$

при следующих начальных и краевых условиях:

$$H_1(z, 0) = H(x, z, 0) = H_2(x, t) = H_0, \quad (\text{III.2.4})$$

$$\frac{\partial H_i(0, t)}{\partial x} = 0, \quad (\text{III.2.5})$$

$$\frac{\partial H_i(L, t)}{\partial x} = 0, \quad (\text{III.2.6})$$

$$\frac{\partial H_i(L_{r1} + 0, t)}{\partial x} - \frac{\partial H_i(L_{r1} - 0, t)}{\partial x} = \frac{Q_{r1}}{T_1} i, \quad i = 1, 2, \quad (\text{III.2.7})$$

$$H(x, m'', t) = H_2(x, t), \quad (\text{III.2.8})$$

$$H(x, m + m'', t) = H_1(x, t), \quad (\text{III.2.9})$$

где l — ширина, L — протяженность пласта, L_{r1} и L_{r2} — положение галерей в первом и втором водоносном слоях, Q_{r1} и Q_{r2} — расходы галерей. Все, что отмечено индексом 1, относится к первому основному водоносному слою, а индексом 2 — ко второму. Остальные обозначения, входящие в рассматриваемые системы уравнений, начальные и краевые условия совпадают с обозначениями § 1 настоящей главы.

Напоры $H_i(x, t)$ будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} H_i(x, t) &= v_i(x, t) + \frac{Q_{ri}}{IT_i} \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_i(x - L_{ri}) \right] \\ \alpha_i &= \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L_{ri} \\ 1, & L_{ri} \leq x \leq L \end{cases} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.2.10})$$

Тогда задача (III.2.1) — (III.2.9) переписывается так:

$$\frac{1}{a_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{k}{T_1} \frac{\partial H(x, m + m'', t)}{\partial z} - \frac{Q_{r1}}{lIT_1}, \quad (\text{III.2.11})$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \quad (\text{III.2.12})$$

$$\frac{1}{a_2} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{k}{T_2} \cdot \frac{\partial H(x, m'', t)}{\partial z} - \frac{Q_{r2}}{lIT_2}, \quad (\text{III.2.13})$$

$$H(x, y, z) = H_0, \quad (\text{III.2.14})$$

$$v_1(0, x) = H_0 + \frac{Q_{r1}}{IT_1} \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_1(x - L_{r1}) \right], \quad (\text{III.2.15})$$

$$v_2(x, 0) = H_0 + \frac{Q_{r2}}{IT_2} \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_2(x - L_{r2}) \right], \quad (\text{III.2.16})$$

$$\frac{\partial v_i(0, t)}{\partial x} = 0, \quad (\text{III.2.17})$$

$$\frac{\partial v_i(L, t)}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{III.2.18})$$

$$H(x, m + m'', t) = v_1 - \frac{Q_{r1}}{iT_1} \left[\frac{x^2}{2L} - a_1(x - L_{r1}) \right], \quad (\text{III.2.19})$$

$$H(x, m'', t) = v_2 - \frac{Q_{r2}}{iT_2} \left[\frac{x^2}{2L} - a_2(x - L_{r2}) \right]. \quad (\text{III.2.20})$$

Применяя к системе (III.2.11) — (III.2.20) преобразование Лапласа, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} \left[p\bar{v}_1 - H_0 - \varphi_1(x) \right] &= \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x^2} - \frac{k}{T_1} \cdot \frac{\partial H(x, m + m'', p)}{\partial z} - \\ &- \frac{Q_{r1}}{iT_1 L p}, \end{aligned} \quad (\text{III.2.21})$$

$$\frac{1}{a} (p\bar{H} - H_0) = \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial z^2}, \quad (\text{III.2.22})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2} \left(p\bar{v}_2 - H_0 - \varphi_2(x) \right) &= \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x^2} - \frac{k}{T_2} \cdot \frac{\partial H(x, m'', p)}{\partial z} - \\ &- \frac{Q_{r2}}{iT_2 L p}, \end{aligned} \quad (\text{III.2.23})$$

где

$$\varphi_1(x) = \frac{Q_{r1}}{iT_1} \left[\frac{x^2}{2L} - a_1(x - L_{r1}) \right],$$

$$\varphi_2(x) = \frac{Q_{r2}}{iT_2} \left[\frac{x^2}{2L} - a_2(x - L_{r2}) \right].$$

Краевые условия после применения преобразования Лапласа запишутся так:

$$\bar{H}(x, m + m'', p) = \bar{v}_1 - \frac{\varphi_1(x)}{p}, \quad (\text{III.2.24})$$

$$\bar{H}(x, m'', p) = \bar{v}_2 - \frac{\varphi_2(x)}{p}, \quad (\text{III.2.25})$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i(0, p)}{\partial x} = 0, \quad (\text{III.2.26})$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i(L, p)}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (\text{III.2.27})$$

Решение уравнения (III.2.22) есть

$$\bar{H} = C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}} z} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} z} + \frac{H_0}{p}. \quad (\text{III.2.28})$$

Из краевых условий (III.2.24), (III.2.25) будут определены C_1 и C_2 , которые примут вид

$$C_1 = \frac{\left[\bar{v}_1 - \frac{\varphi_1(x)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} m''} - \left[\bar{v}_2 - \frac{\varphi_2(x)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} (m+m'')}}{e^{\sqrt{\frac{p}{a}} m} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} m}},$$

$$C_2 = \frac{\left[\bar{v}_2 - \frac{\varphi_2(x)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] e^{\sqrt{\frac{p}{a}} (m+m'')} - \left[\bar{v}_1 - \frac{\varphi_1(x)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] e^{\sqrt{\frac{p}{a}} m}}{e^{\sqrt{\frac{p}{a}} m} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} m}}.$$

Таким образом, решение (III.2.28) после подстановки C_1, C_2 окончательно запишется так:

$$\bar{H} = - \left[\bar{v}_1 - \frac{\varphi_1(x)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \frac{\operatorname{sh} \left\{ (m'' - z) \sqrt{\frac{p}{a}} \right\}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} +$$

$$+ \left[\bar{v}_2 - \frac{\varphi_2(x)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \frac{\operatorname{sh} \left\{ (m + m'' - z) \sqrt{\frac{p}{a}} \right\}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} + \frac{H_0}{p}. \quad (\text{III.2.29})$$

Из (III.2.29) найдем

$$\frac{\partial \bar{H}(x, m'', p)}{\partial z} = \left[\bar{v}_1 - \frac{\varphi_1(x)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} -$$

$$- \left[\bar{v}_2 - \frac{\varphi_2(x)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{cth} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right), \quad (\text{III.2.30})$$

$$\frac{\partial \bar{H}(x, m + m'', p)}{\partial z} = \left[\bar{v}_1 - \frac{\varphi_1(x)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{cth} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) -$$

$$- \left[\bar{v}_2 - \frac{\varphi_2(x)}{p} - \frac{H_0}{p} \right] \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}. \quad (\text{III.2.31})$$

Подставляя (III.2.30) и (III.2.31) в уравнения (III.2.21) и (III.2.23), получаем

$$\frac{d^2 \bar{v}_1}{dx^2} - \omega_1^2(p) \bar{v}_1 - \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{v}_2}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} =$$

$$= \left[H_0 + \varphi_1(x) \right] \frac{\omega_1^2(p)}{p} + \frac{k}{T_1} \cdot \frac{H_0 + \varphi_2(x)}{p} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} +$$

$$+ \frac{Q_1}{iT_1 L p}, \quad (\text{III.2.32})$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_2}{dx^2} - \omega_2^2(p) \bar{v}_2 + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{v}_1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} =$$

$$= \left[H_0 + \varphi_2(x) \right] \frac{\omega_2^2(p)}{p} + \frac{k}{T_2} \cdot \frac{H_0 + \varphi_1(x)}{p} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} +$$

$$+ \frac{Q_2}{iT_2 L p}, \quad (\text{III.2.33})$$

где

$$\omega_1^2(p) = \frac{p}{a_1} + \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{cth}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right), \quad (\text{III.2.34})$$

$$\omega_2^2(p) = \frac{p}{a_2} + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{cth}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right). \quad (\text{III.2.35})$$

Решения уравнений (III.2.32) и (III.2.33) будем искать в виде

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_1^{(1)}(x, p) + \bar{v}_1^{(2)}(p), \quad (\text{III.2.36})$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_2^{(1)}(x, p) + \bar{v}_2^{(2)}(p); \quad (\text{III.2.37})$$

здесь $\bar{v}_1^{(2)}(p)$ и $\bar{v}_2^{(2)}(p)$ — частные решения системы (III.2.32), (III.2.33), определяемые из уравнений

$$- \omega_1^2(p) \bar{v}_1^{(2)} + \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{v}_2^{(2)}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} =$$

$$= -H_0 \frac{\omega_1^2(p)}{p} + \frac{kH_0}{pT_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} + \frac{Q_{r1}}{iT_1 L p},$$

$$- \omega_2^2(p) \bar{v}_2^{(2)} + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{v}_1^{(2)}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} =$$

$$= -H_0 \frac{\omega_2^2(p)}{p} + \frac{kH_0}{pT_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} + \frac{Q_{r2}}{iT_2 L p}.$$

Решая эту алгебраическую систему уравнений, получаем

$$\bar{v}_1^{(2)}(p) = \frac{H_0}{p} + \frac{1}{iT_1 L p} \cdot \frac{Q_{r1} \omega_2^2(p) + \frac{Q_{r2} k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}}{\frac{k^2 p}{T_1 T_2 a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \omega_1^2(p) \omega_2^2(p)}, \quad (\text{III.2.38})$$

$$\bar{v}_2^{(2)}(p) = \frac{H_0}{p} + \frac{1}{iT_2 L p} \cdot \frac{Q_{r2} \omega_1^2(p) + \frac{Q_{r1} k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}}{\frac{k p}{T_1 T_2 a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \omega_1^2(p) \omega_2^2(p)}. \quad (\text{III.2.39})$$

Далее, $\bar{v}_1^{(1)}$ и $\bar{v}_2^{(1)}$ являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \bar{v}_1^{(1)}}{dx^2} - \omega_1^2(p) \bar{v}_1^{(1)} + \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{v}_2^{(1)}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} = \\ & = -\varphi_1(x) \frac{\omega_1^2(p)}{p} + \frac{k}{T_1} \cdot \frac{\varphi_2(x)}{p} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}, \quad (\text{III.2.40}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \bar{v}_2^{(1)}}{dx^2} - \omega_2^2(p) \bar{v}_2^{(1)} + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\bar{v}_1^{(1)}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} = \\ & = -\varphi_2(x) \frac{\omega_2^2(p)}{p} + \frac{k}{T_2} \cdot \frac{\varphi_1(x)}{p} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \quad (\text{III.2.41}) \end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$\frac{d\bar{v}_i^{(1)}(0, p)}{dx} = 0, \quad (\text{III.2.42})$$

$$\frac{d\bar{v}_i^{(1)}(L, p)}{dx} = 0. \quad (\text{III.2.43})$$

Применим к системе уравнений (III.2.40), (III.2.41) с краевыми условиями (III.2.42), (III.2.43) косинус-преобразование Фурье:

$$\tilde{f}(n) = \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Тогда при $n \neq 0$ получим

$$\begin{aligned}
 & -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \tilde{v}_1^{(1)} - \tilde{v}_1^{(1)} \omega_1^2(p) + \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\tilde{v}_2^{(1)}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} = \\
 & = \frac{\omega_1^2(p)}{p} \cdot \frac{Q_{r1}}{iT_1} \int_0^L \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_1(x - L_{r1}) \right] \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \\
 & + \frac{k}{T_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \cdot \frac{Q_{r2}}{iT_2} \int_0^L \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_2(x - L_{r2}) \right] \times \\
 & \quad \times \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \tag{III.2.44}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \tilde{v}_2^{(1)} - \omega_2^2(p) \tilde{v}_2^{(1)} + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\tilde{v}_1^{(1)}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} = \\
 & = -\frac{\omega_2^2(p)}{p} \cdot \frac{Q_{r2}}{iT_2} \int_0^L \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_2(x - L_{r2}) \right] \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \\
 & + \frac{k}{T_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \cdot \frac{Q_{r1}}{iT_1} \int_0^L \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_1(x - L_{r1}) \right] \times \\
 & \quad \times \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \tag{III.2.45}
 \end{aligned}$$

Вычислим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_1(x - L_{r1}) \right] \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \\
 & = \frac{1}{2L} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi x}{L} dx - \int_{L_{r1}}^L (x - L_{r1}) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \\
 & = \frac{L^2}{n^2 \pi^2} (-1)^n - \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \left[(-1)^n - \cos \frac{n\pi}{L} L_{r1} \right] = \\
 & = \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi}{L} L_{r1},
 \end{aligned}$$

аналогично —

$$\int_0^L \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_2(x - L_{r2}) \right] \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L}.$$

Подставляя значения этих интегралов в (III.2.44) и (III.2.45), находим

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_1^2(p) \right] \frac{\tilde{v}_1^{(1)}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} + \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\tilde{v}_2^{(1)}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} = \\
& = - \frac{\omega_1^2(p)}{p} \cdot \frac{Q_{r1}}{iT_1} \cdot \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} + \frac{k}{T_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{pa}} \times \\
& \quad \times \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} \cdot \frac{Q_{r2}}{iT_2} \cdot \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L}, \\
& \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\tilde{v}_1^{(1)}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_2^2(p) \right] \frac{\tilde{v}_2^{(1)}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} = \\
& = - \frac{\omega_2^2(p)}{p} \cdot \frac{Q_{r2}}{iT_2} \cdot \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L} + \\
& + \frac{k}{T_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} \cdot \frac{Q_{r1}}{iT_1} \cdot \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L}.
\end{aligned}$$

Решая эту алгебраическую систему, находим $\tilde{v}_1^{(1)}$ и $\tilde{v}_2^{(1)}$ при $\neq 0$:

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_1^{(1)} &= \frac{Q_{r1}}{iT_1 p} \cdot \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} + \\
& + \frac{Q_{r1} \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_2^2(p) \right] \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} + \frac{Q_{r1}}{iT_1 p} \cdot \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi L_{r1}}{L}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}}{ \frac{k^2 p}{T_1 T_2 a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_1^2(p) \right] \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_2^2(p) \right] }, \\
\end{aligned} \tag{III.2.46}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_2^{(1)} &= \frac{Q_{r2}}{T_1 T_2 a} \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} + \\
& + \frac{Q_{r2} \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_2^2(p) \right] \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} + \frac{Q_{r1}}{iT_1 p} \cdot \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi L_{r1}}{L}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}}{ \frac{k^2 p}{T_1 T_2 a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_2^2(p) \right] \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_1^2(p) \right] }. \\
\end{aligned} \tag{III.2.47}$$

При $n = 0$ получим

$$\begin{aligned}
& -\omega_1^2(p) \tilde{v}_1^{(1)} + \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\tilde{v}_2^{(1)}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} = \\
& = -\frac{\omega_1^2(p)}{p} \cdot \frac{Q_{r1}}{iT_1} \int_0^L \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_1(x - L_{r1}) \right] dx + \\
& + \frac{k}{T_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \cdot \frac{Q_{r2}}{iT_2} \int_0^L \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_2(x - L_{r2}) \right] dx, \\
& -\omega_2^2(p) \tilde{v}_2^{(1)} + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\tilde{v}_1^{(1)}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} = \\
& = -\frac{\omega_2^2(p)}{p} \cdot \frac{Q_{r2}}{iT_2} \int_0^L \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_2(x - L_{r2}) \right] dx + \\
& + \frac{k}{T_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \cdot \frac{Q_{r1}}{iT_1} \int_0^L \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_1(x - L_{r1}) \right] dx,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\int_0^L \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_1(x - L_{r1}) \right] dx &= \frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_{r1})^2}{2}, \\
\int_0^L \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_2(x - L_{r2}) \right] dx &= \frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_{r2})^2}{2}.
\end{aligned}$$

Поэтому можно записать

$$\begin{aligned}
& -\omega_1^2(p) \tilde{v}_1^{(1)} + \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\tilde{v}_2^{(1)}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} = \\
& = \frac{Q_{r1}}{iT_1} \left[\frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_{r2})^2}{2} \right] \frac{\omega_1^2(p)}{p} + \frac{Q_{r2}}{iT_2} \left[\frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_{r1})^2}{2} \right] \frac{k}{T_1} \times \\
& \quad \times \frac{1}{\sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}, \\
& -\omega_2^2(p) \tilde{v}_2^{(1)} + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\tilde{v}_1^{(1)}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{Q_{r2}}{iT_2} \left[\frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_{r1})^2}{2} \right] \frac{\omega_2^2(p)}{p} + \frac{Q_{r1}}{iT_1} \left[\frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_{r1})^2}{2} \right] \frac{k}{T_2} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{pa}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}.$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим $\tilde{v}_1^{(1)}$ и $\tilde{v}_2^{(1)}$ при $n = 0$:

$$\tilde{v}_1^{(1)} = \frac{Q_{r1}}{iT_1 p} \left[\frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_{r1})^2}{2} \right], \quad (\text{III.2.48})$$

$$\tilde{v}_2^{(1)} = \frac{Q_{r2}}{iT_2 p} \left[\frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_{r2})^2}{2} \right]. \quad (\text{III.2.49})$$

Применяя формулу обращения косинус-преобразования, в силу соотношений (III.2.46) — (III.2.49) имеем

$$\bar{v}_1^{(1)} = \frac{Q_{r1}}{iT_1 L p} \left[\frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_{r1})^2}{2} \right] + \\ + \frac{2Q_{r1} L}{iT_1 \pi^2 p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{2}{iT_1 L p} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{r1} \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_2^2(p) \right] \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} + \frac{Q_{r2} k}{T^2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi L_{r2}}{L}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}}{\frac{k^2 p}{T_1 T_2 a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_1^2(p) \right] \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \omega_2^2(p) \right]} \times \\ \times \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (\text{III.2.50})$$

$$\bar{v}_2^{(1)} = \frac{Q_{r2}}{iT_2 L p} \left[\frac{L^2}{6} - \frac{(L - L_{r2})^2}{2} \right] + \frac{2Q_{r2} L}{iT_2 \pi^2 p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L} \times \\ \times \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{2}{iT_2 L p} \sum_{n=1}^{\infty} \times \\ \times \frac{Q_{r2} \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_1^2(p) \right] \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L} + \frac{Q_{r1} k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi L_{r1}}{L}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}}{\frac{k^2 p}{T_1 T_2 a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_1^2(p) \right] \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_2^2(p) \right]} \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (\text{III.2.51})$$

Принимая во внимание (III.2.36) — (III.2.39), (III.2.50), (III.2.51), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \bar{v}_1(x, p) = & \frac{H_0}{p} + \frac{1}{iT_1 L p} \cdot \frac{Q_{r1} \omega_2^2(p) + \frac{Q_{r2} k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}} + \\ & + \frac{Q_{r1}}{2iT_1 p L} \left[\frac{L^2}{3} - (L - L_{r1})^2 \right] + \frac{2Q_{r1}}{iT_1 \pi^2} \cdot \frac{L}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} + \\ & + \frac{2}{iT_1 L p} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{r1} \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_2^2(p) \right] \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} + \frac{Q_{r2} k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi L_{r2}}{L}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}}}{\frac{k^2 p}{T_1 T_2 a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \omega_1^2(p) \right] \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_2^2(p) \right]} \times \\ & \times \cos \frac{n\pi x}{L}, \end{aligned} \quad (\text{III.2.52})$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2(x, p) = & \frac{H_0}{p} + \frac{1}{iT_2 L p} \cdot \frac{Q_{r2} \omega_1^2(p) + \frac{Q_{r1} k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}} + \\ & + \frac{Q_{r2}}{2iT_2 L p} \left[\frac{L^2}{3} - (L - L_{r2})^2 \right] + \frac{2Q_{r2}}{iT_2 \pi^2} \cdot \frac{L}{p} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{2}{iT_2 L p} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{r2} \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_1^2(p) \right] \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L} + \frac{Q_{r1} k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi L_{r1}}{L}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}}}{\frac{k^2 p}{T_1 T_2 a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_1^2(p) \right] \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_2^2(p) \right]} \times \\ & \times \cos \frac{n\pi x}{L}. \end{aligned} \quad (\text{III.2.53})$$

Если воспользоваться предельным соотношением $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0)$, где $f(x) \rightarrow F(v)$, то из формул (III.2.52) и (III.2.53) будем иметь

$$H_0 + \frac{Q_{r1}}{lT_1} \left[\frac{x^2}{2L} - \alpha_1 (x - L_{r1}) \right] = H_0 + \frac{Q_{r1}}{2lT_1L} \left[\frac{L^2}{3} - (L - L_{r1})^2 \right] + \\ + \frac{2Q_{r1}}{lT_1} \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

откуда следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} = \frac{\pi^2}{2L} \left\{ \frac{x^2}{2L} - \alpha_1 (x - L_{r1}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2L} \left[\frac{L^2}{3} - (L - L_{r1})^2 \right] \right\}. \quad (\text{III.2.54})$$

Аналогично получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} = \frac{\pi^2}{2L} \left\{ \frac{x^2}{2L} - \alpha_2 (x - L_{r2}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2L} \left[\frac{L^2}{3} - (L - L_{r1})^2 \right] \right\}. \quad (\text{III.2.54}')$$

Пользуясь формулами (III.2.54) и (III.2.54'), соотношения (III.2.52) и (III.2.53) можно переписать так:

$$\bar{v}_1(x, p) = \frac{H_0 + \varphi_1(x)}{p} + \frac{1}{lT_1Lp} \cdot \frac{k^2p}{T_1T_2a} \cdot \frac{1}{\text{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - \frac{Q_{r1} \omega_2^2(p) + \frac{Q_{r2}k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\text{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}}{1 - \omega_1^2(p) \omega_2^2(p)} + \\ + \frac{2}{lT_1Lp} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{r1} \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \omega_2^2(p) \right) \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} + \frac{Q_{r2}k}{T_2} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi L_{r2}}{L}}{\text{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}}{\frac{k^2p}{T_1T_2a} \cdot \frac{1}{\text{sh}^2 \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - \left[\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \omega_1^2(p) \right] \left[\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \omega_2^2(p) \right]} \times \\ \times \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (\text{III.2.55})$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2(x, p) = & \frac{H_0 + \varphi_2(x)}{p} + \frac{1}{iT_2 L p} \cdot \frac{Q_{r2} \omega_1^2(p) + \frac{Q_{r1} k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}} + \\ & + \frac{2}{iT_2 L p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{r2} \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_1^2(p) \right] \cos \frac{n \pi L_{r2}}{L} + \frac{Q_{r1} k}{T_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \frac{\cos \frac{n \pi L_{r1}}{L}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}}{\frac{k^2 p}{T_1 T_2 a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_1^2(p) \right] \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_2^2(p) \right]} \times \\ & \times \cos \frac{n \pi x}{L}. \end{aligned} \quad (\text{III.2.56})$$

В силу соотношений (III.2.34), (III.2.35) имеем

$$\begin{aligned} \omega_1^2(p) \omega_2^2(p) = & \frac{p^2}{a_1 a_2} + \frac{k^2 p}{T_1 T_2 a} + \frac{k^2 p}{T_1 T_2 a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} + \\ & + k \left[\frac{1}{T_2 a_1} + \frac{1}{T_1 a_2} \right] p \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{cth} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{k^2 p}{T_1 T_2 a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \omega_1^2(p) \omega_2^2(p) = \\ = & -p \left\{ \frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} + k \left[\frac{1}{T_2 a_1} + \frac{1}{T_1 a_2} \right] \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{cth} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right\} = \\ = & -p \frac{m \sqrt{\frac{p}{a}}}{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \left\{ \left[\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right] \frac{\operatorname{sh}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \right. \\ & \left. + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \operatorname{ch}\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.2.57})$$

Далее,

$$\left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_1^2(p) \right] \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_2^2(p) \right] = \frac{n^4 \pi^4}{L^4} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2 \omega_2^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 & \frac{k^2}{T_1 T_2} \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(m \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_1^2 \right] \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \omega_2^2 \right] = \\
 & = - \left\{ \frac{n^4 \pi^4}{L^4} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left[p \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + k \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{cth} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] + p \left[\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} + k \left(\frac{1}{T_2 a_1} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{T_1 a_2} \right) \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{cth} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \right\} = \\
 & = - \frac{m \sqrt{\frac{p}{a}}}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} \left\{ \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left[p \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] + \right. \\
 & \left. + p \left[\left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \right\}. \quad (\text{III.2.58})
 \end{aligned}$$

Формулы (III.2.55) и (III.2.56) с учетом (III.2.57) и (III.2.58) перепишутся так:

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_1(x, p) &= \frac{H_0 + \varphi_1(x)}{p} - \frac{1}{iT_1 L p^2} \times \\
 & \times \frac{Q_{r1} \left[\frac{p}{a_2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{m T_2} \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] + \frac{k Q_{r2}}{T_2 m}}{\left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ Q_{r1} \left[\left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{p}{a_2} \right) \frac{\text{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{T_2 m} \text{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \times \right. \\
& \times \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} + \frac{k Q_{r2}}{T_2 m} \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L} \left. \right\} \cos \frac{n\pi x}{L} \\
& - \frac{2}{l T_1 L p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{n^4 \pi^4}{L^4} + p \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) + p \left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \right] \times}{\left[\frac{n^4 \pi^4}{L^4} + p \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) + p \left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \right] \times} \\
& \times \frac{\text{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \left[\frac{n^2 \pi^2 k}{m L^2} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{p k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \right] \text{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \quad (\text{III.2.59})
\end{aligned}$$

$$\bar{v}_2(x, p) = \frac{H_0 + \varphi_2(x)}{p} - \frac{1}{l T_2 L p^2} \times$$

$$\begin{aligned}
& Q_{r2} \left[\frac{p}{a_1} \cdot \frac{\text{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{m T_1} \text{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] + \frac{Q_{r1} k}{T_1 m} \\
& \times \frac{2}{l T_2 L p} \times \frac{\left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \frac{\text{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \text{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\left[\frac{n^4 \pi^4}{L^4} + p \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) + p \left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \right] \times} \\
& \left\{ Q_{r2} \left[\left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{p}{a_1} \right) \frac{\text{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{T_1 m} \text{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \times \right. \\
& \times \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L} + \frac{k Q_{r1}}{T_1 m} \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} \left. \right\} \cos \frac{n\pi x}{L} \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{n^4 \pi^4}{L^4} + p \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) + p \left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \right] \frac{\text{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} +}{\left[\frac{n^4 \pi^4}{L^4} + p \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) + p \left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \right] \times} \\
& + \left[\frac{k n^2 \pi^2}{L^2 m} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + \frac{p k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \right] \text{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \quad (\text{III.2.60})
\end{aligned}$$

Исследуем теперь отношение

$$F(p) = \frac{Q_{r1} \left[\frac{p}{a_2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{mT_2} \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] + \frac{kQ_{r2}}{T_2 m}}{p^2 \left[\left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]}. \quad (\text{III.2.61})$$

Это выражение представляет собой отношение двух обобщенных полиномов. Корнями знаменателя являются $p=0$ (двукратный корень) и бесчисленное множество корней, лежащих в отрицательной части действительной оси, определяемых из уравнения

$$\left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) = 0. \quad (\text{III.2.62})$$

Заметим, что среди корней уравнения (III.2.62) нет корня $p=0$. Полагая $p = -\theta$, уравнение (III.2.62) можно переписать так:

$$-\frac{\theta}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \sqrt{\frac{\theta}{a}} \operatorname{ctg} \left(m \sqrt{\frac{\theta}{a}} \right) = 0, \quad (\text{III.2.63})$$

где $\theta > 0$.

Таким образом, для нахождения оригинала $F(p)$ можно применить теорему разложения.

Вычислим

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \cdot \frac{\left\{ Q_{r1} \left[\frac{p}{a_2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{mT_2} \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] + \frac{Q_{r2} k}{T_2 m} \right\} e^{pt}}{\left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} =$$

$$= \tilde{A}_1 (Q_{r1} + Q_{r2}) kt + \tilde{B}_1 Q_{r1} - \tilde{C}_1 Q_{r2}, \quad (\text{III.2.64})$$

где

$$\tilde{A}_1 = \frac{1}{T_2 m \left[\frac{k^2}{T_1 T_2 a} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \right]}, \quad (\text{III.2.65})$$

$$\tilde{B}_1 = \frac{\frac{k}{a_1 a_2 T_2} + \frac{1}{ma_2^2} + \frac{mk^2}{3a^2 T_2^2}}{kT_1 \left[\frac{k}{aT_1 T_2} + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \right]^2}, \quad (\text{III.2.66})$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{\frac{1}{ma_1 a_2} + \frac{k}{2a} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) + \frac{mk^2}{6a^2 T_1 T_2}}{kT_2 \left[\frac{k}{aT_1 T_2} + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \right]^2}. \quad (\text{III.2.67})$$

Далее вычислим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \left[\left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \frac{\text{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \text{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] = \\ = \frac{\text{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} \left\{ \frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{2p} \left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) + \frac{mk}{2a} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{m}{2p} \left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \sqrt{\frac{p}{a}} \text{cth} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right\}. \quad (\text{III.2.68}) \end{aligned}$$

Теперь в силу формул (III.2.64) и (III.2.68) и теоремы разложения можем записать оригинал соотношения (III.2.61):

$$\begin{aligned} F(p) \rightarrow \tilde{A}(Q_{r1} + Q_{r2})kt + \tilde{B}_1 Q_{r1} - \tilde{C}_1 Q_{r2} + \\ \left\{ Q_{r1} \left[-\frac{\theta_j}{a_2} - \frac{\frac{k^2}{T_1 T_2 a} - \frac{\theta_j}{a_1 a_2}}{T_2 \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{\theta_j}{T_2 a_1} \right)} \right] + \frac{Q_{r2} k}{T_2} \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\sin \left(m \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \right)} \right\} e^{-\theta_j t} \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta_j^2 \left[\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{2\theta_j} \left(\frac{k^2}{T_1 T_2 a} - \frac{\theta_j}{a_1 a_2} \right) + \frac{mk}{2a} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) - \right. \\ \left. - \frac{m}{2\theta_j} \left(\frac{k^2}{T_1 T_2 a} - \frac{\theta_j}{a_1 a_2} \right) \right] \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \text{ctg} \left(m \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \right)}{(\text{III.2.69})} \end{aligned}$$

здесь $\theta_j > 0$ — корни уравнения (III.2.63).

Аналогично для соотношения

$$G(p) = \frac{Q_{r2} \left[\frac{p}{a_1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{mT_1} \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] + \frac{Q_{r1}k}{T_1m}}{\left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}$$

можно найти оригинал в виде

$$\begin{aligned} G(p) \rightarrow & \tilde{A}_2(Q_{r1} + Q_{r2})kt + \tilde{B}_2 Q_{r2} - \tilde{C}_2 Q_{r1} + \\ & \left\{ Q_{r2} \left[-\frac{\theta_j}{a_1} - \frac{\frac{k^2}{T_1 T_2 a} - \frac{\theta_j}{a_1 a_2}}{T_1 \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right)} \right] + \frac{Q_{r1}k}{T_1} \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \right)} \right\} e^{-\theta_j t} \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta_j^2 \left[\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{2\theta_j} \left(\frac{k^2}{T_1 T_2 a} - \frac{\theta_j}{a_1 a_2} \right) + \frac{mk}{2a} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{m}{2\theta_j} \left(\frac{k^2}{T_1 T_2 a} - \frac{\theta_j}{a_1 a_2} \right) \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \operatorname{ctg} \left(m \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \right) \right]}{\theta_j^2 \left[\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{2\theta_j} \left(\frac{k^2}{T_1 T_2 a} - \frac{\theta_j}{a_1 a_2} \right) + \frac{mk}{2a} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{m}{2\theta_j} \left(\frac{k^2}{T_1 T_2 a} - \frac{\theta_j}{a_1 a_2} \right) \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \operatorname{ctg} \left(m \sqrt{\frac{\theta_j}{a}} \right) \right]} \end{aligned} \quad (\text{III.2.70})$$

где $\theta_j > 0$ — корни уравнения (III.2.63),

$$\tilde{A}_2 = \frac{1}{T_1 m k \left[\frac{k}{T_1 T_2 a} + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \right]}, \quad (\text{III.2.71})$$

$$\tilde{B}_2 = \frac{\frac{k}{a_2 a_1 T_1} + \frac{1}{ma_1^2} + \frac{mk^2}{3a^2 T^2}}{kT_2 \left[\frac{k}{aT_1 T_2} + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \right]^2}, \quad (\text{III.2.72})$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{\frac{1}{ma_1 a_2} + \frac{k}{2a} \left(\frac{1}{a_2 T_1} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) + \frac{mk^2}{6a^2 T_2 T_2}}{kT_1 \left[\frac{k}{aT_1 T_2} + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \right]^2}. \quad (\text{III.2.73})$$

Рассмотрим теперь выражение

$$Q_{r1} \left[\left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{p}{a^2} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{T_2 m} \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \times \\ \times \cos \frac{n \pi L_{r1}}{L} + \frac{Q_{r2} k}{T_2 m} \cos \frac{n \pi L_{r2}}{L} \\ R_1(p) = \frac{p \left[\frac{n^4 \pi^4}{L^4} + p \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) + p \left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \right] \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \\ + \left[\frac{n^2 \pi^2 k}{m L^2} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + \frac{p k}{m} \left[\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right] \right] \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{.} \quad (\text{III.2.74})$$

Это выражение также является соотношением двух обобщенных полиномов относительно p . Поэтому для нахождения оригинала (III.2.74) можно применить теорему разложения. Для этого понадобятся корни знаменателя (III.2.74), т. е. уравнения

$$\left[\frac{n^4 \pi^4}{L^4} + p \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) + p \left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \right] \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \\ + \left[\frac{n^2 \pi^2 k}{L^2 m} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + \frac{k p}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \right] \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) = 0. \quad (\text{III.2.75})$$

Уравнение (III.2.75) имеет бесчисленное множество корней, лежащих в отрицательной части действительной оси. Очевидно, что $p = 0$ не является корнем этого уравнения.

Полагая $p = -\sigma$, $\sigma > 0$, получаем

$$\sqrt{\frac{\sigma}{a}} \operatorname{ctg} \left(m \sqrt{\frac{\sigma}{a}} \right) = - \frac{\frac{n^4 \pi^4}{L^4} - \frac{\sigma n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + \sigma \left(\frac{\sigma}{a_1 a_2} - \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right)}{\frac{n^2 \pi^2 k}{L^2} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) - \sigma k \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right)}. \quad (\text{III.2.76})$$

Вычислим

$$\frac{d}{dp} \left\{ \left[\frac{n^4 \pi^4}{L^4} + p \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) + p \left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \left[\frac{n^2 \pi^2 k}{m L^2} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \right] \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \Bigg\} = \left[\frac{n^2 \pi^2}{2L^2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{a_1 a_2} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{a T_1 T_2} - \frac{n^4 \pi^4}{2p L^4} \right] \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \left[\frac{n^4 \pi^4}{2p L^4} + \frac{n^2 \pi^2}{2L^2} \times \right. \\
& \times \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) + \\
& \left. + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \right] \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right).
\end{aligned}$$

Теперь можно получить оригинал (III.2.74):

$$\begin{aligned}
R_1(p) \rightarrow & \frac{Q_{r1} \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{k}{m T_2} \right) \cos \frac{n \pi L_{r1}}{L} + \frac{Q_{r2} k}{m T_2} \cos \frac{n \pi L_{r2}}{L}}{\frac{n^4 \pi^4}{L^4} + \frac{n^2 \pi^2 k}{m L^2} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)} - \\
& \left\{ Q_{r1} \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \frac{\sigma_v}{a_2} + \frac{k}{T_2} \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} \operatorname{ctg} \left(m \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} \right) \right] \times \right. \\
& \times \cos \frac{n \pi L_{r1}}{L} + \frac{Q_{r2} k}{T_2} \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} \frac{\cos \frac{n \pi L_{r2}}{L}}{\sin \left(m \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} \right)} \Bigg\} e^{-\sigma_v t} \\
- \sum_{v=1}^{\infty} & \frac{\left\{ \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) - 3 \frac{\sigma_v}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{a T_1 T_2} + \frac{n^4 \pi^4}{\sigma_v L^4} \right] + \right. \\
& + \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{n^2 \pi^2}{\sigma_v L^2} \right) + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} + \frac{2k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \frac{\sigma_v}{a_1 a_2} \right] \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} m \operatorname{ctg} \left(m \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} \right) \Bigg\}}{2 \sigma_v} \quad (\text{III.2.77})
\end{aligned}$$

Аналогично найдем оригинал соотношения

$$\begin{aligned}
R_2(p) = & \frac{Q_{r2} \left[\left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{p}{a} \right) \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{k}{T_1 m} \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \times}{\times \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L} + \frac{Q_{r1} k}{T_1 m} \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L}} \rightarrow \\
& p \left\{ \left[\frac{n^4 \pi^4}{L^4} + p \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) + p \left(\frac{p}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} \right) \right] \frac{\operatorname{sh} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{m \sqrt{\frac{p}{a}}} + \right. \\
& \left. + \left[\frac{n^2 \pi^2}{m L^2} k \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + p \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{a_1 T_2} \right) \right] \operatorname{ch} \left(m \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right\} \\
& \rightarrow \frac{Q_{r2} \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{k}{m T_1} \right) \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L} + \frac{Q_{r1} k}{m T_1} \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L}}{\frac{n^4 \pi^4}{L^4} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2 m} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)} - \\
& \left\{ Q_{r2} \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \frac{\sigma_v}{a_1} + \frac{k}{T_1} \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} \operatorname{ctg} \left(m \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} \right) \right] \times \right. \\
& \left. \times \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L} + \frac{Q_{r1} k}{T_1} \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi L_{r1}}{L}}{\sin \left(m \sqrt{\frac{p_v}{a}} \right)} \right\} e^{-\sigma_v t} \\
& - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2\sigma_v \left\{ \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) - \frac{3\sigma_v}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{a T_1 T_2} + \frac{n^4 \pi^4}{\sigma_v L^4} + \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1}{a_2} - \frac{n^2 \pi^2}{\sigma_v L^2} \right) + \frac{k^2}{a T_1 T_2} + \frac{2k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{a_1 T_2} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sigma_v}{a_1 a_2} \right] m \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} \operatorname{ctg} \left(m \sqrt{\frac{\sigma_v}{a}} \right) \right\}}{
\end{aligned}
\tag{III.2.78}$$

здесь $\sigma_v > 0$ — корни уравнения (III.2.76).

На основании формул (III.2.69), (III.2.77) и (III.2.70) — (III.2.78) оригинал функций (III.2.59) и (III.2.60) можем записать так:

$$\begin{aligned}
v_1(x, t) = & H_0 + \varphi_1(x) - A_1 (Q_{r1} + Q_{r2}) kt - B_1 Q_{r1} + C_1 Q_{r2} + \\
& + \frac{1}{T_1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Q_{r1} \varphi_1(\theta_j) - Q_{r2} \vartheta_1(\theta_j)}{\theta_j^2 \psi(\theta_j)} e^{-\theta_j t} - \frac{2}{T_1} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{r1} \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{k}{T_2 m} \right) \cos \frac{n \pi L_{r1}}{L} + \frac{Q_{r2} k}{T_2 m} \cos \frac{n \pi L_{r2}}{L}}{\frac{ln^2 \pi^2}{L} \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \right]} \cos \frac{n \pi x}{L} + \\
& + \frac{1}{T_1} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{r1} \eta_1(\sigma_v, n) + Q_{r2} \xi_1(\sigma_v, n)}{\sigma_v \chi(\sigma_v, n)} e^{-\sigma_v t} \cos \frac{n \pi x}{L},
\end{aligned}
\tag{III.2.79}$$

$$\begin{aligned}
v_2(x, t) = & H_0 + \varphi_2(x) - A_2(Q_{r1} + Q_{r2})kt - B_2 Q_{r1} + C_2 Q_{r2} + \\
& + \frac{1}{T_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Q_{r2} \gamma_2(\theta_j) - Q_{r1} \delta_2(\theta_j)}{\theta_j^2 \psi(\theta_j)} e^{-\theta_j t} - \frac{2}{T_2} \times \\
& \times \sum_{v=1}^{\infty} \frac{Q_{r2} \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{k}{T_1 m} \right) \cos \frac{n \pi L_{r2}}{L} + \frac{Q_{r1} k}{T_1 m} \cos \frac{n \pi L_{r1}}{L}}{\frac{ln^2 \pi^2}{L} \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \right]} \cos \frac{n \pi x}{L} + \\
& + \frac{1}{T_2} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{r2} \eta_2(\sigma_v, n) + Q_{r1} \xi_2(\sigma_v, n)}{\sigma_v \chi(\sigma_v, n)} e^{-\sigma_v t} \cos \frac{n \pi x}{L},
\end{aligned}
\tag{III.2.80}$$

где

$$\begin{aligned}
A_i &= \frac{\tilde{A}_i}{iT_i L}, \quad B_i = \frac{\tilde{B}_i}{iT_i L}, \quad C_i = \frac{\tilde{C}_i}{iT_i L}, \\
\gamma_i &= \frac{\theta}{a_2 - (i-1)} + \frac{1}{a T_{2-(i-1)}} \cdot \frac{k^2 a_1 a_2 - \theta T_1 T_2 a}{T_1 a_2 + T_2 a_1}, \\
\delta_i &= \frac{k}{T_{2-(i-1)}} \sqrt{\frac{\theta}{a}} \cdot \frac{1}{\sin\left(m \sqrt{\frac{\theta}{a}}\right)}, \\
\eta_i(\sigma, n) &= \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \frac{\sigma}{a_{2-(i-1)}} + \frac{k}{T_{2-(i-1)}} \sqrt{\frac{\sigma}{a}} \times \right. \\
& \quad \left. \times \operatorname{ctg} \left(m \sqrt{\frac{\sigma}{a}} \right) \right] \cos \frac{n \pi L_{ri}}{L}, \\
\xi_i(\sigma, n) &= \frac{k}{T_{2-(i-1)}} \sqrt{\frac{\sigma}{a}} \cdot \frac{\cos \frac{n \pi L_{r[2-(i-1)]}}{L}}{\sin\left(m \sqrt{\frac{\sigma}{a}}\right)}, \quad i = 1, 2,
\end{aligned}$$

$$\psi(\theta) = \left\{ \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{2\theta} \left(\frac{k^2}{T_1 T_2 a} - \frac{\theta}{a_1 a_2} \right) \left[1 - m \sqrt{\frac{\theta}{a}} \operatorname{ctg} \left(m \sqrt{\frac{\theta}{a}} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{mk}{2a} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) \right\} lL, \\ \chi(\sigma, n) = lL \left\{ \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) - \frac{3\sigma}{a_1 a_2} + \frac{k^2}{a T_1 T_2} + \frac{n^4 \pi^4}{L^4 \sigma} + \right. \\ \left. + \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{n^2 \pi^2}{\sigma L^2} \right) + \frac{k^2}{T_1 T_2 a} + \frac{2k}{m} \left(\frac{1}{T_1 a_2} + \frac{1}{T_2 a_1} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sigma}{a_1 a_2} \right] \sqrt{\frac{\sigma}{a}} m \operatorname{ctg} \left(m \sqrt{\frac{\sigma}{a}} \right) \right\}.$$

Напоры $H_1(x, t)$ и $H_2(x, t)$ в хорошо проницаемых пластах запишутся в виде

$$H_1(x, t) = H_0 - A_1(Q_{r1} + Q_{r2})kt - B_1 Q_{r1} + C_1 Q_{r2} + \\ + \frac{1}{T_1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Q_{r1} \gamma_j(\theta_j) - Q_{r2} \delta_j(\theta_j)}{\theta_j^2 \psi(\theta_j)} e^{-\theta_j t} - \frac{2}{T_1} \times \\ \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Q_{r1} \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{k}{T_2 m} \right) \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L} + \frac{Q_{r1} k}{T_2 m} \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L}}{\frac{ln^2 \pi^2}{L} \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \right]} \cos \frac{n\pi x}{L} + \\ + \frac{1}{T_1} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{r1} \eta_1(\sigma_v, n) + Q_{r2} \xi_1(\sigma_v, n)}{\sigma_v \chi(\sigma_v, n)} e^{-\sigma_v t} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (\text{III.2.81})$$

$$H_2(x, t) = H_0 - A_2(Q_{r1} + Q_{r2})kt - B_2 Q_{r1} + C_2 Q_{r2} + \\ + \frac{1}{T_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Q_{r2} \gamma_2(\theta_j) - Q_{r1} \delta_2(\theta_j)}{\theta_j^2 \psi(\theta_j)} e^{-\theta_j t} - \frac{2}{T_2} \times \\ \times \sum_{v=1}^{\infty} \frac{Q_{r2} \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{k}{T_1 m} \right) \cos \frac{n\pi L_{r2}}{L} + \frac{Q_{r1} k}{T_1 m} \cos \frac{n\pi L_{r1}}{L}}{\frac{ln^2 \pi^2}{L} \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \right]} \cos \frac{n\pi x}{L} + \\ + \frac{1}{T_2} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{r2} \eta_2(\sigma_v, n) + Q_{r1} \xi_2(\sigma_v, n)}{\sigma_v \chi(\sigma_v, n)} e^{-\sigma_v t} \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (\text{III.2.82})$$

Напор в слабопроницаемом слое $H(x, z, t)$ можно получить непосредственным интегрированием уравнения (III.2.2)

с краевыми условиями (III.2.8) и (III.2.9), т. е. при заданных $H_1(x, t)$ и $H_2(x, t)$ функционал $H(x, z, t)$ примет вид

$$H(x, z, t) = \frac{m + m'' - z}{m} H_2(x, t) + \frac{z - m''}{m} H_1(x, t) + \\ + \frac{2}{m} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \exp \left[-a \left(\frac{n\pi}{m} \right)^2 (t - \tau) \right] \sin \frac{n\pi}{m} (z - m'') \times \right. \\ \left. \times \left[(-1)^n \frac{\partial H_1(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial H_2(x, \tau)}{\partial \tau} \right] \right\} d\tau.$$

§ 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ ВО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ НАПОРНЫХ СЛОЯХ

Для численного решения задач, рассмотренных в § 1, 2 данной главы, можно разработать эффективные численные методы, хорошо реализуемые на ЭВМ.

Рассмотрим три типа задач: 1) неустановившийся приток жидкости к центральной скважине, 2) к круговым галереям и 3) к прямолинейным галереям.

Неустановившийся приток жидкости к центральной скважине. Рассмотрим неустановившийся приток жидкости к центральной совершенной скважине, пробуренной в оба хорошо проницаемые слои, в трехслойном ограниченном пласте. Положим, что граница пласта непроницаема. Тогда эта задача будет сформулирована так.

Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{a_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_1}{\partial r} \right) - \frac{k}{T_1} \cdot \frac{\partial H(r, m + m'', t)}{\partial z}, \quad (\text{III.3.1})$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \quad (\text{III.3.2})$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_2}{\partial r} \right) + \frac{k}{T_2} \cdot \frac{\partial H(r, m'', t)}{\partial z} \quad (\text{III.3.3})$$

при следующих начальных и краевых условиях:

$$H_1(r, 0) = H_{10}, \quad (\text{III.3.4})$$

$$H(r, z, 0) = H_0, \quad (\text{III.3.5})$$

$$H_2(r, 0) = H_{20}, \quad (\text{III.3.6})$$

$$\frac{\partial H_1(R_c, t)}{\partial r} = \frac{Q_1}{2\pi T_1 R_c}, \quad (\text{III.3.7})$$

$$\frac{\partial H_1(R_k, t)}{\partial r} = 0, \quad (\text{III.3.8})$$

$$H(r, m'', t) = H_2(r, t), \quad (\text{III.3.9})$$

$$H(r, m + m'', t) = H_1(r, t), \quad (\text{III.3.10})$$

$$\frac{\partial H_2(R_c, t)}{\partial r} = \frac{Q_2}{2\pi T R_c}, \quad (\text{III.3.11})$$

$$\frac{\partial H_2(R_k, t)}{\partial r} = 0, \quad (\text{III.3.12})$$

где H_{10}, H_0, H_{20} — заданные функции;

$Q = Q_1 + Q_2$ — расход на скважине;

R_c — радиус скважины;

R_k — граница пласта;

T_1 и T_2 — проводимости верхнего и нижнего проницаемых слоев соответственно;

a_1 и a_2 — коэффициенты пьезопроводности хорошо проницаемых слоев;

k и a — коэффициенты фильтрации и пьезопроводности слабопроницаемого слоя соответственно.

Сделаем замену функции

$$H(r, z, t) = \frac{z - m''}{m} H_1(r, t) + \frac{m + m'' - z}{m} H_2(r, t) + \bar{w}(r, z, t). \quad (\text{III.3.13})$$

Тогда уравнение (III.3.2) и условия (III.3.5), (III.3.9) и (III.3.10) запишутся так:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - \frac{z - m''}{m} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{m + m'' - z}{m} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial t}, \quad (\text{III.3.14})$$

$$\bar{w}(r, m'', t) = 0, \quad (\text{III.3.15})$$

$$\bar{w}(r, m + m'', t) = 0, \quad (\text{III.3.16})$$

$$\bar{w}(r, z, 0) = H_0 - \frac{z - m''}{m} H_{10} - \frac{m + m'' - z}{m} H_{20}. \quad (\text{III.3.17})$$

Если $H_{10} = H_0 = H_{20} = \text{const}$, то из (III.3.17) будем иметь

$$\bar{w}(r, z, 0) = 0.$$

Из (III.3.13) следует, что

$$\frac{\partial H(r, z, t)}{\partial z} = \frac{1}{m} \left[H_1(r, t) - H_2(r, t) \right] + \frac{\partial \bar{w}(r, z, t)}{\partial z}. \quad (\text{III.3.18})$$

Следовательно, если в уравнениях (III.3.1) и (III.3.3) вместо $\frac{\partial H(r, m'', t)}{\partial z}$ и $\frac{\partial H(r, m + m'', t)}{\partial z}$ подставить их значения из (III.3.18), то функция $\frac{\partial \bar{w}(r, z, t)}{\partial z}$ будет характеризовать влияние упругого режима в слабопроницаемой прослойке.

Если соотношение (III.3.18) записать в виде

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{m} \left[H_1 - H_2 \right] + \delta \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}, \quad (\text{III.3.19})$$

где $\delta = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, то в уравнениях (III.3.1) и (III.3.3) при $\delta = 0$ не учитывается упругий режим в слабопроницаемой прослойке, а при $\delta = 1$ — учитывается. Такая форма записи удобна для количественной оценки влияния упругих запасов в слабопроницаемой прослойке на работу всего многослойного пласта.

Для построения численного алгоритма решения задачи в уравнениях (III.3.1) — (III.3.3) перейдем к безразмерным величинам по формулам

$$u = \frac{H_1}{H_{\text{хар}}}, \quad v = \frac{H_2}{H_{\text{хар}}}, \quad w = \frac{\bar{w}}{H_{\text{хар}}}, \quad (\text{III.3.20})$$

$$\xi = \frac{z}{m}, \quad \eta = \ln \frac{r}{R_k}, \quad \tau = \frac{a_2}{R_k^2} t. \quad (\text{III.3.21})$$

Тогда получим

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial \tau} = e^{-2\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \sigma_1 \left[(u - v) + \delta \frac{\partial w \left(\eta, \frac{m + m''}{m}, \tau \right)}{\partial \xi} \right], \quad (\text{III.3.22})$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \left(\xi - \frac{m''}{m} \right) \frac{\partial u}{\partial \tau} - \left(1 - \xi + \frac{m''}{m} \right) \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad (\text{III.3.23})$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = e^{-2\eta} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \sigma_2 \left[(u - v) + \sigma \frac{\partial w \left(\eta, \frac{m + m''}{m}, \tau \right)}{\partial \xi} \right], \quad (\text{III.3.24})$$

где

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1}, \quad \beta = \frac{a_2}{a} \cdot \frac{m^2}{R_k^2}, \quad \sigma_1 = \frac{k}{T_1} \cdot \frac{R_k^2}{m}, \quad \sigma_2 = \frac{k}{T_2} \cdot \frac{R_k^2}{m}. \quad (\text{III.3.25})$$

Начальные и краевые условия (III.3.4) — (III.3.12) при этом преобразуются так:

$$u(\eta, 0) = 0, \quad (\text{III.3.26})$$

$$\frac{\partial u(\eta_c, \tau)}{\partial \eta} = Q_1^*, \quad (\text{III.3.27})$$

$$\frac{\partial u(0, \tau)}{\partial \eta} = 0, \quad (\text{III.3.28})$$

$$w(\eta, z, 0) = w_0, \quad (\text{III.3.29})$$

$$w\left(\eta, \frac{m''}{m}, \tau\right) = 0, \quad (\text{III.3.30})$$

$$w\left(\eta, \frac{m+m''}{m}, \tau\right) = 0, \quad (\text{III.3.31})$$

$$v(\eta, 0) = v_0, \quad (\text{III.3.32})$$

$$\frac{\partial v(\eta_c, \tau)}{\partial \eta} = Q_2^*, \quad (\text{III.3.33})$$

$$\frac{\partial v(0, \tau)}{\partial \eta} = 0, \quad (\text{III.3.34})$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{H_{10}}{H_{\text{хар}}}, & v &= \frac{H_{20}}{H_{\text{хар}}} \\ \bar{w}_0 &= \frac{H_0}{H_{\text{хар}}} - \left(\xi - \frac{m''}{m} \right) u_0 - \left(1 - \xi + \frac{m''}{m} \right) v_0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III.3.35})$$

$$Q_i^* = \frac{Q_i}{2\pi T_i H_{\text{хар}}}, \quad i = 1, 2, \quad (\text{III.3.36})$$

$$\eta_c = \ln \frac{R_c}{R_k^-}.$$

Для численного решения системы (III.3.22) — (III.3.24) с условиями (III.3.26) — (III.3.34) применим неявную абсолютно устойчивую разностную схему с точностью аппроксимации $O[(\Delta\eta)^2 + (\Delta\xi)^2 + \Delta\tau]$.

Исследуем сначала уравнение (III.3.23). Область непрерывного изменения аргументов $\frac{m''}{m} \leq \xi \leq \frac{m+m''}{m}$ и $0 \leq \tau \leq T < \infty$ заменяем конечным множеством точек с координатами (сеткой):

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_i &= \frac{m''}{m} + i\Delta\xi, & \tau_j &= j\Delta\tau, & i &= 0, 1, 2, \dots, N \\ & & j &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right\};$$

здесь $\Delta\xi$ и $\Delta\tau$ — шаги сетки.

Производные, входящие в уравнение (III.3.23), заменим разностными отношениями. Тогда получим

$$\frac{w_i - \overset{\vee}{w}_i}{\Delta\tau} = \frac{1}{\beta} \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\Delta z^2} - (1 - i\Delta\xi) \frac{\partial v}{\partial \tau} - i\Delta\xi \frac{\partial u}{\partial \tau},$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$
(III.3.37)

где

$$w_i = w(\xi_i, j\Delta\tau); \quad \overset{\vee}{w}_i = w(\xi_i, (j-1)\Delta\tau).$$

При решении уравнения на каждом временном слое j значение $\overset{\vee}{w}_j$ известно. При $j = 1$ имеем

$$\overset{\vee}{w}_1 = \frac{H_0}{H_{\text{хар}}} - \left(\xi_i - \frac{m''}{m} \right) u_0 - \left(1 - \xi_i + \frac{m''}{m} \right) v_0, \quad (\text{III.3.38})$$

и уравнение (III.3.37) переписывается так:

$$\begin{aligned} \gamma_3 w_{i-1} - (1 + 2\gamma_3) w_i + \gamma_3 w_{i+1} = \\ = i\Delta\xi\Delta\tau \frac{\partial u}{\partial \tau} + (1 - i\Delta\xi) \Delta\tau \frac{\partial v}{\partial \tau} - \overset{\vee}{w}_i. \end{aligned} \quad (\text{III.3.39})$$

Из (III.3.39) и (III.3.30) видно, что их можно переписать в форме

$$w_i = G_{i+1} w_{i+1} + S_{i+1} \frac{\partial v}{\partial \tau} + Q_{i+1} \frac{\partial u}{\partial \tau} + K_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1,$$
(III.3.40)

где

$$G_{i+1} = \frac{\gamma_3}{1 + (2 - G_i) \gamma_3}, \quad (\text{III.3.41})$$

$$S_{i+1} = \frac{\gamma_3 S_i - (1 - i\Delta\xi) \Delta\tau}{1 + (2 - G_i) \gamma_3}, \quad (\text{III.3.42})$$

$$Q_{i+1} = \frac{\gamma_3 Q_i - i\Delta\xi\Delta\tau}{1 + (2 - G_i) \gamma_3}, \quad (\text{III.3.43})$$

$$K_{i+1} = \frac{\gamma_3 K_i + \overset{\vee}{w}_i}{1 + (2 - G_i) \gamma_3}, \quad (\text{III.3.44})$$

$$G_1 = 0, S_1 = 0, Q_1 = 0, K_1 = 0. \quad (\text{III.3.45})$$

Если воспользоваться формулами (III.3.40) и условием $w_N = 0$, то

$$\frac{\partial w \left(\eta, \frac{m+m''}{m}, \tau \right)}{\partial \xi} \approx \frac{3w_N - 4w_{N-1} + w_{N-2}}{2\Delta\xi} =$$

$$= \frac{1}{2\Delta\xi} \left(a \frac{\partial u}{\partial \tau} + b \frac{\partial v}{\partial \tau} + c \right), \quad (\text{III.3.46})$$

где

$$\left. \begin{aligned} a &= Q_N (G_{N-1} - 4) + Q_{N-1} \\ b &= S_N (G_{N-1} - 4) + S_{N-1} \\ c &= K_N (G_{N-1} - 4) + K_{N-1} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.3.47})$$

Из формул (III.3.39) и (III.3.31) аналогично можно найти

$$w_i = \bar{G}_{i-1} w_{i-1} + \bar{S}_{i-1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{Q}_{i-1} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \bar{K}_{i-1}, \quad (\text{III.3.48})$$

$$i = N-1, N-2, \dots, 1,$$

$$\bar{G}_{i-1} = \frac{\gamma_3}{1 + (2 - \bar{G}_i) \gamma_3}, \quad (\text{III.3.49})$$

$$\bar{S}_{i-1} = \frac{\gamma_3 \bar{S}_i - (1 - i\Delta\xi) \Delta\tau}{1 + (2 - \bar{G}_i) \gamma_3}, \quad (\text{III.3.50})$$

$$\bar{Q}_{i-1} = \frac{\gamma_3 \bar{Q}_i - i\Delta\xi \Delta\tau}{1 + (2 - \bar{G}_i) \gamma_3}, \quad (\text{III.3.51})$$

$$\bar{K}_{i-1} = \frac{\gamma_3 \bar{K}_i + \overset{\vee}{w}_i}{1 + (2 - \bar{G}_i) \gamma_3}, \quad (\text{III.3.52})$$

$$\bar{G}_{N-1} = 0, \quad \bar{S}_{N-1} = 0, \quad \bar{Q}_{N-1} = 0, \quad \bar{K}_{N-1} = 0.$$

Таким образом, принимая во внимание (III.3.48) и $w_0=0$, имеем

$$\frac{\partial w \left(\eta, \frac{m''}{m}, \tau \right)}{\partial \xi} \approx \frac{-3w_0 + 4w_1 - w_2}{2\Delta\xi} =$$

$$= \frac{1}{2\Delta\xi} \left(\bar{a} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \bar{b} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \bar{c} \right), \quad (\text{III.3.53})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= (4 - \bar{G}_1) \bar{Q}_0 - \bar{Q}_1 \\ \bar{b} &= (4 - \bar{G}_1) \bar{S}_0 - \bar{S}_1 \\ \bar{c} &= (-4 + \bar{G}_1) \bar{K}_0 - \bar{K}_1 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.3.54})$$

Из формул (III.3.41) — (III.3.43) и (III.3.49) — (III.3.51) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}_{N-k} &= G_k \\ \bar{S}_{N-k} &= Q_k \\ \bar{Q}_{N-k} &= S_k \\ k &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.3.55})$$

Поэтому из (III.3.47) и (III.3.54) имеем

$$a = -\bar{b}, \quad b = -\bar{a}. \quad (\text{III.3.56})$$

Итак, в силу (III.3.56) формула (III.3.53) окончательно запишется следующим образом:

$$\frac{\partial w \left(\eta, \frac{m''}{m}, \tau \right)}{\partial \xi} \approx -\frac{1}{2\Delta\xi} \left(b \frac{\partial u}{\partial \tau} + a \frac{\partial v}{\partial \tau} + \bar{c} \right). \quad (\text{III.3.57})$$

Подставляя в уравнения (III.3.22) и (III.3.24) соотношения (III.3.46) и (III.3.57), получаем

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial \tau} = e^{-2\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \sigma_1 \left[(u - v) + \frac{\delta}{2\Delta\xi} \left(a \frac{\partial u}{\partial \tau} + b \frac{\partial v}{\partial \tau} + c \right) \right], \quad (\text{III.3.58})$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = e^{-2\eta} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \sigma_2 \left[(u - v) - \frac{\delta}{2\Delta\xi} \left(b \frac{\partial u}{\partial \tau} + a \frac{\partial v}{\partial \tau} + \bar{c} \right) \right]. \quad (\text{III.3.59})$$

Область непрерывного изменения аргумента ($\eta_0 \leq \eta \leq 0$) $0 \leq \tau \leq T < \infty$ заменим конечным множеством точек (сеткой) с координатами $\eta_i = \eta_c + i\Delta\eta$; $\tau_j = j\Delta\tau$; $i = 0, 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots$ ($\Delta\eta$, $\Delta\tau$ — шаги сетки). Производные, входящие в (III.3.58) и (III.3.59), заменим разностными отношениями. Тогда получим конечно-разностное уравнение

$$a_i u_{i-1} - b_i u_i + c_i u_{i+1} + d_i v_i = f_i, \quad (\text{III.3.60})$$

$$a'_i v_{i-1} - b'_i v_i + c'_i v_{i+1} + d'_i u_i = -f'_i, \quad (\text{III.3.61})$$

$$i = 1, 2, \dots, p-1,$$

где

$$a_i = \frac{\Delta\tau}{(\Delta\eta)^2} \cdot \frac{e^{-2\eta_i}}{\alpha}, \quad (\text{III.3.62})$$

$$b_i = 2a_{i+1} + \frac{\sigma_1 \Delta\tau}{\alpha} + \frac{\sigma_1 \delta a}{2\Delta\xi \alpha}, \quad (\text{III.3.63})$$

$$c_i = a_i, \quad (\text{III.3.64})$$

$$d_i = \frac{\sigma_1 \Delta \tau}{a} - \frac{\sigma_1 \delta}{2 \Delta \xi a} b, \quad (\text{III.3.65})$$

$$f_i = \overset{\vee}{u}_i + \frac{\sigma_1 \delta}{2 \Delta \xi a} \left(a \overset{\vee}{u}_i + b \overset{\vee}{v}_i - c \Delta \tau \right), \quad (\text{III.3.66})$$

$$a'_i = \frac{\Delta \tau}{(\Delta \eta)^2} e^{-2 \eta_i}, \quad (\text{III.3.67})$$

$$b'_i = 2a'_i + 1 + \sigma_2 \Delta \tau + \sigma_2 \frac{\delta a}{2 \Delta \xi}, \quad (\text{III.3.68})$$

$$c'_i = a'_i, \quad (\text{III.3.69})$$

$$d'_i = \sigma_2 \Delta \tau - \sigma_2 \frac{\delta b}{2 \Delta \xi}, \quad (\text{III.3.70})$$

$$f'_i = \overset{\vee}{v}_i + \sigma_2 \frac{\delta}{2 \Delta \xi} \left(b \overset{\vee}{u}_i + a \overset{\vee}{v}_i - \bar{c} \Delta \tau \right), \quad (\text{III.3.71})$$

$$u_i = v_i(\eta_i, j \Delta \tau), \quad \overset{\vee}{u}_i = u(\eta_i, (j-1) \Delta \tau).$$

Аппроксимируя краевые условия (III.3.27) и (III.3.33) разностным отношением с точностью $O((\Delta \eta)^2)$, получаем

$$\frac{-3v_0 + 4v_1 - v_2}{2 \Delta \eta} \approx Q_2^*,$$

$$\frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2 \Delta \eta} \approx Q_1^*,$$

$$v_2 = -3v_0 + 4v_1 - 2 \Delta \eta Q_2^*, \quad (\text{III.3.72})$$

$$u_2 = -3u_0 + 4u_1 - 2 \Delta \eta Q_1^*. \quad (\text{III.3.73})$$

Решая совместно (III.3.60), (III.3.61) при $i = 1$ и (III.3.72), (III.3.73), находим

$$u_0 = A_1 u_1 + B_1 v_1 + C_1, \quad (\text{III.3.74})$$

$$v_0 = D_1 v_1 + E_1 u_1 + F_1, \quad (\text{III.3.75})$$

где

$$A_1 = \frac{4C_1 - b_1}{3C_1 - a_1}, \quad B_1 = \frac{d_1}{3C_1 - a_1}, \quad C_1 = \frac{f_1 - 2 \Delta \eta C_1 Q_1^*}{3C_1 - a_1}, \quad (\text{III.3.76})$$

$$D_1 = \frac{4C'_1 - b'_1}{3C'_1 - a'_1}, \quad E_1 = \frac{d'_1}{3C'_1 - a'_1}, \quad F_1 = \frac{f'_1 - 2 \Delta \eta C'_1 Q_2^*}{3C'_1 - a'_1}. \quad (\text{III.3.77})$$

В силу (III.3.74) и (III.3.75) по индукции покажем, что уравнения (III.3.60) и (III.3.61) можно представить в форме

$$u_i = A_{i+1} K_{i+1} + B_{i+1} v_{i+1} + C_{i+1}, \quad (\text{III.3.78})$$

$$v_i = D_{i+1} v_{i+1} + E_{i+1} v_{i+1} + F_{i+1}, \quad (\text{III.3.79})$$

$$i = 1, 2, \dots, p-1,$$

где

$$A_{i+1} = \frac{1}{R_i} \bar{C}_i (b'_i - a'_i A_i), \quad (\text{III.3.80})$$

$$B_{i+1} = \frac{1}{R_i} \bar{C}_i (a_i B_i + d_i), \quad (\text{III.3.81})$$

$$C_{i+1} = \frac{1}{R_i} \left[(a_i B_i + d_i)(a'_i F_i + f'_i) + (b'_i - a'_i D_i)(f_i + a_i C_i) \right], \quad (\text{III.3.82})$$

$$D_{i+1} = \frac{1}{R_i} \bar{C}'_i (b_i - a_i D_i), \quad (\text{III.3.83})$$

$$E_{i+1} = \frac{1}{R_i} \bar{C}_i (a'_i E_i + d'_i), \quad (\text{III.3.84})$$

$$F_{i+1} = \frac{1}{R_i} \left[(a'_i F_i + f'_i)(b_i - a_i A_i) + (a'_i E_i + d'_i)(a_i C_i + f_i) \right]; \quad (\text{III.3.85})$$

здесь

$$R_i = (b'_i - a'_i D_i)(b_i - a_i A_i) - (a'_i E_i + d'_i)(a_i B_i + d_i). \quad (\text{III.3.86})$$

Из краевых условий (III.3.28) и (III.3.34) следует, что

$$\left. \begin{aligned} 3v_p - 4v_{p-1} + v_{p-2} &= 0 \\ 3u_p - 4u_{p-1} + u_{p-2} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.3.87})$$

Из (III.3.86) и (III.3.87), принимая во внимание (III.3.78) и (III.3.79), находим

$$u_p = \frac{g_{12}g_{23} - g_{13}g_{21}}{g_{21}g_{11} - g_{22}g_{12}}, \quad (\text{III.3.88})$$

$$v_p = \frac{g_{22}g_{13} - g_{23}g_{11}}{g_{21}g_{11} - g_{22}g_{12}}, \quad (\text{III.3.89})$$

где

$$g_{11} = 3 - 4A_p + A_{p-1}A_p + B_{p-1}E_p, \quad (\text{III.3.90})$$

$$g_{12} = -4B_p + A_{p-1}B_p + B_{p-1}D_p, \quad (\text{III.3.91})$$

$$g_{13} = -4C_p + A_{p-1}C_p + B_{p-1}F_p + C_{p-1}, \quad (\text{III.3.92})$$

$$g_{21} = 3 - 4D_p + D_{p-1}D_p + E_pB_p, \quad (\text{III.3.93})$$

$$g_{22} = -4E_p + D_{p-1}E_p + E_{p-1}A_p, \quad (\text{III.3.94})$$

$$g_{23} = -4E_p + D_{p-1}F_p + E_{p-1}C_p + F_{p-1}. \quad (\text{III.3.95})$$

Таким образом, по формулам (III.3.80)–(III.3.85) найдутся A_{i+1} , B_{i+1} , C_{i+1} , D_{i+1} , E_{i+1} и F_{i+1} . Далее, из (III.3.88), (III.3.89) и (III.3.78), (III.3.79) определяются

$$u_i = u(\eta_i, j\Delta\tau), \quad v_i = v(\eta_i, j\Delta\tau). \quad (\text{III.3.96})$$

Неустановившийся приток жидкости к круговым галереям. Рассмотрим задачу о неустановившемся притоке жидкости к галереям в трехслойном ограниченном пласте, исследованную в § 1 настоящей главы. Будем считать, что в каждом хорошо проницаемом водоносном слое имеется по N_i (1, 2) галерей.

Введем безразмерные величины по формулам

$$H_1^* = \frac{H_1}{H_{\text{хар}}}, \quad H_2^* = \frac{H_2}{H_{\text{хар}}}, \quad H^* = \frac{H}{H_{\text{хар}}}, \quad (\text{III.3.97})$$

$$\xi = \frac{r}{R_k}, \quad \eta = \frac{z}{m}, \quad (\text{III.3.98})$$

$$\xi_{1l} = \frac{R_{1l}}{R_k}, \quad \xi'_{1l} = \frac{R_{2l}}{R_k}, \quad (\text{III.3.99})$$

$$\tau = \frac{Q_2}{R_k^2} t, \quad (\text{III.3.100})$$

где R_{1l} и R_{2l} — положение галерей в разных слоях. Тогда система уравнений (III.3.1) — (III.3.3) с начальными и крайними условиями (III.3.4) — (III.3.12) переписется так:

$$\alpha \frac{\partial H_1^*}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial H_1^*}{\partial \xi} \right) - \sigma_1 \frac{\partial H^* \left(\xi, \frac{m+m''}{m}, \tau \right)}{\partial \eta}, \quad (\text{III.3.101})$$

$$\beta \frac{\partial H^*}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 H^*}{\partial \eta^2}, \quad (\text{III.3.102})$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial H_2^*}{\partial \xi} \right) + \sigma_2 \left(\frac{\partial H^* \left(\xi, \frac{m''}{m}, \tau \right)}{\partial \eta} \right), \quad (\text{III.3.103})$$

$$H_{10}^* = \frac{H_{10}}{H_{\text{хар}}}, \quad (\text{III.3.104})$$

$$H_0^* = \frac{H_0}{H_{\text{хар}}}, \quad (\text{III.3.105})$$

$$H_2^* = \frac{H_2}{H_{\text{хар}}}, \quad (\text{III.3.106})$$

$$\frac{\partial H_1^*(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial H_1^*(1, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (\text{III.3.107})$$

$$\frac{\partial H_1^*(\xi_{rl} + 0, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial H_1^*(\xi_{rl} + 0, \tau)}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi_{rl}} Q_{rl}^*, \quad (\text{III.3.108})$$

$$l = 1, 2, \dots, N_2,$$

$$H^* \left(\eta, \frac{m + m''}{m}, \tau \right) = H_1^*(\eta, \tau), \quad (\text{III.3.109})$$

$$H^* \left(\eta, \frac{m''}{m}, \tau \right) = H_2^*(\eta, \tau), \quad (\text{III.3.110})$$

$$\frac{\partial H_2^*(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial H_2^*(1, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (\text{III.3.111})$$

$$\frac{\partial H_2^*(\xi'_{rl} + 0, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial H_2^*(\xi'_{rl} - 0, \tau)}{\partial \xi} = \frac{Q_{r2l}^*}{\xi'_{rl}}, \quad (\text{III.3.112})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_l &= \frac{k R_K^2}{T_l m} \\ Q_{il}^* &= \frac{Q_{irl}}{2\pi T_l H_{\text{хар}}}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III.3.113})$$

здесь Q_{irl} — расход на галерее R_{irl} , $\alpha = \frac{a_2}{a_1}$, $\beta = \frac{a_2}{a} \cdot \frac{m^2}{R_K^2}$.

Решения H^* и H_2^* представим в виде

$$H_1^* = u - \varphi_1(\xi), \quad (\text{III.3.114})$$

$$H_2^* = v - \varphi_2(\xi), \quad (\text{III.3.115})$$

где

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi^2 \sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i}^* - \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} Q_{1i}^* \ln \frac{\xi}{\xi_{rl}}, \quad (\text{III.3.116})$$

$$\varphi_2(\xi) = \frac{1}{2} \xi^2 \sum_{l=1}^{N_2} Q_{2l}^* - \sum_{l=1}^{N_2} \alpha_{2l} Q_{2l}^* \ln \frac{\xi}{\xi_{rl}}, \quad (\text{III.3.117})$$

$$\alpha_{1l} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi < \xi_{rl} \\ 1, & \xi_{rl} \leq \xi \leq 1 \end{cases}, \quad (\text{III.3.118})$$

$$\alpha_{2l} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi < \xi'_{rl} \\ 1, & \xi'_{rl} \leq \xi \leq 1 \end{cases}. \quad (\text{III.3.119})$$

Тогда соотношения (III.3.101) — (III.3.112) при условиях (III.3.114), (III.3.115) и (III.3.113) запишутся так:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \sigma_1 \left[(u - v) + (\varphi_1 - \varphi_2) + \right. \\ \left. + \frac{\delta \partial w \left(\xi, \frac{m + m''}{m}, \tau \right)}{\partial \xi} \right] - 2 \sum_{l=1}^{N_1} Q_{1l}^*, \quad (\text{III.3.120})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \left(1 - \eta + \frac{m''}{m} \right) \frac{\partial v}{\partial \tau} - \left(\eta - \frac{m''}{m} \right) \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad (\text{III.3.121})$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \sigma_2 \left[(u - v) - (\varphi_1 - \varphi_2) + \right. \\ \left. + \frac{\delta \partial w \left(\xi, \frac{m''}{m}, \tau \right)}{\partial \eta} \right] - 2 \sum_{l=1}^{N_2} Q_{2l}^*, \quad (\text{III.3.122})$$

$$u(\xi, 0) = H_{10}^* + \varphi_1(\xi), \quad (\text{III.3.123})$$

$$\frac{\partial u(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u(1, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (\text{III.3.124})$$

$$w(\xi, \eta, 0) = H_0^* - \left(\eta - \frac{m''}{m} \right) H_{10}^* - \left(1 - \eta + \frac{m''}{m} \right) H_{20}^*, \quad (\text{III.3.125})$$

$$w \left(\xi, \frac{m''}{m}, \tau \right) = 0, \quad w \left(\xi, \frac{m + m''}{m}, \tau \right) = 0, \quad (\text{III.3.126})$$

$$v(\xi, 0) = H_{20}^* + \varphi_2(\xi), \quad (\text{III.3.127})$$

$$\frac{\partial v(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial v(1, \tau)}{\partial \xi} = 0. \quad (\text{III.3.128})$$

Таким образом, система (III.3.120) — (III.3.122) с условиями (III.3.123) — (III.3.128) совпадает с задачей, рассмотренной в начале этого параграфа. Поэтому алгоритм, описанный там, годен здесь, если положить $Q_1^* = Q_2^* = 0$, а коэффициенты $a_l, b_l, c_l, d_l, f_l, a'_l, b'_l, c'_l, d'_l, f'_l$ определять по формулам

$$a_l = \frac{\Delta\tau}{2\Delta\xi} \left(\frac{1}{\Delta\xi} - \frac{1}{2\xi_l} \right), \quad (\text{III.3.129})$$

$$b_l = \frac{2\Delta\tau}{\alpha(\Delta\xi)^2} + 1 + \frac{\sigma_1}{m} \frac{\Delta\tau}{\alpha} + \delta \frac{a}{2\alpha\Delta\eta}, \quad (\text{III.3.130})$$

$$c_l = \frac{\Delta\tau}{\alpha\Delta\xi} \left(\frac{1}{\Delta\xi} + \frac{1}{2\xi_l} \right), \quad (\text{III.3.131})$$

$$d_l = \frac{\sigma_1\Delta\tau}{\alpha m} - \delta \frac{\sigma_1 b}{2\alpha\Delta\eta}, \quad (\text{III.3.132})$$

$$f_l = \overset{\vee}{u}_l + \frac{\sigma_1}{2\alpha\Delta\eta} \left(a\overset{\vee}{u}_l + b\overset{\vee}{v}_l - c\Delta\tau \right) - \\ - 2\Delta\tau \sum_{l=1}^N Q_{1l}^* + \frac{\sigma_2}{\alpha} (\varphi_{1l} - \varphi_{2l}), \quad (\text{III.3.133})$$

$$a'_l = \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi} \left(\frac{1}{\Delta\xi} - \frac{1}{2\xi_l} \right), \quad (\text{III.3.134})$$

$$b'_l = \frac{2\Delta\tau}{\alpha(\Delta\xi)^2} + 1 + \frac{\sigma_2}{m} \Delta\tau + \delta \frac{\sigma_2 a}{2\Delta\eta}, \quad (\text{III.3.135})$$

$$c'_l = \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi} \left[\frac{1}{\Delta\xi} + \frac{1}{2\xi_l} \right], \quad (\text{III.3.136})$$

$$d'_l = \frac{\sigma_2\Delta\tau}{m} \Delta\tau - \delta \frac{\sigma_2 b}{2\Delta\eta}, \quad (\text{III.3.137})$$

$$f'_l = \overset{\vee}{v}_l + \delta \frac{\sigma_2}{2\Delta\eta} \left(a\overset{\vee}{v}_l + b\overset{\vee}{u}_l - \bar{c}\Delta\tau \right) - \\ - 2\Delta\tau \sum_{l=1}^{N_2} Q_{2l}^* + \sigma_1 (\varphi_{2l} - \varphi_{1l}). \quad (\text{III.3.138})$$

Прямолинейные галереи. Дадим метод численного решения задачи, рассмотренной в § 2 настоящей главы. Пусть в каждом хорошо проницаемом слое работают по N_l ($l = 1, 2$) галерей с расходами Q_{il} ($l = 1, 2, \dots, N_l$).

Если ввести безразмерные величины по формулам

$$H_1^* = \frac{H_1}{H_{\text{хар}}}, \quad H_2^* = \frac{H_2}{H_{\text{хар}}}, \quad H^* = \frac{H}{H_{\text{хар}}},$$

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{z}{m}, \quad \xi_{rl} = -\frac{L_{rl}}{L},$$

$$\xi'_{rl} = \frac{L_{2rl}}{R_k}, \quad \tau = \frac{a_2}{R_k^2} t,$$

то система дифференциальных уравнений (III.2.1) — (III.2.3) с начальными и краевыми условиями (III.2.4) — (III.2.9) перепишется так:

$$\alpha \frac{\partial H_1^*}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 H_1^*}{\partial \xi^2} - \sigma_1 \frac{\partial H^*}{\partial \eta}, \quad (\text{III.3.143})$$

$$\beta \frac{\partial H^*}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 H^*}{\partial \eta^2}, \quad (\text{III.3.144})$$

$$\frac{\partial H_2^*}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 H_2^*}{\partial \xi^2} + \sigma_2 \frac{\partial H^*}{\partial \eta}, \quad (\text{III.3.145})$$

$$H_1^*(\xi, 0) = H_{10}^*, \quad (\text{III.3.146})$$

$$\frac{\partial H_1^*(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial H_1^*(1, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (\text{III.3.147})$$

$$\frac{\partial H_1^*(\xi_{rl} + 0, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial H_1^*(\xi_{rl} - 0, \tau)}{\partial \xi} = Q_{rl}^*, \quad (\text{III.3.148})$$

$$l = 1, 2, \dots, N_1,$$

$$H^*(\xi, \eta, 0) = H_0^*, \quad (\text{III.3.149})$$

$$H^*\left(\xi, \frac{m''}{m}, \tau\right) = H_2^*(\xi, \tau), \quad (\text{III.3.150})$$

$$H^*\left(\xi, \frac{m+m''}{m}, \tau\right) = H_2^*(\xi, \tau), \quad (\text{III.3.151})$$

$$H_2(\xi, 0) = H_{20}^*, \quad (\text{III.3.152})$$

$$\frac{\partial H_2^*(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial H_2^*(1, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (\text{III.3.153})$$

$$\frac{\partial H_2^*(\xi'_{rl} + 0, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial H_2^*(\xi'_{rl} - 0, \tau)}{\partial \xi} = Q_{2l}^*, \quad (\text{III.3.154})$$

$$l = 1, 2, \dots, N_2.$$

Рассмотрим функции

$$H_1^* = u - \varphi_1(\xi), \quad (\text{III.3.155})$$

$$H_2^* = v - \varphi_2(\xi), \quad (\text{III.3.156})$$

где

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\xi^2}{2} \sum_{l=1}^{N_1} Q_{1l}^* - \sum_{l=1}^{N_1} \alpha_l Q_{1l}^*(\xi - \xi_{rl}), \quad (\text{III.3.157})$$

$$\varphi_2(\xi) = \frac{\xi^2}{2} \sum_{l=1}^{N_2} Q_{2l}^* - \sum_{l=1}^{N_2} \beta_l Q_{2l}^*(\xi - \xi'_{rl}). \quad (\text{III.3.158})$$

Если принять во внимание (III.3.155), (III.3.156) и (III.3.13), то система уравнений (III.3.143) — (III.3.145) с условиями (III.3.146) — (III.3.154) переписывается следующим образом:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \sigma_1 \left[(u - \varphi_1) - (v - \varphi_2) + \delta \frac{\partial w \left(\xi, \frac{m+m''}{m}, \tau \right)}{\partial \xi} \right], \quad (\text{III.3.159})$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \left(\eta - \frac{m''}{m} \right) \frac{\partial u}{\partial \tau} - \left(1 - \eta + \frac{m''}{m} \right) \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad (\text{III.3.160})$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \sigma_2 \left[(u - \varphi_1) - (v - \varphi_2) + \delta \frac{\partial w \left(\xi, \frac{m''}{m}, \tau \right)}{\partial \eta} \right], \quad (\text{III.3.161})$$

$$u(\xi, 0) = H_{10}^* + \varphi_1(\xi), \quad (\text{III.3.162})$$

$$\frac{\partial u(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u(1, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (\text{III.3.163})$$

$$w \left(\xi, \frac{m+m''}{m}, \tau \right) = 0, \quad (\text{III.3.164})$$

$$w \left(\xi, \frac{m''}{m}, \tau \right) = 0, \quad (\text{III.3.165})$$

$$w(\xi, \eta, 0) = H_0^* - \left(\eta - \frac{m''}{m} \right) H_{10}^* - \left(1 - \eta + \frac{m''}{m} \right) H_{20}^*, \quad (\text{III.3.166})$$

$$v(\xi, 0) = H_2^* + \varphi_2(\xi), \quad (\text{III.3.167})$$

$$\frac{\partial v(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial v(1, \tau)}{\partial \xi} = 0. \quad (\text{III.3.168})$$

Таблица 6

ξ_z	Время, сутки				
	0,50	1,00	2,00	4,00	8,00

Неупругий режим**Верхний водоносный пласт**

0,00005	0,00309	0,00537	0,00956	0,01813	0,03536
0,00013	0,00309	0,00537	0,00956	0,01813	0,03536
0,00036	0,00309	0,00537	0,00956	0,01813	0,03536
0,00098	0,00309	0,00537	0,00956	0,01813	0,03536
0,00263	0,00309	0,00537	0,00956	0,01813	0,03536
0,00707	0,00308	0,00536	0,00956	0,01813	0,03536
0,01904	0,00307	0,00535	0,00954	0,01811	0,03534
0,05125	0,00298	0,00525	0,00945	0,01801	0,03524
0,13797	0,00260	0,00483	0,00901	0,01758	0,03481
0,37145	0,00147	0,00343	0,00754	0,01610	0,03333
1,00000	0,00038	0,00175	0,00569	0,01425	0,03148

Нижний водоносный пласт

0,00005	0,14367	0,14781	0,15267	0,16135	0,17858
0,00013	0,12791	0,13205	0,13691	0,14559	0,16282
0,00036	0,11214	0,11629	0,12115	0,12983	0,14706
0,00098	0,09638	0,10053	0,10533	0,11406	0,13130
0,00263	0,08062	0,08477	0,08963	0,09830	0,11554
0,00707	0,06486	0,06901	0,07387	0,08254	0,09978
0,01904	0,04912	0,05327	0,05813	0,06680	0,08404
0,06125	0,03349	0,03762	0,04248	0,05115	0,06839
0,13797	0,01843	0,02245	0,02729	0,03596	0,05320
0,37145	0,00590	0,00928	0,01401	0,02269	0,03992
1,00000	0,00079	0,00289	0,00738	0,01605	0,03328

Упругий режим**Верхний водоносный пласт**

0,00005	0,00175	0,00368	0,00674	0,01247	0,02396
0,00013	0,00175	0,00368	0,00674	0,01247	0,02396
0,00036	0,00175	0,00368	0,00674	0,01247	0,02396
0,00098	0,00175	0,00368	0,00674	0,01247	0,02396
0,00263	0,00175	0,00368	0,00674	0,01247	0,02396
0,00707	0,00174	0,00367	0,00674	0,01247	0,02395
0,01904	0,00173	0,00366	0,00672	0,01242	0,02393
0,05125	0,00166	0,00356	0,00663	0,01236	0,02384
0,13797	0,00137	0,00318	0,00620	0,01192	0,02341
0,37145	0,00063	0,00196	0,00475	0,01044	0,02193
1,00000	0,00009	0,00066	0,00297	0,00859	0,02008

ξ_l	Время, сутки				
	0,50	1,00	2,00	4,00	8,00

Упругий режим

Нижний водоносный пласт

0,00005	0,14180	0,14588	0,14978	0,15569	0,16718
0,00013	0,12604	0,13012	0,13402	0,13992	0,15142
0,00036	0,11028	0,11435	0,11825	0,12416	0,13565
0,00098	0,09452	0,09859	0,10250	0,10840	0,11989
0,00263	0,07876	0,08283	0,08679	0,09264	0,10413
0,00707	0,06300	0,06707	0,07098	0,07688	0,08837
0,01904	0,04726	0,05133	0,05524	0,06114	0,07263
0,05125	0,03165	0,03569	0,03959	0,04549	0,05698
0,13797	0,01670	0,02055	0,02440	0,03030	0,04179
0,37145	0,00472	0,00759	0,01116	0,01702	0,02852
1,00000	0,00039	0,00164	0,00459	0,01039	0,02188

Из системы (III.3.159) — (III.3.161) и условий (III.3.162) — (III.3.168) видно, что здесь можно применить метод численного решения, изложенный в начале данного параграфа, если считать $Q^* = 0$ ($i = 1, 2$) и

$$a_i = \frac{\Delta\tau}{\alpha (\Delta\xi)^2},$$

$$b_i = 2a_i + 1 + \frac{\sigma_1}{m} \cdot \frac{\Delta\tau}{\alpha} + \frac{\sigma_1 a \delta}{2\alpha \Delta\eta},$$

$$c_i = a_i,$$

$$d_i = \frac{\sigma_1 \Delta\tau}{\alpha m} - \frac{\sigma_1 b \delta}{2\alpha \Delta\eta},$$

$$f_i = \overset{\vee}{u}_i + \frac{\sigma_1 \delta}{2\alpha \Delta\eta} \left(a \overset{\vee}{u}_i + b \overset{\vee}{v}_i - c \Delta\tau \right) -$$

$$- 2\Delta\tau \sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i}^* + \frac{\sigma_2}{\alpha} (\varphi_{1i} - \varphi_{2i}),$$

$$a'_i = \frac{\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2},$$

$$b'_i = 2a'_i + 1 + \frac{\sigma_2}{m} \Delta\tau + \frac{\sigma_2 \delta}{2\Delta\eta} a,$$

$$c'_i = a'_i,$$

Таблица 7

Время, сутки	$Q\tau$	q	$s_{\text{ср}}$	$s_{\text{ср}}^{(0)}$
-----------------	---------	-----	-----------------	-----------------------

Перетоки жидкости при неупругом режиме**Верхний водоносный пласт**

1,00	0,00000	-0,00234	0,00243	0,00009
2,00	0,00000	-0,00614	0,00644	0,00030
3,00	0,00000	-0,01018	0,01070	0,00052
4,00	0,00000	-0,01427	0,01500	0,00073
5,00	0,00000	-0,01836	0,01930	0,00095
6,00	0,00000	-0,02245	0,02361	0,00116
7,00	0,00000	-0,02653	0,02792	0,00138
8,00	0,00000	-0,03063	0,03223	0,00160

Нижний водоносный пласт

1,00	-0,00796	0,00234	0,00583	0,00021
2,00	-0,01592	0,00614	0,01042	0,00064
3,00	-0,02387	0,01018	0,01477	0,00108
4,00	-0,03183	0,01427	0,01909	0,00152
5,00	-0,03979	0,01836	0,02340	0,00196
6,00	-0,04775	0,02245	0,02770	0,00241
7,00	-0,05570	0,02654	0,03201	0,00285
8,00	-0,06366	0,03063	0,03632	0,00329

Перетоки жидкости при упругом режиме**Верхний водоносный пласт**

1,00	0,00000	-0,00114	0,00119	0,00004
2,00	0,00000	-0,00347	0,00369	0,00022
3,00	0,00000	-0,00605	0,00648	0,00043
4,00	0,00000	-0,00869	0,00934	0,00065
5,00	0,00000	-0,01135	0,01221	0,00086
6,00	0,00000	-0,01400	0,01508	0,00108
7,00	0,00000	-0,01666	0,01795	0,00130
8,00	0,00000	-0,01931	0,02082	0,00151

Нижний водоносный пласт

1,00	-0,00790	0,00370	0,00440	0,00014
2,00	-0,01592	0,00886	0,00760	0,00054
3,00	-0,02387	0,01431	0,01054	0,00098
4,00	-0,03183	0,01983	0,01342	0,00142
5,00	-0,03979	0,02535	0,01630	0,00186
6,00	-0,04775	0,03088	0,01917	0,00230
7,00	-0,05570	0,03640	0,02204	0,00274
8,00	-0,06366	0,04193	0,02492	0,00319

Таблица 8

ξ_t	Время, сутки				
	0,50	1,00	2,00	4,00	8,00

$$\xi_r = 0,3$$

Верхний водоносный пласт

0,00000	0,00820	0,02291	0,05048	0,10343	0,20951
0,10000	0,00813	0,02263	0,05003	0,10296	0,20904
0,20000	0,00785	0,02169	0,04865	0,10150	0,20758
0,30000	0,00711	0,01990	0,04615	0,09889	0,20498
0,40000	0,00572	0,01716	0,04251	0,09514	0,20122
0,50000	0,00427	0,01426	0,03870	0,09114	0,19721
0,60000	0,00308	0,01169	0,03522	0,08751	0,19358
0,70000	0,00220	0,00967	0,03239	0,08455	0,19061
0,80000	0,00163	0,00825	0,03035	0,08240	0,18847
0,90000	0,00131	0,00742	0,02914	0,08113	0,18720
1,00000	0,00121	0,00715	0,02875	0,08072	0,18678

Нижний водоносный пласт

0,00000	0,06813	0,09995	0,13512	0,18969	0,29584
0,10000	0,07012	0,10144	0,13641	0,19096	0,29711
0,20000	0,07605	0,10594	0,14033	0,19481	0,30096
0,30000	0,08592	0,11353	0,14704	0,20140	0,30755
0,40000	0,05358	0,07833	0,11073	0,16494	0,27109
0,50000	0,03367	0,05534	0,08655	0,14060	0,24674
0,60000	0,02129	0,04004	0,07008	0,12397	0,23011
0,70000	0,01371	0,02997	0,05900	0,11275	0,21888
0,80000	0,00927	0,02369	0,05193	0,10558	0,21171
0,90000	0,00699	0,02029	0,04805	0,10163	0,20777
1,00000	0,00631	0,01924	0,04684	0,10040	0,20653

$$\xi_r = 0,5$$

Верхний водоносный пласт

0,00000	0,00381	0,01407	0,03895	0,09148	0,19755
0,10000	0,00388	0,01411	0,03894	0,09146	0,19753
0,20000	0,00405	0,01420	0,03888	0,09137	0,19744
0,30000	0,00427	0,01426	0,03870	0,09114	0,19721
0,40000	0,00442	0,01411	0,03824	0,09063	0,19670
0,50000	0,00427	0,01353	0,03731	0,08964	0,19571
0,60000	0,00368	0,01238	0,03580	0,08807	0,19414
0,70000	0,00298	0,01111	0,03420	0,08642	0,19249
0,80000	0,00242	0,01007	0,03290	0,08508	0,19114
0,90000	0,00207	0,00942	0,03208	0,08423	0,19030
1,00000	0,00196	0,00920	0,03181	0,08395	0,19001

ξ_l	Время, сутки				
	0,50	1,00	2,00	4,00	8,00

Нижний водоносный пласт

0,00000	0,02477	0,04718	0,07896	0,13309	0,23923
0,10000	0,02574	0,04807	0,07978	0,13391	0,24005
0,20000	0,02867	0,05077	0,08229	0,13638	0,24253
0,30000	0,03367	0,05534	0,08655	0,14059	0,24674
0,40000	0,04090	0,06187	0,09269	0,14668	0,25282
0,50000	0,05054	0,07054	0,10090	0,15483	0,26097
0,60000	0,03354	0,05237	0,08228	0,13614	0,24228
0,70000	0,02265	0,04030	0,06979	0,12360	0,22974
0,80000	0,01605	0,03270	0,06186	0,11563	0,22177
0,90000	0,01256	0,02857	0,05752	0,11126	0,21740
1,00000	0,01149	0,02728	0,05616	0,10990	0,21603

$$\xi_r = 0,6$$

Верхний водоносный пласт

0,00000	0,00254	0,01094	0,03451	0,08682	0,19289
0,10000	0,00260	0,01104	0,03460	0,08691	0,19297
0,20000	0,00279	0,01131	0,03485	0,08715	0,19322
0,30000	0,00308	0,01169	0,03521	0,08751	0,19357
0,40000	0,00341	0,01210	0,03558	0,08786	0,19393
0,50000	0,00368	0,01238	0,03580	0,08807	0,19413
0,60000	0,00371	0,01232	0,03566	0,08792	0,19399
0,70000	0,00336	0,01178	0,03505	0,08729	0,19336
0,80000	0,00293	0,01114	0,03434	0,08657	0,19264
0,90000	0,00262	0,01068	0,03383	0,08606	0,19213
1,00000	0,00251	0,01051	0,03365	0,08588	0,19195

Нижний водоносный пласт

0,00000	0,01510	0,03348	0,06359	0,11749	0,22363
0,10000	0,01576	0,03419	0,06429	0,11820	0,22434
0,20000	0,01779	0,03636	0,06644	0,12034	0,22648
0,30000	0,02129	0,04004	0,07008	0,12397	0,23011
0,40000	0,02147	0,04532	0,07531	0,12919	0,23532
0,50000	0,03354	0,05237	0,08227	0,13614	0,24228
0,60000	0,04275	0,06137	0,09119	0,14504	0,25118
0,70000	0,02967	0,04792	0,07764	0,13148	0,23762
0,80000	0,02157	0,03942	0,06905	0,12288	0,22902
0,90000	0,01723	0,03478	0,06435	0,11818	0,22432
1,00000	0,01589	0,03333	0,06289	0,11671	0,22285

$$d'_i = \frac{\sigma_2}{m} \Delta \tau - \frac{\sigma_2 b \delta}{2 \Delta \eta},$$

$$f'_i = v_i + \frac{\sigma_2 \delta}{2 \Delta \eta} \left(a v_i + b u_i - \bar{c} \Delta \tau \right) -$$

$$- 2 \Delta \tau \sum_{l=1}^{N_2} Q_{2l}^* + \sigma_1 (\varphi_{2l} - \varphi_{1l}).$$

Т а б л и ц а 9

ξ_l	Время, сутки				
	0,50	1,00	2,00	4,00	8,00

В е р х н и й в о д о н о с н ы й п л а с т

0,00000	0,01000	0,02691	0,06464	0,14375	0,30289
0,10000	0,01006	0,02692	0,06462	0,04372	0,30287
0,20000	0,01021	0,02690	0,06454	0,14364	0,30278
0,30000	0,01035	0,02677	0,06431	0,14341	0,30255
0,40000	0,01032	0,02640	0,06380	0,14289	0,30204
0,50000	0,00988	0,02555	0,06282	0,14190	0,30104
0,60000	0,00886	0,02412	0,06125	0,14033	0,39947
0,70000	0,00772	0,02260	0,05961	0,13868	0,29782
0,80000	0,00678	0,02136	0,05827	0,13734	0,29648
0,90000	0,00619	0,02057	0,05743	0,13649	0,29563
1,00000	0,00600	0,02031	0,05715	0,13621	0,29535

Н и ж н и й в о д о н о с н ы й п л а с т

0,00000	0,03348	0,06191	0,10528	0,18540	0,34457
0,10000	0,03444	0,06276	0,10610	0,18622	0,34539
0,20000	0,03732	0,06533	0,10858	0,18869	0,34786
0,30000	0,04219	0,06969	0,11279	0,19290	0,35207
0,40000	0,04916	0,07596	0,11888	0,19898	0,35815
0,50000	0,05836	0,08432	0,12705	0,20714	0,36631
0,60000	0,04077	0,06583	0,10836	0,18845	0,34762
0,70000	0,02927	0,05347	0,09583	0,17591	0,33508
0,80000	0,02213	0,04563	0,08786	0,16794	0,32711
0,90000	0,01830	0,04135	0,08350	0,16357	0,32274
1,00000	0,01711	0,04001	0,08213	0,16220	0,32137

Для иллюстрации описанного выше алгоритма рассмотрим примеры со следующими параметрами пластов:

$$a_1 = a_2 = 1000000 \text{ м}^2/\text{сутки}, \quad a = 100 \text{ м}^2/\text{сутки},$$

$$m' = m'' = 100 \text{ м}, \quad m = 10 \text{ м}, \quad k = 0,01 \text{ м}/\text{сутки},$$

$$T_1 = T_2 = 1000 \text{ м}^2/\text{сутки}.$$

Т а б л и ц а 10

Время, сутки	$Q \tau$	q	s_{cp}	$s_{cp} (0)$
-----------------	----------	-----	----------	--------------

Перетоки жидкости при неупругом режиме**Верхний водоносный пласт**

1,00	0,00000	-0,02311	0,02311	-0,00000
2,00	0,00000	-0,06021	0,06020	-0,00001
3,00	0,00000	-0,09957	0,09956	-0,00001
4,00	0,00000	-0,13929	0,13928	-0,00002
5,00	0,00000	-0,17908	0,17905	-0,00002
6,00	0,00000	-0,21887	0,21884	-0,00003
7,00	0,00000	-0,25866	0,25863	-0,00003
8,00	0,00000	-0,29846	0,29842	-0,00004

Нижний водоносный пласт

1,00	-0,07958	0,02311	0,05648	0,00001
2,00	-0,15916	0,06021	0,09896	0,00002
3,00	-0,23873	0,09957	0,13918	0,00002
4,00	-0,31831	0,13929	0,17904	0,00003
5,00	-0,39789	0,17908	0,21884	0,00003
6,00	-0,47747	0,21887	0,25863	0,00004
7,00	-0,55704	0,25866	0,29842	0,00004
8,00	-0,63662	0,29846	0,33821	0,00005

Перетоки жидкости при упругом режиме**Верхний водоносный пласт**

1,00	0,00000	-0,01146	0,01146	0,00000
2,00	0,00000	-0,03476	0,03476	0,00000
3,00	0,00000	-0,06062	0,06062	0,00000
4,00	0,00000	-0,0701	0,08701	0,00000
5,00	0,00000	-0,11351	0,11351	0,00000
6,00	0,00000	-0,14003	0,14003	0,00001
7,00	0,00000	-0,16655	0,16656	0,00001
8,00	0,00000	-0,19306	0,19308	0,00001

Нижний водоносный пласт

1,00	-0,07958	0,03645	0,04312	-0,00000
2,00	-0,15916	0,08627	0,07288	-0,00000
3,00	-0,23873	0,13866	0,10007	-0,00001
4,00	-0,31831	0,19157	0,12673	-0,00001
5,00	-0,39789	0,24460	0,15328	-0,00001
6,00	-0,47747	0,29764	0,17982	-0,00001
7,00	-0,55704	0,35069	0,20634	-0,00001
8,00	-0,63662	0,40374	0,23287	-0,00001

Таблица 11

ξ_z	Время, сутки				
	0,50	1,00	2,00	4,00	8,00

$$\xi_r = 0,3$$

Верхний водоносный пласт

0,00000	0,00697	0,02436	0,06523	0,14874	0,31544
0,10000	0,00708	0,02423	0,06500	0,14844	0,31513
0,20000	0,00729	0,02400	0,06417	0,14741	0,31408
0,30000	0,00720	0,02312	0,06233	0,14525	0,31191
0,40000	0,00635	0,02110	0,05910	0,14162	0,30826
0,500 0	0,00515	0,01848	0,05512	0,13720	0,30381
0,60000	0,00397	0,01584	0,05110	0,13274	0,29932
0,70000	0,00301	0,01354	0,04754	0,12878	0,29534
0,80000	0,00231	0,01178	0,04478	0,12570	0,29224
0,90000	0,00189	0,01069	0,04304	0,12376	0,29029
1,00000	0,00176	0,01032	0,04245	0,12310	0,28962

Нижний водоносный пласт

0,00000	0,04991	0,08755	0,13990	0,22597	0,39278
0,10000	0,05339	0,09070	0,14278	0,22878	0,39559
0,20000	0,06397	0,10024	0,15155	0,23734	0,40413
0,30000	0,08200	0,11648	0,16657	0,25203	0,41880
0,40000	0,05769	0,08963	0,13817	0,22321	0,38996
0,50000	0,03988	0,06882	0,11560	0,20019	0,36691
0,60000	0,02725	0,05305	0,09807	0,18220	0,34890
0,70000	0,01866	0,04158	0,08500	0,16871	0,33538
0,80000	0,01319	0,03380	0,07594	0,15932	0,32598
0,90000	0,01017	0,02930	0,07062	0,15379	0,32043
1,00000	0,00920	0,02783	0,06886	0,15196	0,31860

$$\xi_r = 0,5$$

Верхний водоносный пласт

0,00000	0,00364	0,01613	0,05259	0,13467	0,30128
0,10000	0,00383	0,01643	0,05292	0,13500	0,30161
0,20000	0,00437	0,01729	0,05384	0,13592	0,30253
0,30000	0,00515	0,01848	0,05512	0,13720	0,30381
0,40000	0,00596	0,01965	0,05636	0,13844	0,30505
0,50000	0,00637	0,02022	0,05695	0,13903	0,30564
0,60000	0,00596	0,01965	0,05636	0,13844	0,30505
0,70000	0,00515	0,01848	0,05512	0,13720	0,30381
0,80000	0,00437	0,01729	0,05384	0,13592	0,30253
0,90000	0,00383	0,01643	0,05292	0,13500	0,30161
1,00000	0,00364	0,01613	0,05259	0,13467	0,30128

ξ_i	Время, сутки				
	0,50	1,00	2,00	4,00	8,00

Нижний водоносный пласт

0,00000	0,02178	0,04904	0,09563	0,18022	0,34694
0,10000	0,02368	0,05118	0,09780	0,18239	0,34911
0,20000	0,02956	0,05769	0,10438	0,18897	0,35569
0,30000	0,03988	0,06882	0,11560	0,20019	0,36691
0,40000	0,05538	0,08500	0,13186	0,21645	0,38317
0,50000	0,07698	0,10687	0,15377	0,23836	0,40508
0,60000	0,05538	0,08500	0,13186	0,21645	0,38317
0,70000	0,03988	0,06882	0,11560	0,20019	0,36691
0,80000	0,02956	0,05769	0,10438	0,18897	0,35569
0,90000	0,02368	0,05118	0,09780	0,18239	0,34911
1,00000	0,02178	0,04904	0,09563	0,18022	0,34694

Таблица 12

ξ_i	Время, сутки				
	0,50	1,00	2,00	4,00	8,00

Верхний водоносный пласт

0,00000	0,01747	0,04557	0,10636	0,23092	0,48090
0,10000	0,01751	0,04540	0,10607	0,23061	0,48059
0,20000	0,01747	0,04477	0,10507	0,22956	0,47955
0,30000	0,01687	0,04323	0,10298	0,22739	0,47738
0,50000	0,01521	0,04037	0,09942	0,22374	0,47372
0,50000	0,01301	0,03681	0,09508	0,21929	0,46927
0,60000	0,01080	0,03321	0,09070	0,21480	0,46478
0,70000	0,00888	0,03003	0,08682	0,21082	0,46080
0,80000	0,00743	0,02758	0,08380	0,20773	0,45770
0,90000	0,00654	0,02603	0,08190	0,20577	0,45575
1,00000	0,00624	0,02551	0,08125	0,20511	0,45508

Нижний водоносный пласт

0,00000	0,06466	0,11200	0,18205	0,30821	0,55824
0,10000	0,06803	0,11499	0,18488	0,31102	0,56105
0,20000	0,07823	0,12406	0,19348	0,31957	0,56959
0,30000	0,09552	0,13954	0,20823	0,33424	0,58427
0,40000	0,07008	0,11173	0,17949	0,30540	0,55542
0,50000	0,05087	0,08982	0,15655	0,28235	0,53237
0,60000	0,03678	0,07295	0,13866	0,26434	0,51436
0,70000	0,02684	0,06047	0,12525	0,25082	0,50084
0,80000	0,02030	0,05188	0,11592	0,24142	0,49144
0,90000	0,01660	0,04686	0,11043	0,23587	0,48589
1,00000	0,01541	0,04521	0,10861	0,23404	0,48406

Т а б л и ц а 13

Время, сутки	Q_z	q	s_{cp}	$s_{cp}^{(0)}$
-----------------	-------	-----	----------	----------------

Перетоки жидкости при неупругом режиме

Верхний водоносный пласт

1,00	0,00000	-0,03629	0,03630	0,00000
2,00	0,00000	-0,09456	0,09457	0,00001
3,00	0,00000	-0,15637	0,15634	0,00001
4,00	0,00000	-0,21876	0,21877	0,00001
5,00	0,00000	-0,28124	0,28125	0,00002
6,00	0,00000	-0,34373	0,34375	0,00002
7,00	0,00000	-0,40623	0,40625	0,00002
8,00	0,00000	-0,46872	0,46871	0,00003

Нижний водоносный пласт

1,00	-0,12500	0,03629	0,08870	-0,00001
2,00	-0,25000	0,09456	0,15543	-0,00001
3,00	-0,37500	0,15637	0,21862	-0,00001
4,00	-0,50000	0,21876	0,28123	-0,00002
6,00	-0,62500	0,28124	0,34374	-0,00002
6,00	-0,75000	0,34373	0,40625	-0,00002
7,00	-0,87500	0,40623	0,46825	-0,00002
8,00	-1,00000	0,46872	0,53125	-0,00003

Перетоки жидкости при упругом режиме

Верхний водоносный пласт

1,00	0,00000	-0,01801	0,01801	0,00000
2,00	0,00000	-0,05460	0,05460	0,00000
3,00	0,00000	-0,09522	0,09523	0,00001
4,00	0,00000	-0,13667	0,13658	0,00001
5,00	0,00000	-0,17829	0,17830	0,00001
6,00	0,00000	-0,21994	0,21996	0,00002
7,00	0,00000	-0,26161	0,26162	0,00002
8,00	0,00000	-0,30327	0,30329	0,00002

Нижний водоносный пласт

1,00	-0,12500	0,15725	0,16774	0,00001
2,00	-0,25000	0,13551	0,11448	0,00001
3,00	-0,37500	0,21780	0,15719	0,00001
4,00	-0,50000	0,30092	0,19907	0,00002
5,00	-0,62500	0,38420	0,24078	0,00002
6,00	-0,75000	0,46752	0,28245	0,00002
7,00	-0,87500	0,55085	0,32412	0,00003
8,00	-1,00000	0,63418	0,36579	0,00003

1. Неустановившийся приток к центральной скважине. В табл. 6 приводятся понижения напоров:

$$S^* = \frac{T(H - H_0)}{10 QR_k},$$

$R_c = 0,1$ м, $R_k = 2000$ м без учета и с учетом упругого режима, а в табл. 7 даются перетоки жидкости из слоев.

2. Неустановившийся приток к круговым галереям. В табл. 8 приводятся понижения напоров:

$$S^* = \frac{T(H - H_0) R_r}{QR_k}$$

при $\frac{R_r}{R_k} = 0,3; 0,5; 0,6$ с учетом упругого режима, а в табл. 9

— понижение напоров S^* без учета упругого ре-

жима при $\frac{R_r}{R_k} = 0,5$. В табл. 10 даются перетоки жидкости

из слоев с учетом и без учета упругого режима.

3. В табл. 11 приводятся понижения напоров:

$$S^* = \frac{(H - H_0) T}{2Q} \cdot \frac{l}{x_k}$$

при $\xi_r = 0,3; 0,5$ с учетом упругого режима, а в табл. 12—

без учета упругого режима при $\frac{x_r}{x_k} = 0,3$.

В табл. 13 даются перетоки жидкости в слоях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В настоящей работе дана постановка задач о неустановившемся течении жидкости в трехслойном пласте, когда с зеркала грунтовых вод покровного слоя происходит испарение по теории Крылова—Аверьянова, а в основном и слабопроницаемых слоях учитывается упругий режим.

Для модели такого трехслойного пласта ограниченной протяженности получены точные решения задач неустановившегося притока жидкости: а) к центральной скважине; б) к прямолинейной галерее; в) к круговой галерее. Кроме того, построен эффективный численный метод (метод сквозного счета), реализованный на ЭВМ, для решения задач о неустановившемся течении в пластах указанной выше модели. Показана степень влияния испарения на режим перетоков жидкости в слоях.

2. Построено точное решение шести задач неустановившегося течения жидкости к галереям в трехслойном пласте модели Хантуша ограниченной протяженности с учетом упругого режима в слабопроницаемых слоях.

3. Разработан метод сквозного счета для решения задач неустановившегося течения жидкости к системе галерей в трехслойном ограниченном пласте.

4. Дана постановка задач о неустановившемся притоке жидкости в трехслойном пласте, состоящем из двух хорошо проницаемых слоев, которые связаны между собой слабопроницаемой перемычкой.

5. Получено точное решение задач о неустановившемся притоке жидкости к прямолинейным и круговым галереям, независимо работающим в хорошо проницаемых слоях.

6. Разработан и реализован на ЭВМ универсальный численный метод решения задач неустановившегося притока жидкости к скважине или системам галерей (батарей скважин) в двух хорошо проницаемых слоях, связанных между собой слабопроницаемой перемычкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверьянов С. Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод. В сб. «Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод», М., Изд-во АН СССР, 1965
2. Аверьянов С. Ф. О водопроводимости почвсгрунтов при полном их насыщении, Инж. сб., т VII, М., изд ин-та механики АН СССР, 1950.
3. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Движение жидкости и газов в недеформируемой пористой среде, М., Гостоптехиздат, 1953.
4. Абуталиев Ф. Б. Применение к прогнозу уровня грунтовых вод, Труды Координационного совещания по гидротехнике, вып. 35, Л., изд. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, 1967
5. Абуталиев Ф. Б., Машарипов Р., Шульгин Д. Ф. Приближенное решение на ЭВМ одномерной и двумерной задачи фильтрации в двухслойной среде, Труды Координационного совещания по гидротехнике, вып. 45, Л., изд ВНИИГ им Б. Е. Веденеева, 1967.
6. Абуталиев Ф. Б., Абуталиев Э. Б. Методы решения задач подземной гидромеханики на ЭВМ, Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1968.
7. Абуталиев Ф. Б., Абуталиев У. Б., Баклушин М. Б. Неустановившаяся фильтрация подземных вод в слоистых грунтах ограниченной протяженности. Аннотация доклада на III-ем Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике, М., Изд-во «Наука», 1968
8. Абуталиев Ф. Б., Абуталиев Э. Б., Ходжибаев Н. Н., Умаров У., Измайлов И. И. Понижение уровня грунтовых вод системой вертикальных дрен с использованием ЭВМ, В кн. «Гидрологические исследования для орошаемого земледелия», Ташкент, изд. Министерства мелиорации и водного хозяйства УзССР, 1968.
9. Абуталиев Ф. Б., Ходжибаев Н. Н., Умаров У. У. Прогноз взаимодействия Аральского моря с грунтовыми водами прилегающих к нему районов с помощью ЭВМ. В сб «Вопросы вычислительной математики и техники», Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1963
10. Абуталиев Ф. Б., Абуталиев Э. Б., Ходжибаев Н. Н., Умаров У. У. Численные методы решения гидрогеологических задач с применением электронно-вычислительных машин (ЭВМ), В сб. «Юбилейная научная сессия АН УзССР, посвященная 50-летию Советской власти», Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1967.
11. Абуталиев Ф. Б., Машарипов Р., Шульгин Д. Ф. Численное решение на ЭВМ задачи по расчету вертикального дренажа на больших массивах, Общественная сессия по вопросам мелиорации, Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1967.

12. Абуталиев Ф. Б., Ходжибаев Н. Н., Абуталиев Э. Б., Умаров У. У. К вопросу прогноза неуставившейся фильтрации на ЭВМ, Объединенная сессия по вопросам мелиорации, Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1967.
13. Абуталиев Ф. Б. Численные методы решения неуставившейся фильтрации жидкости и газов, Тезисы Международного конгресса математиков, М., Изд-во «Наука», 1966.
14. Абуталиев Ф. Б., Кабулов В. К., Абуталиев Э. Б., Маргулов Г. Д., Старшев В. Методы проектирования крупных газовых месторождений с использованием ЭВМ, В сб. «Вопросы кибернетики и вычислительной математики», вып. 21, Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1968.
15. Абуталиев Ф. Б., Вейцман Б. А. К численному решению обратных задач на ЭВМ (обратные задачи сейсморазведки), В сб. «Численные методы решения прикладных задач», Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1967.
16. Абуталиев Ф. Б., Лактаев Н. Т., Мухидинов Н. М. К теории и расчету на ЭВМ задачи бороздкового полива, В сб. «Применение ЭВМ к решению задач математической физики», Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1967.
17. Абуталиев Ф. Б., Абуталиев У. Б., Баклушин М. Б. О работе скважин вертикального дренажа в слоистых грунтах ограниченной протяженности, В сб. «Применение математических методов при гидрогеологических и инженерно-геологических исследованиях», вып. 34, М., изд. ВСЕГИНГЕО, 1970.
18. Абуталиев Ф. Б., Баклушин М. Б. Точные решения задач вертикального дренажа при батарейном размещении скважин в многослойных пластах, Тезисы XXVIII научно-производственной конференции профессорско-преподавательского состава, посвященной 100-летию со дня рождения В. И. Ленина, Ташкент, изд. ТИИИМСХ, 1969.
19. Абуталиев Ф. Б., Байбатыров Ж. К. Численные расчеты фильтрации из канала с учетом испарения на ЭВМ, В сб. «Вопросы кибернетики и вычислительной математики», вып. 31, Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1969.
20. Абуталиев Ф. Б., Байбатыров Ж. К. Применение квазилинеаризации в расчетах фильтрации из канала с учетом испарения, «Изв. АН УзССР», сер. техн. наук, 1969, № 6.
21. Абуталиев Ф. Б., Байбатыров Ж. К. К решению уравнений автомодельного движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде, В сб. «Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып. 2, Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1970.
22. Абуталиев Ф. Б., Байбатыров Ж. К. Расчеты эксплуатации прикнальных и приречных линз пресных вод на ЭВМ, В сб. «Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып. 6, Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1971.
23. Абуталиев Ф. Б., Молтянер Г. Л. К вопросу оценки основных допущений теории фильтрации жидкости в слоистых грунтах, Тезисы Всесоюзного семинара по фильтрации многофазной жидкости. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1971.
24. Абуталиев Ф. Б., Измайлов И. И. К численному решению задачи неуставившейся фильтрации в трехслойном пласте, Тезисы всесоюзного семинара по фильтрации многофазной жидкости, Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1971.
25. Абуталиев Ф. Б., Молтянер Г. Л. Приближенно-аналитический метод решения задач фильтрации жидкости, В сб. «Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып. 5, Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1971.

- 26 Абу т а л и е в Ф. Б., М а ж а н о в Э. К численному решению задач о неустановившемся притоке жидкости в многослойных пластах с перемычкой, В сб. «Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып. 7, Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1971.
27. Абу т а л и е в Ф. Б., М а ж а н о в Э. Об одном численном методе исследований неустановившихся течений, Тезисы Всесоюзного семинара по фильтрации многофазной жидкости, Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1971.
- 28 Абу т а л и е в Ф. Б., Байбатыров Ж. К. К методу разностной фильтрации, В сб. «Вопросы кибернетики и вычислительной математики», вып. 25, Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1969.
- 29 Абу т а л и е в Ф. Б., Баклушин М. Б., Умаров У. У. О приближенно-аналитическом решении неустановившегося течения в пласте с неоднородно-проницаемой кровлей, В сб. «Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып. 39, Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1970.
- 30 Абу т а л и е в Ф. Б., М а ж а н о в Э. Численные методы решения задач о неустановившемся притоке жидкости к батарее вертикальных дрен в многослойных ограниченных пластах, В сб. «Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып. 5, Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1971.
31. Абу т а л и е в Ф. Б., Будников Г. И. К решению обратной задачи теории бороздкового полива, В сб. «Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып. 6, Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1971.
- 32 Абу т а л и е в Ф. Б., Виленчик В. Б., Жайнаков А. Численное решение магнитной гидродинамики в области впуска плазмотрона, В сб. «Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып. 2, Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1970.
- 33 Абу т а л и е в Ф. Б., Азизова З. К численному решению уравнений ионообменной сорбции, В сб. «Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып. 7, Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1971.
34. Абу т а л и е в Ф. Б., Виленчик В. Б., Жайнаков А. Расчет плазмотрона на ЭВМ «Минск-22», В кн. «Алгоритмы и программы», вып. 1, Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1970.
35. Абу т а л и е в Ф. Б., Баклушин М. Б., Иваненко И. Г. К вопросу определения гидрогеологических параметров, В сб. «Механика», вып. 397, Ташкент, изд. ТашГУ, 1971.
36. Абрамов С. К., Скиргалло О. Б., Чельцев М. И. Осушение шахтных полей и карьеров угольных сооружений, М., Госдортехиздат, 1961.
37. Андреев В. Б. О разностных схемах с расщепляющимся оператором для общих n -мерных параболических уравнений второго порядка со смешанными производными, ЖВМ и МФ, т. 7, вып. 2, 1967.
38. Баклушин М. Б. Неустановившаяся фильтрация в многослойных средах, Автореф. канд. дисс., Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1967.
- 39 Баренблат Г. И. О некоторых задачах неустановившейся фильтрации, «Изв. АН СССР», отд. техн. наук, 1954, № 6.
- 40 Баренблат Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах, ПММ, т. 24, вып. 5, 1960.
- 41 Белоцерковский О. М. О расчете обтекания осесимметричных тел с отошедшей волной на электронной счетной машине, ПММ, т. 24, вып. 3, 1960.
- 42 Белман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, М., Изд-во «Мир», 1968.

43. Бочеввер Ф. М. Расчеты эксплуатационных запасов подземных вод, М., Изд-во «Недра», 1968.
44. Бочеввер Ф. М., Гармонов И. В., Лебедев А. В., Шестаков В. М. Основы гидрогеологических расчетов, М., Изд-во «Недра», 1965
45. Борисов Ю. П. Определение дебита скважин при совместной работе нескольких рядов скважин, Труды МНИ им. И. М. Губкина, вып. 11, М., Гостоптехиздат, 1951.
46. Будаков Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана, ЖВМ и МФ, т. 5, вып. 5, 1965
47. Веригин Н. Н. Движение грунтовых вод вблизи водохранилищ, «Гидротехническое строительство», 1952, № 4.
48. Веригин Н. Н., Шестаков В. М. Методы расчета движения грунтовых вод в двухслойной среде, М., изд. ВНИИ и ВодГЕО, 1954.
49. Губин В. И., Абуталиев Ф. Ё., Каримбердиева С. О решении уравнений гидротермодинамики методом прямых, В сб. «Использование эмпирических функций влияния для прогноза метеорологических полей», Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1970.
50. Гусейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте, М., Изд-во «Недра», 1965.
51. Гусейн-заде М. А. Определение количества перетока жидкости через перемычку между пластами при упругом режиме, В сб. «Теория и практика разработки нефтяных месторождений», вып. 66, М., Изд-во «Недра», 1967.
- 51а. Гусейн-заде М. А., Добкина М. Б. Определение количества перетока жидкости через перемычку между пластами при упругом режиме, Труды МИНХГП, вып. 66, 1967.
52. Гиринский Н. К. Некоторые вопросы динамики подземных вод, «Вопросы гидрогеологии и инженерной геологии», 1947, № 9.
53. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем, М., Физматгиз, 1962.
54. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению, М., Изд-во «Высшая школа», 1965
55. Дородницын А. А. Метод интегральных соотношений для численных решений уравнений в частных производных, Труды Третьего всесоюзного математического съезда, т. 3, М., Изд-во «Наука», 1958.
56. Дьяконов Е. Г. Экономичные разностные методы, основанные на расщеплении разностного оператора, для некоторых систем уравнений в частных производных, В сб. «Вычислительные методы и программирование», Труды ВЦ МГУ, вып. 6, М., 1967
57. Измайлов И. И. К исследованию неустановившейся фильтрации в однослойных и многослойных пластах, Автореф. канд. дисс., Фрунзе, Изд-во АН КиргССР, 1971
58. Измайлов И. И. Универсальная программа для решения задач неустановившейся фильтрации подземных вод в неоднородных слоистых грунтах, В кн. «Алгоритмы и программы», вып. 4, Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1970.
59. Карслоу Т., Егер Д. Теплопроводность твердых тел, М., Изд-во «Наука», 1964
60. Крылов М. И. Основы мелноративной гидрогеологии Узбекистана, Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1959.
61. Калашников А. С., Олейник О. А., Чжоу Юй-тин. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации, «Изв. АН СССР», сер. матем., т. 22, 1958, стр. 667—704.
62. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.

- Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., Изд-во «Наука» 1967
63. Лаврентьев М. М. О некоторых задачах математической физики, Новосибирск, изд СО АН СССР, 1962.
 64. Лапук Б. Б. Теоретические основы разработки месторождений природных газов, М — Л, Гостоптехиздат, 1948
 65. Лыков А. В. Теория теплопроводности, М., Изд-во «Высшая школа», 1967.
 66. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды, Л., Изд-во «Метеорология», 1967.
 67. Марчук Г. И. Численные методы расчета ядерных реакторов, М., Атомиздат, 1958.
 68. Мажанов Э. Программа расчета фильтрации во взаимодействующих напорных слоях, В кн «Алгоритмы и программы», вып. 5, Ташкент, изд Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1970
 69. Мажанов Э. Программа расчета фильтрации в сплошной среде модели Хантуша, В кн. «Алгоритмы и программы», вып. 3, Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1970.
 70. Мирзаджан-заде А. Х. и др. Временное методическое руководство по проектированию разработки газоконденсатно-нефтяных месторождений, Баку, Изд-во «Азнефтехим», 1966.
 71. Мирзаджан-заде А. Х. и др. Теория и практика разработки газоконденсатных месторождений, М., ГТТИ, 1962.
 72. Мятнев А. Н. Действие колодца в напорном бассейне подземных вод, Ашхабад, Изд-во Туркм. фил. АН СССР, 1946, № 3—4.
 73. Мятнев А. Н. Напорный комплекс подземных вод и колодцы, «Изв. АН СССР», ОТН, 1947, № 9.
 74. Мятнев А. Н. Задача о колодцах в горизонте грунтовых вод, «Изв. АН СССР», ОТН, 1948, № 3.
 75. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов, М., Изд-во «Наука», 1966.
 76. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод, М., Гостоптехиздат, 1952
 77. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач, М., ИЛ, 1960.
 78. Рябенский В. С., Филиппов А. С. Об устойчивости разностных уравнений, М., Гостоптехиздат, 1956.
 79. Самарский А. А. О регуляризации разностных схем, ЖВМ и МФ, т. 7, 1967, № 5,
 80. Самарский А. А. Необходимые и достаточные условия устойчивости двухслойных разностных схем, ДАН СССР, т. 181, 1968, № 4.
 81. Самарский А. А. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа, ЖМВ и МФ, т. 2, 1962, № 1.
 82. Самарский А. А. Классы устойчивых схем, ЖВМ и МФ, т. 7, 1967, № 5.
 83. Самарский А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области, ЖВМ и МФ, т. 2, 1962, № 5
 84. Самарский А. А. Локально-одномерные схемы на неравномерных сетках, ЖВМ и МФ, т. 3, 1963, № 3
 85. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем, М., Изд-во «Наука», 1971.
 86. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, М., Физматгиз, 1960.
 87. Силин-Бекчурин А. И. Динамика подземных вод, М., изд. МГУ, 1958.
 88. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы, ЖВМ и МФ, т. 2, 1962, № 1.

89. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач, ДАН СССР, т. 39, 1944.
90. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач, ДАН СССР, т. 153, 1963, № 1.
91. Тихонов А. Н. Об устойчивости метода суммирования рядов Фурье, ДАН СССР, т. 156, 1964, № 2.
92. Тихонов А. Н. О нелинейных уравнениях первого рода, ДАН СССР, т. 161, 1964, № 5.
93. Тихонов А. Н. О методах регуляризации задач оптимального управления, ДАН СССР, т. 162, 1965, № 4.
94. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики, М., Изд-во «Наука», 1966.
95. Тихонов А. Н., Самарский А. А. и др. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидромеханики, ДАН СССР, т. 173, 1967, № 4.
96. Фрязинов И. В. Экономичные симметризованные схемы решения краевых задач для многомерного уравнения параболического типа, ЖВМ и МФ, т. 8, 1968, № 2.
97. Хантуш М. С. Новое в теории перетекания, В сб. «Вопросы гидро-геологических расчетов», М., Изд-во «Мир», 1964.
98. Харин О. Н., Валушин В. Е. Определение поля давлений в многопластовых системах при упругом режиме фильтрации, Труды МИНХ и ГП им. Губкина, вып. 57, М., 1966.
99. Ходжибаев Н. Н., Абу талиев Ф. Б. и др. К оптимальному расчету вертикальных дрен в однослойных пластах, Тезисы XXVIII научно-производственной конференции профессорско-преподавательского состава, посвященной 100-летию со дня рождения В. И. Ленина, Ташкент, изд. ТИИИМСХ, 1969.
100. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика, М., Гостоптехиздат, 1963.
101. Чушкин П. И. Затупленные тела простой формы в сверхзвуковом потоке газа ПММ, вып. 5, т. 24, 1960.
102. Шестаков В. М. Теоретические основы оценки подпора водопонижения и дренажа, М., изд. МГУ, 1965.
103. Щелкачев В. Н. Разработка нефтяных пластов при упругом режиме, М., Гостоптехиздат, 1959.
104. Щелкачев В. Н., Гусейн-заде М. А. Влияние проницаемости кровли и подошвы пласта на движение в нем жидкости, «Нефтяное хозяйство», 1953, № 12.
105. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика, М., Гостоптехиздат, 1949.
106. Яненко Н. Н. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности, ДАН СССР, т. 126, 1952, № 6.
107. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, изд. СО АН СССР, 1966.
108. Douglas I. On the numerical integration of $U_{xx} + U_{zz} + U_t$ by implicit methods, J. Soc. Industr. Appl. Mathem., 1955, 3, 1.
109. P'etacemen D. W., Rechford H. H. The numerical solution of parabolic and alliptic differential equation, J. Soc. Industr. Appl. Mathem., 1955, 3, 1.
110. Jacob C. E. Radial flow in a leaky artesian aquifer Trans. Am. Geophys. Union, 27, 1, 98—205, 1946.
111. Hantush M. S. Flow to wells in aquifers separated by a semi-pervious layer, J. Geophys. Res., Vol. 72, No. 6, March 15, 1709—1719, 1967.
112. Bredehoeft I. D. and Pinder G. F. Digital analysis areal flow in multi-aquifer ground-water systems: aquas a three-dimensional model, J. Water Resources Research, Vol. 6, No. 3, June, 1970.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
ГЛАВА I. Неустановившееся течение жидкости в многослойных пластах с учетом испарения в покровном слое	12
§ 1. Неустановившийся приток жидкости к скважине вертикального дренажа в ограниченном пласте	13
§ 2. Численное решение задачи о неустановившемся притоке жидкости к вертикальной дрене в трехслойном ограниченном пласте с учетом испарения с зеркала грунтовых вод и упругого режима в слабопроницаемой прослойке	24
§ 3. Точное решение задач о неустановившемся притоке жидкости к батареям вертикальных дрен в трехслойном ограниченном пласте со свободной поверхностью грунтовых вод в покровном слое	36
§ 4. Численное решение задач о неустановившемся притоке жидкости к батареям вертикальных дрен в трехслойном ограниченном пласте с учетом испарения с зеркала грунтовых вод	52
§ 5. Конечно-разностная схема решения плановых неустановившихся задач в многослойных пластах	60
ГЛАВА II. Неустановившееся течение жидкости в слоистых пластах модели Хантуша	73
§ 1. Точное решение задач о неустановившемся притоке жидкости к батареям вертикальных дрен в трехслойном ограниченном пласте модели Хантуша	74
§ 2. Численные методы решения задачи о неустановившемся притоке жидкости к батареям вертикальных дрен в многослойных ограниченных пластах	117
ГЛАВА III. О неустановившемся притоке жидкости к батареям вертикальных дрен во взаимодействующих напорных слоях, связанных со слабопроницаемой перемычкой	130
§ 1. Неустановившийся приток жидкости к круговым галереям в ограниченном пласте	131
§ 2. О неустановившемся притоке жидкости к плоско-параллельной галерее	151
§ 3. Численные методы решения задач о неустановившемся притоке жидкости во взаимодействующих напорных слоях	174
Заключение	200
Литература	201

3BC

A177

