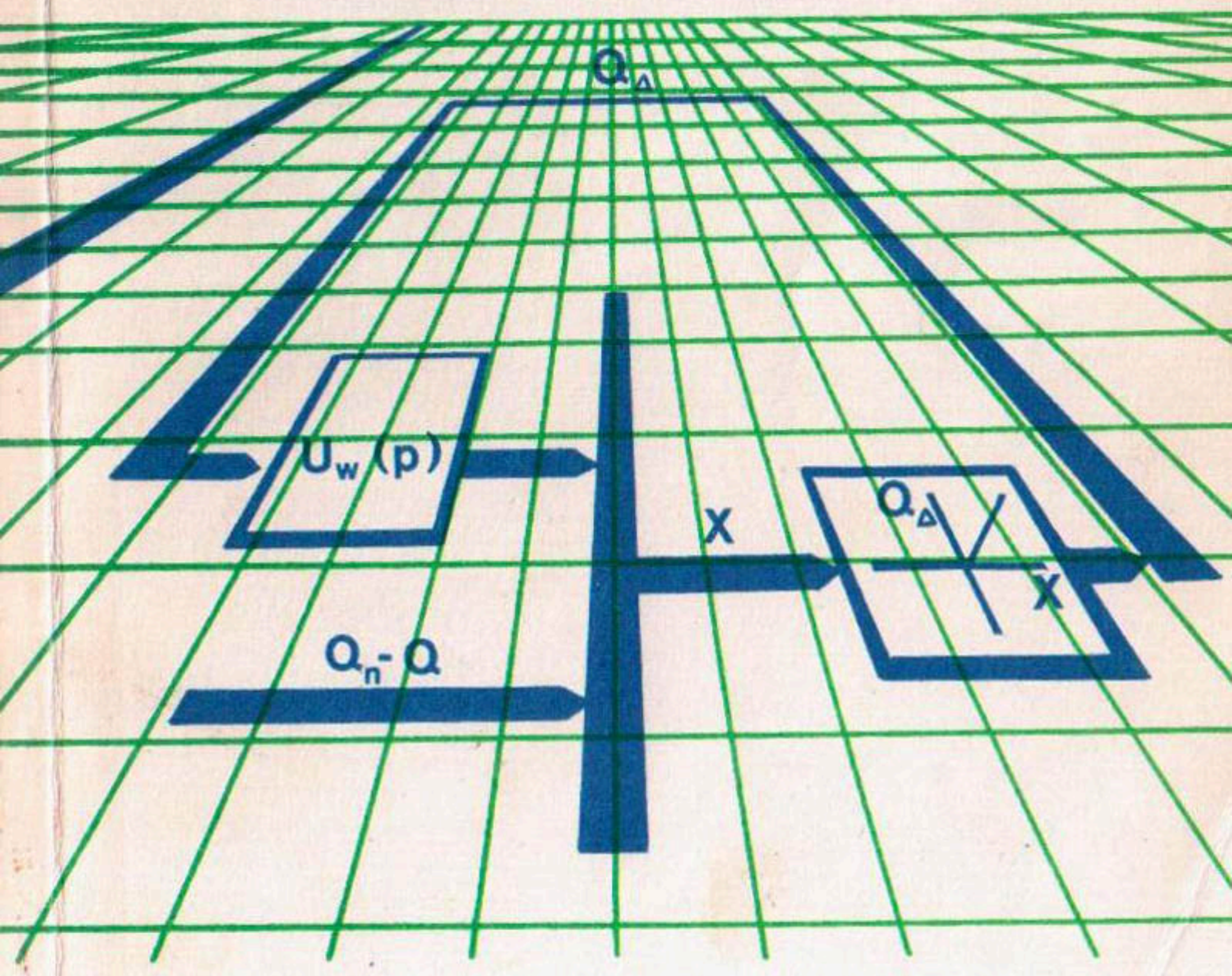
С. Я. Концебовский Е. Л. Минкин

РЕСУРСЫ ПОДЗЕМНЫХ ВОД в водохозяйственных балансах орошаемых территорий



«Наука»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ВОДНЫХ ПРОБЛЕМ

С. Я. Концебовский Е. Л. Минкин

РЕСУРСЫ ПОДЗЕМНЫХ ВОД в водохозяйственных балансах орошаемых территорий

Ответственный редактор
доктор геолого-минералогических наук
Л.С. ЯЗВИН



МОСКВА
"НАУКА"
1986

УДК 556.3.626.81+631.67

Концебовский С.Я., Минкин Е.Л. Ресурсы подземных вод в водохозяйственных балансах орошаемых территорий. М.: Наука, 1986.

Рассматривается методика учета ресурсов подземных вод при составлении водохозяйственных балансов орошаемых территорий. В зависимости от вида водопотребления предлагается методика оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод и влияния их отбора на поверхностный сток как для условий, когда подземные воды представляют основной источник водоснабжения, так и для случая, когда они являются дополнительным водоисточником к ресурсам поверхностных вод. В каждом случае исследуются проблемы оценки надежности функционирования системы совместного использования ресурсов поверхностных и подземных вод.

Табл. 32. Ил. 68. Библиогр.: с. 195–197 (77 назв.)

Рецензенты:
Г.Х. Исмайылов, И.С. Пашковский

К $\frac{1904060000\text{-}256}{042\,(02)\,\text{-}86}$ 196-86–II

©Издательство "Наука", 1986

ВВЕДЕНИЕ

По действующему в СССР водному законодательству пресные подземные воды вследствие лучшей по сравнению с поверхностными водами защищенности от загрязнения и меньшей подверженности ресурсов и их качества сезонным и многолетним колебаниям должны использоваться в первую очередь для хозяйственно-питьевого водоснабжения.

Поэтому использование подземных вод питьевого качества для целей орошения земель может быть допущено органами по использованию и охране водных ресурсов только при наличии серьезного обоснования.

В СССР, согласно сложившейся практике, разрешение на использование пресных подземных вод питьевого качества для орошения дается лишь в тех случаях, когда в данном районе отсутствуют в необходимом количестве ресурсы поверхностных вод, а имеющиеся эксплуатационные ресурсы подземных вод питьевого качества превышают перспективную потребность в воде хозяйственно-питьевого назначения. Последнее обстоятельство весьма часто имеет место и в условиях, когда ресурсы поверхностных вод вполне достаточны для обеспечения потребностей орошения. Тем не менее использование для этой цели части ресурсов подземных вод может оказаться предпочтительнее. Это объясняется несколькими причинами. Прежде всего тем, что в ряде районов интенсивный отбор подземных вод на орошение может существенно улучшить мелиоративное состояние орошаемых и соседних с ними земель благодаря снижению уровня грунтовых вод и уменьшению в связи с этим их расходования на испарение. Это не только приведет к прекращению естественного засоления земель, характеризующихся затрудненными условиями оттока грунтовых вод, но и позволит предупредить вторичное их засоление, связанное с орошением.

При этом мелиоративный эффект будет особенно выражен, конечно, при эксплуатации грунтовых вод, но и при водоотборе из напорных вод, подпитывающих в естественных условиях грунтовые, если это привело к смене знака разности напоров, мелиоративный эффект оказывается достаточно заметным.

Вторым важным аргументом в пользу использования подземных вод на орошение при достаточности ресурсов поверхностных вод может служить заметный выигрыш в площади орошения, так как при этом может отпасть (или существенно сократиться) надобность в создании горизонтального дренажа, отнимающего значительные площади ценных земель.

Наконец, использование подземных вод на орошение, особенно если это грунтовые воды, расходующиеся в естественных условиях на непродуктивную эвапотранспирацию, приводит к увеличению общего коли-

чества располагаемых водных ресурсов – поверхностных и подземных – за счет сокращения и даже полного прекращения непродуктивного испарения.

Несомненно, что и при ограниченных ресурсах поверхностных вод, и при их избыточном количестве для суждения о возможных масштабах использования подземных вод питьевого качества для целей орошения земель какого-либо района прежде всего необходимо оценить эксплуатационные ресурсы подземных вод в этом районе и сравнить их с перспективной потребностью в воде для хозяйственно-питьевых целей.

Под эксплуатационными ресурсами подземных вод понимается то их количество (расход), которое может быть получено рациональными в технико-экономическом отношении водозаборными сооружениями при заданном режиме эксплуатации и при сохранении кондиционного качества воды в течение всего расчетного срока водопотребления.

По принятой в СССР практике к оценке величины эксплуатационных ресурсов существует два подхода. Согласно первому подходу эксплуатационные ресурсы оцениваются применительно к конкретному водопотребителю. В этом случае задача сводится к определению величины понижения уровня, вызванного водоотбором, равным заявленной потребности, и сравнению этого понижения с предельно допустимой величиной. Если расчетное понижение меньше допустимого, ресурсы считаются обеспеченными и принимаются равными заявленной потребности.

Согласно подходу, более отвечающему понятию "эксплуатационные ресурсы", оценивается та производительность водозабора, при которой вызванное его работой понижение уровня на конец расчетного срока станет равным допустимому.

Таким образом, задача оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод сводится в основном к задаче установления пространственно-временны́х зависимостей понижения уровня эксплуатируемого горизонта от производительности и режима работы водозабора. При этом основным фактором, лимитирующим величину эксплуатационного водоотбора при прочих равных условиях, является, как отмечено выше, величина допустимого понижения.

Последнее определяется конкретными гидрогеологическими условиями и технико-экономическими соображениями. Так, при большой мощности водоносного горизонта или большой глубине его залегания допустимое понижение уровня, если это, конечно, экономически оправдано, не должно превышать максимальную высоту подъема имеющегося насосного оборудования при сохранении такого столба воды в скважине, при котором обеспечивалась бы нормальная работа насоса с требуемой производительностью.

Применительно к целям использования подземных вод для орошения особое значение в приведенном выше определении понятия "эксплуатационные ресурсы" приобретает требование сохранения заданного режима эксплуатации. При орошении режим отбора подземных вод определяется тем, являются ли они основны́м или дополнительным к поверхностным водам источником орошения.

В первом случае, т.е. когда подземные воды представляют собой основной источник оросительной воды, режим их отбора характеризуется

выраженной сезонной цикличностью, определяемой условиями вегетации орошаемых культур, необходимостью влагозарядковых и промывных поливов.

В случае же, когда подземные воды используются как дополнительный к ресурсам поверхностных вод источник орошения, режим их отбора будет претерпевать случайные колебания, связанные со стохастическим характером колебаний стока и водопотребления на орошение.

Учитывая, что как в первом, так и во втором случае одновременно с отбором подземных вод на орошение они, как правило, эксплуатируются и для хозяйственно-питьевых нужд, когда режим отбора практически не изменяется во времени, при оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод в этих условиях должно предусматриваться комплексирование режимов водоотбора.

Методика оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод для таких условий разработана еще недостаточно, и одной из важных задач, стоящих перед гидрогеологической наукой в настоящее время, является разработка теоретических основ и практических методов такой оценки.

Одна из задач настоящей работы – рассмотрение основ гидрогеологических расчетов для оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод в разных природных условиях с учетом различных режимов их отбора.

Второй важной задачей, возникающей при решении вопросов использования подземных вод для орошения, является оценка тех изменений, которые произойдут с ресурсами поверхностных вод при отборе гидравлически связанных с ними подземных вод. При планировании развития водного хозяйства, в том числе при проектировании оросительных систем, обязательно предварительно составляются перспективные водохозяйственные балансы, в которых сопоставляются перспективные потребности в воде для всех отраслей народного хозяйства с суммарными водными ресурсами рассматриваемой территории (района, речного бассейна и т.д.). Последние слагаются из ресурсов поверхностного стока заданной обеспеченности (с учетом мероприятий по его регулированию, если они или осуществлены, или проектируются), и эксплуатационных ресурсов подземных вод (оцененных с учетом режима водоотбора, определяемого видом водопотребителя) за вычетом того сокращения поверхностного стока, которое произойдет в результате эксплуатационного отбора подземных вод.

При определении величины этого сокращения должна, конечно, учитываться, помимо природных условий и режима отбора подземных вод, степень существующей или проектируемой зарегулированности поверхностного стока.

Действительно, если на реках нет и не проектируется создание водохранилищ ниже по течению от водозаборов подземных вод, влияние эксплуатации последних на поверхностный сток выразится в виде определенного изменения его расходов в любой заданный момент времени. Эти изменения, учитывая, что они могут иметь различный знак, в настоящей работе предлагается называть "редукцией" поверхностного стока. Если же реки зарегулированы или проектируется их зарегулирование ниже по течению водозаборов подземных вод, при составлении перспективных водохозяйственных балансов, вернее, при оценке общих водных ресурсов

территории, влияние отбора подземных вод на поверхностный сток выразится в изменении объема стока в водохранилище в результате редукции за тот отрезок времени, на который рассчитывается регулирование водохранилищем (сезонное, годовое, многолетнее). Это изменение объема в настоящей работе предлагается называть "интегральной редукцией" поверхностного стока.

Методика определения этих величин, весьма важных при оценке общих водных ресурсов, до настоящего времени разработана еще недостаточно. Поэтому в настоящей работе уделяется большое внимание рассмотрению теоретических основ и практических методов расчета редукции и интегральной редукции поверхностного стока.

При разработке теоретических основ и практических методов как оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод, так и определения величины редукции поверхностного стока при их отборе использованы методы теории линейных систем, позволившие разработать единый подход к изучению геофильтрационных процессов при разных режимах отбора подземных вод и для различных природных условий. Он основан на том, что универсальной характеристикой реакции геофильтрационной системы на возмущение, вызванное водоотбором, служит передаточная функция системы, связывающая изображения по Лапласу возмущения и реакции.

При разработке методики оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод рассматривается геофильтрационная система водозабор–водоносный пласт, реакцией которой на возмущение водоотбором является понижение уровня подземных вод в эксплуатируемом горизонте.

Аналогично при решении задач методики оценки влияния отбора подземных вод на поверхностный сток рассматривается геофильтрационная система водозабор–водоносный пласт–поверхностный водоток, в которой реакцией на возмущение, вызванное водоотбором, является редукция поверхностного стока.

Как уже отмечалось выше, универсальной характеристикой реакций геофильтрационных систем водозабор–водоносный пласт и водозабор–водоносный пласт–поверхностный водоток служат передаточные функции. Рассматриваются методика получения и конкретные выражения для передаточных функций, связывающих изображения по Лапласу понижений или редукции с изображениями возмущения (величины водоотбора) для различных природных условий и разных типов водозаборов.

Каждая из этих передаточных функций является, в сущности, основой для разработки алгоритмов для численных расчетов на ЭВМ вызванных водоотбором понижений уровня и редукции поверхностного стока на любой заданный срок.

При этом для значительной части расчетных схем и типов водозаборов представилось возможным перейти от изображения к оригиналам и получить достаточно простые аналитические зависимости для определения соответствующих реакций геофильтрационных систем на вызванное эксплуатационным водоотбором возмущение. Все входящие в полученные зависимости функции табулированы, и в работе приведены соответствующие таблицы и графики.

Глава 1

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ОЦЕНКИ РЕСУРСОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД И ИХ УЧЕТА В ВОДОХОЗЯЙСТВЕННЫХ БАЛАНСАХ

Гидрогеологические расчеты по оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод и влияния их отбора на поверхностный сток сводятся к установлению пространственно-временны́х зависимостей между величиной эксплуатационного водоотбора и реакциями соответствующих геофильтрационных систем – понижения уровня эксплуатируемого горизонта и изменения расхода поверхностных водоисточников, гидравлически связанных с этим горизонтом.

Величины понижения уровня и изменения поверхностного стока переменны во времени и определяются многочисленными факторами – природными и хозяйственными. К ним относятся факторы питания и разгрузки подземных вод, условия их залегания и фильтрационные параметры водовмещающих пород, граничные условия и конфигурация областей фильтрации, а также размещение и режим работы водозаборов. В настоящей главе рассматриваются роль этих факторов в формировании эксплуатационных ресурсов подземных вод и постановке задач геофильтрационных расчетов, выводы основных уравнений и соотношений, формулировка основных понятий (таких, как передаточные функции геофильтрационных систем и др.), играющих определяющую роль во всем последующем изложении. Рассматривается также методика построения передаточных функций в общем виде.

1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ГЕОФИЛЬТРАЦИОННЫХ РАСЧЕТОВ. ПРИРОДНЫЕ И ХОЗЯЙСТВЕННЫЕ ФАКТОРЫ ФОРМИРОВАНИЯ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

При постановке гидродинамических задач, связанных с геофильтрационными расчетами, принципиальное значение имеют природные и хозяйственные условия формирования потоков и бассейнов подземных вод. К природным факторам относятся гидрогеологические условия залегания подземных вод, распространение, состав и фильтрационные свойства водовмещающих пород, а также факторы естественного питания и разгрузки. По характеру распространения последние подразделяются [59] на площадные (распределенные) и локальные. Локальное питание подземных вод происходит путем фильтрации из поверхностных водотоков и водоемов, а также перетеканием из соседних пластов по зонам тектонических нарушений или через фациальные "гидрогеологические окна". Локальная разгрузка подземных вод осуществляется главным образом в русла водотоков, в водоемы, болота и солончаки в виде источников. Если это напорные подземные воды, к перечисленным видам локальной разгрузки добавляется перетекание в соседние слои по зонам тектонических нарушений или через "гидрогеологические окна".

Распределенное питание подземных вод в естественных условиях реализуется в виде инфильтрации атмосферных осадков (если это грунтовые воды) и в виде перетекания из соседних слоев. Распределенная разгрузка подземных вод может происходить в виде перетекания в соседние слои, а в случае грунтовых вод – и за счет эвапотранспирации.

В балансе подземных вод, сложившемся под влиянием перечисленных факторов естественных питания и разгрузки, существенные изменения вносятся при хозяйственном вмешательстве. Эксплуатация подземных вод, создание систем их искусственного пополнения, орошение земель, искусственный дренаж – горизонтальный и вертикальный, водоотлив из шахт и карьеров при разработке месторождений полезных ископаемых – все эти хозяйственные мероприятия не только вносят весьма заметные изменения в характер и масштабы перечисленных выше факторов естественных питания и разгрузки, но и приводят к возникновению новых видов питания и разгрузки подземных вод (локальных или площадных в зависимости от расположения водозаборных сооружений, ирригационно-дренажной сети, орошаемых площадей, системы водопонижения или искусственного понижения). При этом могут измениться как приходные и расходные харктеристики баланса, так и размеры соответствующих областей, причем области питания могут переходить в области разгрузки, и наоборот. Так, при отборе подземных вод имевший место в "естественных условиях" подземный сток в поверхностную гидрографическую сеть может измениться на фильтрацию поверхностных вод в водоносные горизонты; если отбор подземных вод ведется в целях орошения, инфильтрация поливных вод на полях может превысить естественную величину испарения, что выразится в возникновении нового фактора площадного питания подземных вод; расположенные поблизости от водозаборов родники, как правило, иссякают и т.д.

Несмотря на такую относительность определения факторов питания и разгрузки по отношению к условиям нарушенного режима подземных вод, в естественном состоянии обычно могут быть четко выделены соответствующие характерные области, а также области транзита. Наиболее рельефно эти области выглядят в условиях потоков подземных вод, характеризуя их питание, перемещение и разгрузку в увязке с общими гидрогеологическими и гидрологическими условиями района. Наиболее мощные и водообильные водоносные горизонты пресных и слабоминерализованных подземных вод обычно в большей или меньшей степени связаны именно с условиями потоков подземных вод, т.е. приурочены к зоне активного водообмена в отличие от горизонтов зон затрудненного и весьма затрудненного водообмена, характеризующихся застойностью режима.

Для постановки геофильтрационных расчетов практически во всех случаях приходится прибегать к схематизации природных условий, что обусловлено принципиальной невозможностью получения исчерпывающей информации об условиях формирования и движения потоков подземных вод. Основным исходным положением при любой схематизации является предпосылка о возможности представления комплекса водоносных горизонтов в виде единой физической области движения подземных вод – области фильтрации, к которой применимы методы подземной гидродинамики. При этом закономерности изменения напоров и скорос-

тей потоков считаются подчиненными уравнениями динамики подземных вод и вполне определяются заданием начальных и граничных условий.

Одним из первых вопросов, решаемых при схематизации, служит вопрос о размерности задачи. В наиболее общем случае поток подземных вод имеет пространственную форму. Однако основным структурным типом потоков подземных вод служит двумерный плановый поток. Нередко оказывается возможным еще более упростить расчетную схему, а именно принять расчетный поток одномерным – плоскопараллельным или радиально-симметричным. Что касается трехмерных потоков, встречающихся достаточно редко, то их анализ является весьма сложным и здесь не рассматривается.

Следующим после установления расчетной размерности этапом является задание расчетной области фильтрации, т.е. установление границ плоской области, внутри которой исследуется движение потока подземных вод. Подробность задания границ области зависит от масштаба проводимых исследований; практика обоснования гидрогеологических мероприятий показала, что для целей практических расчетов достаточной является такая степень детализации в определении геометрических характеристик областей, с которой передаются наиболее важные ее особенности, например связность, детали формы, сравнимые по размерам с диаметром области, и т.д. Несмотря на отмеченную сравнительно малую чувствительность результатов расчетов по отношению к изменениям формы расчетной области, необходимо отметить, что в ряде случаев, например в условиях резкой фильтрационной неоднородности области, увеличение детализации в задании геометрии может привести к заметному уточнению расчетов; поэтому в последнее время наряду с аналитическими методами широкое распространение получили всевозможные методы моделирования (чаще всего на АВМ и ЭЦВМ), позволяющие проводить подобные сравнения.

Одновременно с определением формы расчетной области назначаются граничные условия на ее контурах и распределение геофильтрационных параметров. Граничные условия характеризуют факторы локального питания и разгрузки и встречаются трех основных родов:

1) граничное условие 1-го рода, условие совершенного питания, или условие постоянного напора (уровня);

2) граничное условие 2-го рода, предполагающее условие постоянства расхода на границе или в частном случае – равенство расхода нулю при непроницаемой границе;

3) граничное условие 3-го рода, или условие несовершенного питания.

Факторы распределенных питания и разгрузки подземных вод получают отражение в величинах и пространственном распределении суммарных величин их модулей – инфильтрационного питания $\epsilon_{\text{п}}$ и распределенной разгрузки $\epsilon_{\text{р}}$. В соответствии со сказанным выше эти величины могут быть представлены в виде

$$\epsilon_{\text{п}} = \epsilon_{\text{а}} + \epsilon_I + \epsilon_L, \tag{1.1}$$

$$\epsilon_{\text{р}} = \epsilon_E + \Upsilon, \tag{1.2}$$

где $\epsilon_{\text{а}}$ – модуль инфильтрации атмосферных осадков; ϵ_I – модуль инфильтрации оросительных вод к эксплуатируемому горизонту; ϵ_L – мо-

дуль перетекания; ϵ_E – модуль эвапотранспирации грунтовых вод; Υ – модуль отбора подземных вод. Конечно, соотношения (1.1) и (1.2) записаны в самом общем виде. Для напорных вод, например в соотношении (1.1), речь может идти лишь о перетекании. Для гидрогеологических расчетов первоочередное значение имеет изучение изменения режима движения подземных вод по сравнению с "естественным" режимом, существовавшим до начала эксплуатации, поэтому величина модуля инфильтрации атмосферных осадков, сравнительно незначительно изменяющаяся при эксплуатации, может быть исключена из рассмотрения. Модуль инфильтрации оросительных вод зависит от величины оросительной нормы, мощности и свойств зоны аэрации. Во многих случаях при отборе подземных вод на орошение зависимость модуля ϵ_I может задаваться в определенном отношении от величины отбираемого водозаборами расхода воды:

$$\epsilon_I = k_в Q/A, \tag{1.3}$$

где $k_в$ – коэффициент возврата, т.е. доля воды, отбираемой водозабором, которая возвращается к свободной поверхности грунтовых вод; Q – величина расхода водоотбора, идущего на орошение; A – площадь орошаемого участка. Для надежного определения величины $k_в$ необходимо проведение водобалансовых исследований; оценку этого коэффициента можно получить также с помощью формулы

$$k_в = k_0 \eta_с \eta_{т.п.} k_I, \tag{1.4}$$

где k_0 – коэффициент использования подземных вод для орошения (часть отобранных подземных вод может использоваться для других целей); $\eta_с$ – коэффициент полезного действия оросительной системы; $\eta_{т.п.}$ – коэффициент полезного действия техники орошения, показывающий, какая часть объема воды, поданной на поля, попадает в зону аэрации; k_I – коэффициент инфильтрации, указывающий, какая часть воды, попавшей в зону аэрации, достигает грунтовых вод. Последний коэффициент зависит от мощности и гидрофизических свойств зоны аэрации. Оцениваемая величина коэффициента $k_в$ составляет обычно 0,1–0,2 и редко превышает эти значения.

Модуль перетекания ϵ_L в пренебрежении упругим режимом в разделяющих слоях может быть представлен в виде [59]

$$\epsilon_L = b_L \Delta H, \tag{1.5}$$

где b_L – коэффициент перетекания, имеющий размерность, обратную размерности времени [53, 54]; ΔH – разность напоров в эксплуатируемом и смежном с ним горизонтах. Следует отметить, что несмотря на то, что величина модуля ϵ_L отнесена к факторам питания в уравнении (1.1), вдали от водозаборов подземных вод он может играть роль факторов разгрузки, что отразится в отрицательном знаке величины ϵ_L.

Величина модуля ϵ_E определяется сложными процессами влагопереноса в зоне аэрации, а также физиологическими особенностями транспирации растений. Для описания основных черт этих процессов применяются эмпирические формулы, связывающие величину ϵ_E с глубиной залегания грунтовых вод. Наиболее распространенной формулой этого рода

служит зависимость С.Ф. Аверьянова [26]

$$\epsilon_E = \begin{cases} E_0 (1 - \Delta/\Delta_{кр})^{\kappa} & \text{при } \Delta \leqslant \Delta_{кр}, \\ 0 & \text{при } \Delta > \Delta_{кр}, \end{cases} \qquad (1.6)$$

где E_0 – испаряемость; Δ – глубина залегания грунтовых вод; $\Delta_{кр}$ – критическая глубина залегания грунтовых вод, по достижении которой расход грунтовых вод в зону аэрации практически прекращается; κ – эмпирический показатель. Величина κ изменяется в пределах от 1 до 3; в условиях совместного эффекта испарения и транспирации она близка к единице. Известны и другие зависимости типа (1.6) (С.И. Харченко [55] и др.), однако их использование связано с рядом расчетных неудобств.

Как показывают формулы (1.5) и (1.6), величины модулей эвапотранспирации и перетекания находятся в прямой зависимости от уровня (напора) подземных вод в каждой точке фильтрационного поля. При отборе подземных вод в зоне депрессии будет происходить снижение расхода грунтовых вод на испарение и транспирацию (если, конечно, их уровень в естественных условиях стоит выше критической глубины), а также станет привлекаться дополнительное питание за счет механизма перетекания из соседних пластов, причем суммарная величина привлекаемого питания оказывается тем большей, чем значительнее понижение. Это дает основание для выделения эвапотранспирации и перетекания в особую категорию факторов баланса подземных вод в нарушенных эксплуатацией условиях, а именно в категорию так называемого "компенсационного питания". Это название подчеркивает тот факт, что перетекание и уменьшение эвапотранспирации тормозят рост понижения, компенсируя до некоторой степени депрессию, создаваемую водоотбором. В отличие от двух выделенных факторов инфильтрация оросительных вод на полях не только не возрастает с увеличением понижения, а может даже несколько уменьшиться, т.е. будет обладать компенсационным действием в значительно меньшей мере. Поэтому включение его в категорию компенсационного питания, как правило, неоправданно.

Модуль водоотбора Υ зависит от размещения и режима работы водозаборных сооружений, т.е. от координат и времени. По признаку пространственного расположения основными видами водозаборов являются одиночные, линейные и площадные [6]. В случае площадного водозабора модуль $\Upsilon(M, t)$ представляет собой функцию координат точки M в области водоотбора (A); в случае линейного водозабора распределения модуля Υ сосредоточено на линии отбора (Z) и может быть представлено в виде

$$\Upsilon(M, t) = q(M, t)\, \delta(\varphi(M)), \qquad (1.7)$$

где $q(M, t)$ – линейная плотность отбора на линии (Z); $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака [11]; $\varphi(M) = 0$ – неявное уравнение линии (Z). Одиночный водозабор характеризуется модулем Υ, представляющим собой произведение дельта-функций:

$$\Upsilon(M, t) = Q(t)\, \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0), \qquad (1.8)$$

где $Q(t)$ – зависящий от времени дебит отбора; (x_0, y_0) – координаты точки M_0, в которой расположен водозабор.

Среди линейных водозаборов целесообразно выделить прямолинейные по конфигурации, а среди площадных – трапецеидальные, и в частности прямоугольные и треугольные. Особое значение указанных типов водозаборов обусловливается тем, что на основании принципа суперпозиции и общих теорем интегрального исчисления линейные и площадные водозаборы произвольных конфигураций и работающие с произвольными режимами могут быть с заданной точностью представлены в виде комбинации некоторого числа синхронных прямолинейных либо трапецеидальных участков.

Синхронными называются водозаборы, относительный дебит всех частей которых изменяется во времени по одному и тому же закону, т.е.

$$\Upsilon(M, t) = \Upsilon_0(t) f_0(M), \tag{1.9}$$

где $\Upsilon_0(t)$ – единый для всего водозабора модуль, $f_0(M)$ – его пространственная плотность; вводя в рассмотрение суммарный дебит

$$Q(t) = \iint\limits_{(A)} \Upsilon(M, t)\, dA, \tag{1.10}$$

уравнение (1.9) можно привести к виду

$$\Upsilon(M, t) = Q(t) f(M), \tag{1.11}$$

где

$$f(M) = f_0(M)/A, \tag{1.12}$$

A – площадь области (A); функция $f(M)$ может быть названа пространственной плотностью дебита синхронного водозабора. Аналогично плотность дебита синхронного линейного водозабора определяется выражением

$$\Upsilon(M, t) = q(t)\, \delta(\varphi(M)), \tag{1.13}$$

где дебит на единицу длины водозабора (погонный дебит) $q(t)$ зависит только от времени; наконец, в случае площадного водозабора, равномерно распределенного в пределах области (A),

$$\Upsilon(M, t) = \Upsilon(t), \quad M \in (A). \tag{1.14}$$

Режимы отбора подземных вод могут быть подразделены на три типа. Режим первого типа характеризуется постоянным или плавно изменяющимся во времени дебитом, режим второго типа – периодическими закономерными колебаниями дебита, режим третьего типа – дебитом, случайным образом варьирующим во времени. Первый из режимов характерен для условий отбора подземных вод для целей хозяйственно-питьевого водоснабжения, периодический режим – при ирригационном использовании подземных вод, если они представляют собой основной источник водообеспечения; стохастический режим имеет место в условиях совместного использования поверхностных и подземных вод, когда подземные воды выступают в качестве дополнительного источника оросительной воды.

В зависимости от каждого из перечисленных типов водоотбора решается и задача оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод. Наиболее

универсальным средством изучения геофильтрационных процессов в условиях всевозможных режимов водоотбора служат передаточные функции геофильтрационных систем. Применение этого аппарата оправдано тем, что в большинстве случаев геофильтрационные системы близки к линейным, для которых принцип суперпозиции справедлив во всех его вариантах.

Изменение напора подземных вод $H(M, t)$ под влиянием совместного действия факторов питания и разгрузки описывается дифференциальным уравнением фильтрации вида [58]

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{div}(T \operatorname{grad} H) + \epsilon_L + \epsilon_I - \epsilon_E - \Upsilon, \tag{1.15}$$

где μ – коэффициент водоотдачи; T – коэффициент водопроводимости (оба являются функциями точки M); t – время. До начала эксплуатации в области фильтрации существовал режим, который условно назовем естественным, подчиненный уравнению

$$\mu \frac{\partial H_e}{\partial t} = \operatorname{div}(T \operatorname{grad} H_e) + \epsilon_L^{(e)} + \epsilon_I^{(e)} - \epsilon_E^{(e)}, \tag{1.16}$$

где $H_e(M, t)$ – напор подземных вод в "естественных условиях" до начала отбора; $\epsilon_E^{(e)}$, $\epsilon_I^{(e)}$, $\epsilon_L^{(e)}$ – модули составляющих питания и разгрузки в "естественном" режиме. Вводя в рассмотрение функцию понижения $S = H_e - H$ и вычитая почленно уравнение (1.15) из уравнения (1.16), получим

$$\mu \frac{\partial S}{\partial t} = \operatorname{div}(T \operatorname{grad} S) - \Delta\epsilon_L - \Delta\epsilon_I - \Delta\epsilon_E + \Upsilon, \tag{1.17}$$

где $\Delta\epsilon_E = \epsilon_E^{(e)} - \epsilon_E$, $\Delta\epsilon_L = \epsilon_L - \epsilon_L^{(e)}$, $\Delta\epsilon_I = \epsilon_I - \epsilon_I^{(e)}$ – изменения модулей эвапотранспирации, перетекания и инфильтрации.

Глубина залегания грунтовых вод Δ связана с величиной понижения S уравнением

$$\Delta = \Delta_e + S, \tag{1.18}$$

где Δ_e – глубина залегания грунтовых вод в "естественном" режиме; в силу нелинейной зависимости (1.6) между $\Delta\epsilon_E$ и S уравнение (1.17) нелинейное (квазилинейное) [11]. Аналитическое решение этого уравнения при общих предпосылках неизвестно, и для его решения следует либо применять численные методы, либо линеаризовать уравнение. Рассмотрим один из вариантов линеаризации; для этого подставим (1.18) в (1.6) и определим величину $\Delta\epsilon_E$; производя элементарные преобразования, имеем

$$\Delta\epsilon_E = \epsilon_E^{(e)} \left\{ 1 - \left[\frac{1 - (\Delta_e + S)/\Delta_{кр}}{1 - \Delta_e/\Delta_{кр}} \right]^{\kappa} \right\}; \tag{1.19}$$

вводя величину критического понижения по формуле

$$S_{кр} = \Delta_{кр} - \Delta_e, \tag{1.20}$$

после преобразований получим

$$\Delta \epsilon_E = \epsilon_E^{(e)} \cdot k_E(S/S_{кр}), \tag{1.21}$$

где

$$k_E(z) = \begin{cases} 1-(1-z)^{\kappa}, & z \leqslant 1, \\ 1, & z > 1. \end{cases} \tag{1.22}$$

Линеаризацию зависимости (1.21) теперь можно было бы осуществить, используя приближенное равенство

$$k_E(z) = k_E(z_0) + k'_E(z_0)(z - z_0), \tag{1.23}$$

как это делалось в некоторых работах [26, 47]. Сразу же необходимо отметить, однако, что область применимости этого варианта линеаризации следует считать весьма узкой, так как при этом игнорируется то обстоятельство, что эвапотранспирация прекращается по достижении критической глубины залегания. При опускании уровня ниже критической глубины формула линеаризации (1.23) дает отрицательные значения $\Delta\epsilon_E$, т.е. разгрузка как бы сменяется питанием, что противоречит физическому смыслу рассматриваемого явления. Для более правильного учета этого обстоятельства в зависимости $k_E(z)$ предлагается корректировать значение $\epsilon_E^{(e)}$, выбирая его в расчете меньшим, чем в действительности. Необходимая расчетная величина $\epsilon_E^{(e)}$ при этом может выбираться на основе балансовых соображений. Основные предпосылки этого метода и конкретные расчетные зависимости для некоторых практически важных случаев приведены в 1.3 настоящей главы.

В результате линеаризации зависимости $\Delta\epsilon_E(S)$ получается приближенное равенство вида

$$\Delta \epsilon_E = b_E S, \tag{1.24}$$

где b_E по аналогии с коэффициентом b_L в формуле (1.5) может быть названа коэффициентом эвапотранспирации. В соответствии с формулой (1.5) изменение модуля перетекания $\Delta\epsilon_L$ равно $\Delta\epsilon_L = b_L(S - S_c)$, где S_c – понижение в смежном пласте. Если многослойное строение пласта не учитывается, принимается $S_c = 0$ и

$$\Delta \epsilon_L = b_L S. \tag{1.25}$$

Подставим выражения (1.24) и (1.25) в (1.17), получим

$$\mu \frac{\partial S}{\partial t} = \operatorname{div}(T \operatorname{grad} S) - bS + \Upsilon - \Delta\epsilon_I, \tag{1.26}$$

где коэффициент

$$b = b_L + b_E \tag{1.27}$$

может быть назван суммарным коэффициентом компенсационного питания эксплуатируемого пласта.

Как указывалось выше, инфильтрацию оросительных вод на полях целесообразно не включать в компенсационное питание; влияние этого фактора питания подземных вод учитывается с помощью введения в расчет

областей площадного нагнетания, расположенных на участках, соответствующих орошаемым массивам, причем модуль нагнетания определяется формулой (1.3). Поэтому, учитывая принцип суперпозиции, для решения уравнения (1.26) следует найти сначала его решение при $\Delta\epsilon_I = 0$, затем при $\Upsilon = 0$ и полученные поля понижений наложить. Учитывая аналогичность действий в том и в другом случаях, можно без ограничения общности принять $\Delta\epsilon_I = 0$. Окончательно подлежащее анализу уравнение примет вид

$$\mu \frac{\partial S}{\partial t} = \operatorname{div}(T \operatorname{grad} S) - bS + \Upsilon. \tag{1.28}$$

Уравнение (1.28) – линейное уравнение в частных производных параболического типа; при очевидных нулевых начальных и однородных граничных условиях его решение выражается через функцию Грина [11], которую, как представляется, целесообразно искать в области изображений по Лапласу по временно́й переменной. Именно, полагая, что

$$\hat{S}(M, p) = \int_0^\infty e^{-pt} S(M, t)\, dt \tag{1.29}$$

– изображение искомой функции, а

$$\hat{\Upsilon}(M, p) = \int_0^\infty e^{-pt} \Upsilon(M, t)\, dt \tag{1.30}$$

– изображение модуля водоотбора, получим уравнение эллиптического типа

$$\mu p \hat{S} = \operatorname{div}(T \operatorname{grad} \hat{S}) - b\hat{S} + \hat{\Upsilon}. \tag{1.31}$$

Если $G(M; \xi; \eta; p)$ – решение уравнения (1.31) при задании модуля отбора частного вида, а именно отбора, сосредоточенного в точке с координатами (ξ, η) (это соответствует скважине малого радиуса, расположенной в указанной точке)

$$\hat{\Upsilon}(M, p) = \hat{\Upsilon}(M, p)\, \delta(x-\xi)\, \delta(y-\eta), \tag{1.32}$$

решение уравнения (1.31) в случае модуля отбора общего вида строится с помощью интеграла свертки

$$\hat{S}(M, p) = T_*^{-1} \iint_{(A)} G(M; \xi, \eta; p)\, \hat{\Upsilon}(\xi, \eta; p)\, d\xi\, d\eta, \tag{1.33}$$

где T_* – характерное значение коэффициента водопроводимости, (A) – область водоотбора.

В частном случае, когда водоотбор осуществляется синхронно,

$$\hat{\Upsilon}(M, p) = \hat{Q}(p) f(x, y) \tag{1.34}$$

и равенство (1.33) может быть переписано в виде

$$\hat{S}(M, p) = (\hat{Q}(p)/T_*)\, U_S(M, p), \tag{1.35}$$

где

$$U_S(M, p) = \iint_{(A)} G(M; \xi, \eta; p) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{1.36}$$

Функция $U_S(M, p)$ в соответствии с терминологией теории линейных систем [8] называется передаточной функцией понижения, точнее, она представляет собой передаточную функцию линейной системы, в которой входным возмущением является дебит синхронного водозабора $Q(t)$, выходной реакцией – понижение $S(M, t)$ в точке M фильтрационного поля.

Выражение (1.35), связывающее изображение по Лапласу понижения с изображением величины синхронного водоотбора, позволяет получить зависимость между понижением уровня эксплуатируемого горизонта и вызывавшим это понижение эксплуатационным водоотбором. Для этого необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа от изображений к оригиналам.

Окончательная зависимость в общем виде записывается для напорных условий как

$$S(M, t) = \frac{Q(t)}{T_*} \quad R(M, t) \tag{1.37}$$

и для безнапорных условий – как

$$S(M, t) = H_e - \sqrt{H_e^2 - \frac{2Q(t)}{k_*} \quad R(M, t)}, \tag{1.38}$$

где $R(M, t)$ – гидравлическое сопротивление для точки с координатами M, представляющее собой обратное преобразование Лапласа от передаточной функции понижения, k_* и H_e – соответственно коэффициент фильтрации и мощность безнапорного водоносного горизонта.

Как упоминалось выше, помимо задачи по оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод, другой важнейшей задачей, возникающей в связи с использованием подземных вод, является задача по оценке изменений поверхностного стока при отборе подземных вод. Эта задача чаще всего возникает при составлении водохозяйственных балансов, когда необходимо оценить общие водные ресурсы территории – поверхностные и подземные. При эксплуатационном отборе подземных вод претерпевают изменения величина, а иногда и знак расхода подземного стока в наземную речную сеть, а также характеристики родникового и дренажного стока. Расход подземного притока–оттока через границу питания определяется, как хорошо известно, интегралом от произведения коэффициента водопроводимости на значение градиента потока, взятого вдоль границы. Поэтому и изменение расхода поверхностного стока, обусловленное эксплуатацией подземных вод, определяется интегралом вида

$$W(t) = \int_{(\Gamma)} T \frac{\partial S}{\partial \check{n}} d\Gamma, \tag{1.39}$$

где (Γ) – граница питания (урез водотока или водоема); $\check{n}$ – направление внутренней относительно области фильтрации нормали к ней.

Преобразуя равенство (1.39) по Лапласу, имеем

$$\hat{W}(p) = \int_{(\Gamma)} T \frac{\partial \hat{S}}{\partial \check{n}} d\Gamma; \tag{1.40}$$

подставляя равенство (1.35), получаем, что в случае синхронного отбора

$$\hat{W}(p) = \hat{Q}(p)\, U_W(p), \tag{1.41}$$

где функция

$$U_W(p) = \int_{(\Gamma)} \frac{T}{T_*} \frac{\partial U_S(M, p)}{\partial \check{n}}\, d\Gamma \tag{1.42}$$

может быть названа передаточной функцией редукции. Аналогично понижению для нахождения зависимости редукции поверхностного стока от эксплуатационного водоотбора при $Q(t) = Q_0 = \text{const}$ следует выполнить в (1.41) обратное преобразование Лапласа от изображения редукции к оригиналу. Искомая зависимость может быть представлена в виде

$$W(t) = Q_0\, w_0(t), \tag{1.43}$$

где $w_0(t)$ – функция относительной редукции, являющаяся обратным преобразованием Лапласа передаточной функции редукции.

Как уже отмечалось во введении, когда в нижнем створе участка находится водохранилище или озеро, часто оказывается необходимым определить величину интегральной редукции поверхностного стока $V(t)$.

Эта величина равна интегралу от редукции по времени

$$V(t) = \int_0^t W(\tau)\, d\tau, \tag{1.44}$$

т.е. для нахождения интегральной редукции требуется знать величину редукции или, вернее, передаточную функцию редукции.

Формулы (1.35) и (1.41) дают выражение изображений по Лапласу искомых характеристик понижения и редукции через изображения величины водоотбора $Q(t)$; таким образом, одной из основных задач становится получение передаточных функций понижения и редукции.

1.2. МЕТОДИЧЕСКИЙ АППАРАТ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕАКЦИЙ ГЕОФИЛЬТРАЦИОННЫХ СИСТЕМ

В 1.1 были получены формулы (1.35) и (1.41), связывающие изображения по Лапласу возмущения геофильтрационных систем, вызванные водоотбором $Q(t)$, с изображениями их реакций – понижения уровня (напора) $S(M, t)$ и редукции поверхностного слоя $W(t)$ – для общего случая зависимости дебита синхронного водозабора от времени. В настоящем параграфе на основании упомянутых формул конкретизируется методический аппарат исследования трех типов водоотбора в геофильтрационных системах, охарактеризованных в 1.1.

Так, в случае режима первого типа, т.е. при $Q(t) = Q_0 = \text{const}$, изображение величины водоотбора имеет вид

$$\hat{Q}(p) = Q_0/p. \tag{1.45}$$

Если ввести функцию относительной редукции $w_0(t)$ по формуле (1.43)

$$w_0(t) = W(t)/Q_0, \tag{1.46}$$

ес изображение по Лапласу $\hat{w}_0(p)$ определяется равенством

$$w_0(p) = p^{-1} U_w(p), \tag{1.47}$$

где $U_w(p)$ – передаточная функция редукции. Важной характеристикой изменения поверхностного слоя под влиянием отбора подземных вод с постоянным дебитом служит величина относительной редукции, определяемая как

$$\gamma = \lim_{t \to \infty} w_0(t). \tag{1.48}$$

Согласно предельным теоремам операционного исчисления [9], значение γ может быть определено с помощью выражения передаточной функции редукции $U_w(p)$, а именно

$$\gamma = U_w(0). \tag{1.49}$$

Необходимость в определении величины предельной относительной редукции возникает достаточно часто, особенно в условиях развитого компенсационного питания, когда величина γ составляет незначительную долю от единицы. В таких случаях иногда возможно ограничиться верхним пределом возможной величины сокращения стока и отказаться от расчета его динамики.

Если отбор подземных вод оказывает влияние на сток нескольких водотоков, можно определить для каждого из них передаточные функции редукции $U_w^{(j)}(p)$ и предельные относительные редукции γ_j, где $j = 1, 2, \ldots, r$; r – общее число водотоков. Величины предельных относительных редукций γ_j определяют при этом распределение редукции между реками. Часто в таких условиях только одно-два значения γ_j оказываются существенными, в то время как остальные близки к нулю. Это обстоятельство может служить для упрощения расчетной схемы: водотоки, для которых γ_j незначительны, могут быть исключены из рассмотрения.

Величина интегральной редукции согласно (1.44) и (1.46) при постоянном по величине отборе подземных вод определится из выражения

$$V(t) = Q_0 \int_0^t w_0(u)du. \tag{1.50}$$

Для наглядности и удобства расчетов вводится функция интегральной относительной редукции

$$v(t) = V(t)/Q_0 t. \tag{1.51}$$

Согласно формуле (1.50) она равна

$$v(t) = t^{-1} \int_0^t w_0(u)du. \tag{1.52}$$

В общем случае, когда передаточная функция редукции известна, для нахождения относительной редукции w_0 необходимо определить обратное преобразование Лапласа от изображения (1.47). Несмотря на то что довольно часто удается получить точное обращение преобразования Лапласа, еще чаще приходится прибегать к численным методам обращения.

Таблица 1

Значения функций $A_k(t)$ для численного обращения преобразования Лапласа по методу Л.К. Гохберга

$t/\Delta t$	1	2	3	4
		$N = 4$		
1,0	–1,481	4,790	–2,825	0,525
1,5	–2,122	5,285	–2,585	0,424
2,0	–2,225	4,841	–1,871	0,253
2,5	–2,075	3,997	–0,998	0,072
3,0	–1,796	2,981	–0,091	–0,100
3,5	–1,450	1,905	–0,792	–0,254
4,0	–1,074	0,828	–1,625	–0,385
4,5	–0,688	–0,218	–2,392	–0,493
5,0	–0,304	–1,211	–3,087	–0,578
5,5	0,069	–2,141	–3,707	–0,639
6,0	0,425	–3,002	–4,253	–0,679
6,5	0,761	–3,791	4,724	–0,697
7,0	1,075	–4,505	5,123	–0,695
7,5	1,365	–5,145	5,452	–0,673
8,0	1,631	–5,710	5,712	–0,633
		$N = 5$		
1	–3,236	9,775	–8,077	2,952 –0,414
2	–2,014	4,244	–1,243	–0,038 0,050
3	–0,706	–0,117	3,173	–1,610 0,257
4	0,241	–2,912	5,564	–2,206 0,310
5	0,870	–4,547	6,601	–2,201 0,277
6	1,252	–5,355	6,732	–1,825 0,195
7	1,451	–5,574	6,250	–1,216 0,089
8	1,512	–5,371	5,355	–0,467 –0,028
9	1,469	–4,862	4,180	0,359 –0,146
10	1,349	–4,137	2,826	1,221 –0,259
11	1,170	–3,257	1,365	2,088 –0,363
12	0,952	–2,279	–0,153	2,937 –0,454
13	0,702	–1,234	–1,689	3,753 –0,531
14	0,432	–0,154	–3,210	4,525 –0,593
15	0,150	0,938	–4,696	5,245 –0,638
16	–0,137	2,022	–6,122	5,903 –0,665

Библиография по численным методам обращения преобразования Лапласа насчитывает сотни наименований [28, 62]. В классе интерполяционных методов функция-изображение $Y(p)$ оригинала $y(t)$ интерполируется в узлах p_k, выбираемых обычно на вещественной оси, по системе базисных функций $\{\omega_\nu(p)\}_{\nu=1}^{N}$:

$$Y(p) = \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu \omega_\nu(p),$$

где коэффициенты a_ν зависят от узлов интерполяции и значений функции

$Y(p)$ в них. Существует множество частных интерполяционных методов обращения преобразования Лапласа, среди которых представляется возможным отметить метод Л.К. Гохберга [15]. В этом методе использована система функций $\omega_\nu(p) = p^{-(1+1/\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Для применения метода следует вычислить значения оригинала Карсона $pY(p)$ в узлах

$$p_k = 1/(\Delta t \cdot 2^{k-1}), \qquad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где Δt – выбранный масштаб времени. Формула обращения имеет вид

$$y(t) = \sum_{k=1}^{N} p_k Y(p_k) A_k(t), \tag{1.53}$$

где функции $A_k(t)$ для $N = 4$ и $N = 5$ табулирована [15]; их значения приведены в табл. 1. Практика расчетов показывает, что применение метода Л.К. Гохберга обеспечивает точность, соответствующую относительной ошибке не более первых процентов от истинного значения.

В случае режима водоотбора второго типа реакция геофильтрационной системы водозабор–водоносный пласт на периодическое возмущение представляется в виде [2]

$$S(M, t) = S_0(M, t) + S_p(M, t) + S_{tr}(M, t), \tag{1.54}$$

где $S(M, t)$ – понижение уровня (напора) подземных вод в точке M фильтрационного поля,

$$S_0(M, t) = (Q_0/T_*) R_0(M, t) \tag{1.55}$$

– апериодическая составляющая понижения в момент времени t при постоянном среднегодовом дебите водооборота Q_0; $R_0(M, t)$ – гидравлическое сопротивление; $S_p(M, t)$ – периодическая составляющая понижения уровня (напора), вызываемая колебаниями дебита около его среднегодового значения Q_0. Ниже, в главе 4, обосновывается возможность представления периодического дебита $Q(t)$ в виде отрезка ряда Фурье:

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{n=1}^{N} Q_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{\tau} - \varphi_n\right), \tag{1.56}$$

где Q_n – амплитуда; φ_n – фаза n-й гармоники разложения; τ – период, равный одному году. Периодическая составляющая понижения при этом может быть представлена в виде отрезка ряда Фурье вида

$$S_p(M, t) = \sum_{n=1}^{N} (Q_n/T_*) R_n(M) \cos\left(\frac{2\pi nt}{\tau} - \varphi_n - \Psi_n(M)\right), \tag{1.57}$$

где величина $R_n(M)$ называется гармоническим сопротивлением n-й гармоники; угол $\Psi_n(M)$ – ее фазовым сдвигом.

Последняя составляющая в формуле (1.54) $S_{tr}(M, t)$ – переходная, обусловленная первоначальным выведением системы из состояния покоя. С помощью более подробного анализа можно показать, что значения этой компоненты понижения затухают в течение первых одного–трех лет практически в любых гидрогеологических и эксплуатационных условиях.

Поэтому при оценке эксплуатационных ресурсов допустимо считать, что $S(M, t) \approx S_0(M, t) + S_p(M, t)$.

Аналогично выражению (1.54) можно представить и изменение расхода водотока под действием периодического возмущения

$$W(t) = W_0(t) + W_p(t) + W_{tr}(t), \tag{1.58}$$

где

$$W_0(t) = Q_0\, w_0(t) \tag{1.59}$$

– апериодическая составляющая редукции, $w_0(t)$ – функция относительной редукции,

$$W_p(t) = \sum_{n=1}^{N} Q_n\, w_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{\tau} - \varphi_n - \psi_n\right) \tag{1.60}$$

– периодическая составляющая изменения поверхностного стока под влиянием отбора подземных вод; w_n и ψ_n – соответственно коэффициент влияния и фазовый сдвиг редукции на частоте n-й гармоники; $W_{tr}(t)$ – переходная составляющая изменения расхода, относительно которой верно все сказанное выше по поводу переходной компоненты понижения.

Величины гармонических сопротивлений и коэффициентов влияния в формулах (1.57), (1.60) определяются на основании так называемых частотных характеристик системы [2]. Частотной характеристикой называется комплексная функция $U(i\omega)$, получающаяся при подстановке чисто мнимого значения $p = i\omega$ в выражение передаточной функции $U(p)$. Разделяя модуль и аргумент выражения для частотной характеристики понижения, получаем

$$U_S(M, i\omega) = R(M, \omega)\, e^{-i\Psi(M,\omega)}, \tag{1.61}$$

а для частотной характеристики редукции

$$U_W(i\omega) = w(\omega) e^{-i\psi(\omega)}, \tag{1.62}$$

причем модули этих выражений называются амплитудно-частотными, а взятые с обратным знаком аргументы – фазо-частотными характеристиками систем. При этом в соответствии с результатами теории линейных систем [2, 8] гармонические сопротивления $R_n(M)$ и коэффициенты влияния w_n выражаются через соответствующие частотные характеристики следующим образом:

$$R_n(M) = R(M, n\,\omega_1), \tag{1.63}$$

$$\Psi_n(M) = \Psi(M, n\,\omega_1), \tag{1.64}$$

$$w_n = w(n\,\omega_1), \tag{1.65}$$

$$\psi_n = \psi(n\,\omega_1), \tag{1.66}$$

где $\omega_1 = 2\pi/\tau$ – основная частота колебаний.

Выражения для частотных характеристик понижения и редукции, соответствующие наиболее распространенным гидрогеологическим схемам, приведены в главах 4 и 5.

В случае режима третьего типа дебит водозаборов $Q(t)$ представляет собой случайную функцию времени, которая может быть представлена в виде суммы двух составляющих – математического ожидания $\bar{Q}(t)$ и централизованного отклонения $Q^0(t)$:

$$Q(t) = \bar{Q}(t) + Q^0(t). \tag{1.67}$$

Реакция геофильтрационной системы на возмущение этого типа с достаточной точностью может быть представлена в виде наложения реакций на математическое ожидание дебита $\bar{Q}(t)$ и на его центрированную компоненту $Q^0(t)$:

$$S(M, t) = \bar{S}(M, t) + S^0(M, t), \tag{1.68}$$

$$W(t) = \bar{W}(t) + W^0(M, t), \tag{1.69}$$

где $\bar{S}(M, t)$ – понижение уровня (напора), $\bar{W}(t)$ – изменение расхода поверхностного стока при детерминированном дебите $\bar{Q}(t)$; $S^0(M, t)$, $W^0(t)$ – соответственно центрированные отклонения понижения и редукции под действием центрированной составляющей дебита $Q^0(t)$.

Из вероятностных характеристик центрированного случайного процесса $Q(t)$, предполагаемого стационарным (в широком смысле), наибольший интерес представляют автокорреляционная функция $K_\Delta(\xi)$ и одномерная плотность распределения $f_\Delta(Q^0)$. Если эта плотность нормальна, отклонения $S^0(M, t)$ и $W^0(t)$ также распределены по нормальному закону. Если же $f_\Delta(Q^0)$ не является нормальной плотностью распределения, $S^0(M, t)$ и $W^0(t)$ также не распределены по нормальному знакону. Более того, определить законы их распределения практически не представляется возможным. Однако в силу определенной инерционности геофильтрационных систем, которая усиливается для точек фильтрационного поля, более удаленных от водозаборов, проявляются нормализующие свойства этих систем, выражающиеся в том, что распределения отклонений реакций ближе к нормальному закону, нежели распределение возмущения [44].

Согласно терминологии теории стационарных случайных процессов, спектральной функцией отклонения водоотбора называется косинус-преобразования Фурье автокорреляционной функции $K_\Delta(\xi)$:

$$L_\Delta(\omega) = \pi^{-1} \int_0^\infty K_\Delta(\xi) \cos \omega\xi \, d\xi. \tag{1.70}$$

Автокорреляционная функция $K_\Delta(\xi)$ выражается при этом через свою спектральную функцию интегралом

$$K_\Delta(\xi) = 2 \int_0^\infty L_\Delta(\omega) \cos \omega\xi \, d\omega. \tag{1.71}$$

С помощью аналогичных преобразований связаны автокорреляционные функции и спектральные функции понижения и редукции:

$$K_S(M, \xi) = 2 \int_0^\infty L_S(M, \omega) \cos \omega\xi \, d\omega, \tag{1.72}$$

$$K_W(\xi) = 2\int_0^\infty L_W(\omega)\cos\omega\xi\, d\omega, \tag{1.73}$$

где $K_S(M,\ \xi)$ и $K_W(\xi)$ – соответственно автокорреляционные функции понижения и редукции. Спектральные функции понижения $L_S(M,\ \omega)$ и редукции $L_W(\omega)$ выражаются через спектральную функцию водоотбора с помощью частотных характеристик систем

$$L_S(M,\omega) = R^2(M,\omega)\, L_\Delta(\omega), \tag{1.74}$$

$$L_W(\omega) = w^2(\omega)\, L_\Delta(\omega), \tag{1.75}$$

где амплитудно-частотные характеристики понижения и редукции выражаются соответственно формулами (1.61) и (1.62).

Взаимные корреляционные функции $K_{\Delta S}(M,\ \xi)$ между отклонениями понижения и дебита, а также $K_{\Delta S}(\xi)$ между отклонениями редукции и дебита связаны с соответствующими спектральными функциями:

$$K_{\Delta S}(M,\xi) = 2\int_0^\infty L_{\Delta S}(M,\omega)\cos\omega\xi\, d\omega, \tag{1.76}$$

$$K_{\Delta W}(\xi) = 2\int_0^\infty L_{\Delta W}(\omega)\cos\omega\xi\, d\omega, \tag{1.77}$$

где

$$L_{\Delta S}(M,\omega) = R(M,\omega)\cos\Psi(M,\omega)\, L_\Delta(\omega), \tag{1.78}$$

$$L_{\Delta W}(\omega) = w(\omega)\cos\psi(\omega)\, L_\Delta(\omega). \tag{1.79}$$

Для анализа отклонений выходных величин наибольшее значение имеют их среднеквадратичные отклонения и коэффициенты корреляции между отклонениями возмущения и реакций. Среднеквадратичное отклонение понижения уровня (напора) подземных вод в точке M фильтрационного поля равно

$$\sigma_S(M) = \sqrt{K_S(M,0)}; \tag{1.80}$$

среднеквадратичное отклонение редукции –

$$\sigma_W = \sqrt{K_W(0)}. \tag{1.81}$$

Коэффициент корреляции между отклонениями дебита и понижения уровня (напора) подземных вод в точке M определяется равенством

$$\rho_S(M) = K_{\Delta S}(M,0)/\sigma_S(M)\,\sigma_\Delta, \tag{1.82}$$

где

$$\sigma_\Delta = \sqrt{K_\Delta(0)} \tag{1.83}$$

– среднеквадратичное отклонение величины водоотбора.

Аналогично коэффициент корреляции между отклонениями редукции и дебита ρ_W определяется равенством вида

$$\rho_W = K_W(0)/\sigma_W\,\sigma_\Delta. \tag{1.84}$$

Кратко описанный в настоящем параграфе математический аппарат позволяет, как будет показано ниже, конкретизировать общие соотношения для типичных гидрогеологических схем и получать расчетные зависимости для них или в аналитической форме, или в форме алгоритмов, удобных для реализации на ЭВМ.

1.3. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПОНИЖЕНИЯ И РЕДУКЦИИ ДЛЯ УСЛОВИЙ ОГРАНИЧЕННЫХ В ПЛАНЕ ВОДОНОСНЫХ ПЛАСТОВ

Ограниченные в плане водоносные горизонты широко распространены в природе. Более того, говоря строго, любые природные бассейны и потоки подземных вод ограничены. Схемы неограниченных пластов, встречающиеся в гидрогеологических расчетах, представляют собой приближения, справедливые лишь в той мере, в какой в каждом отдельном случае можно пренебречь влиянием границ.

Уравнение фильтрации подземных вод в двумерной области фильтрации (D) может быть записано в виде, эквивалентном уравнению (1.28):

$$\mu \frac{\partial S}{\partial t} + F_0 S = \Upsilon, \tag{1.85}$$

где F_0 – двумерный линейный оператор, определенный выражением

$$F_0 S = -\operatorname{div}(T \operatorname{grad} S) + bS. \tag{1.86}$$

Гидрогеологические параметры предполагаются переменными по области фильтрации, причем внутри нее выполняются условия $\mu > 0$, $T \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Для удобства анализа представляется целесообразным ввести относительный масштаб единиц. Именно, выбирая характерный линейный размер L и характерное (опорное) значение коэффициента водопроводимости T_*, осуществляем масштабные преобразования $\bar{x} = x/L$, $\bar{y} = y/L$. Исходная область фильтрации (D) на плоскости (x, y) перейдет при этом в преобразованную область (D') на плоскости $(\bar{x}, \bar{y})$. Вводя, кроме того, характерные значения коэффициента уровнепроводности a_* и водоотдачи $\mu_* = T_*/a_*$, полагаем $\bar{\mu} = \mu/\mu_*$. В качестве характерного значения времени выбираем величину

$$\tau = L^2/a_*$$

и полагаем $\bar{t} = t/\tau$.

Выражая во введенных относительных единицах уравнение (1.85), получаем

$$\bar{\mu} \frac{\partial S}{\partial t} + \bar{F}_0 S = \frac{\tau}{\mu_*} \Upsilon, \tag{1.87}$$

где оператор $\bar{F}_0$ действует по формуле

$$\bar{F}_0 u = -\operatorname{div}(\bar{T} \operatorname{grad} u) + \bar{b}u, \tag{1.88}$$

в которой

$$\bar{b} = \tau/\mu_*, \tag{1.89}$$

а взятие градиента и дивергенции производятся по отношению к новым, безразмерным координатам $\bar{x}$, $\bar{y}$.

Полагая, как обычно, что величина коэффициента водоотдачи не зависит от времени, а также что $\bar{\mu} > 0$ во всей области фильтрации, разделим члены уравнения (1.87) на $\bar{\mu}$ и преобразуем по Лапласу по отношению ко временно́й переменной

$$\bar{p}\hat{S} + \bar{F}\hat{S} = (\tau/\mu_*)\,\bar{\mu}^{-1}\hat{\Upsilon}, \tag{1.90}$$

где $\hat{S}$ и $\hat{\Upsilon}$ – соответственно преобразованные по Лапласу временны́е зависимости понижения и модуля водоотбора; $\bar{p}$ – параметр преобразования Лапласа, соответствующий безразмерному масштабу времени; $\bar{F}$ – оператор, действующий согласно формуле

$$\bar{F}u = \bar{\mu}^{-1}\bar{F}_0\,u.$$

Оператор $\bar{F}$ стационарен и положительно определен; будучи задан на множестве функций, имеющих областью определения преобразованную область фильтрации (D'), он имеет дискретную последовательность собственных значений λ_k и полную ортонормированную последовательность соответствующих им собственных функций $e_k(M')$, где M' – точка с координатами $(\bar{x}, \bar{y})$ в области (D'). Эта последовательность характеризуется следующими свойствами [43]:

$$\left.\begin{aligned} Fe_k &= \lambda_k e_k, \\ (e_k, e_j) &= \delta_{kj} \end{aligned}\right\} \qquad k, j = 1, 2, \ldots, \tag{1.91}$$

где скалярное произведение (u, v) функций $u(M')$ и $v(M')$ представляет собой интеграл от их произведения по области (D'):

$$(u, v) = \iint\limits_{(D')} u\,v\,d\bar{x}\,d\bar{y};$$

δ_{kj} – символ Кронекера [14].

Полнота системы собственных функций означает, что каждая функция, определенная по области (D'), в том числе и решение уравнения (1.90) $\hat{S}(M', \bar{p})$, а также произведение $\bar{\mu}^{-1}\hat{\Upsilon}(M', \bar{p})$, могут быть представлены в виде разложений по собственным функциям:

$$\hat{S}(M', \bar{p}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(\bar{p})}{T_*}\, e_k(M'), \tag{1.92}$$

$$\bar{\mu}^{-1}\hat{\Upsilon}(M', p) = \sum_{k=1}^{\infty} [\hat{Q}(\bar{p})/L^2]\,\chi_k\, e_k(M'), \tag{1.93}$$

где коэффициенты χ_k определяются формулой

$$\chi_k = (\bar{\mu}^{-1} f, e_k), \tag{1.94}$$

причем безразмерная функция $f(\bar{x}, \bar{y})$ характеризует распределение модуля водоотбора по преобразованной области (D'); коэффициенты σ_k неизвестны, и их определение составляет содержание задачи. Подставляя разложения (1.92) и (1.93) в уравнение (1.90), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{p}\,\frac{\sigma_k}{T_*}\, e_k(M') + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{F}\,\frac{\sigma_k}{T_*}\, e_k(M') = \frac{\tau}{\mu_*}\,\frac{\hat{Q}(\bar{p})}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k\, e_k(M'). \tag{1.95}$$

Коэффициенты $\frac{\sigma_k}{T_*}$ под знаком второй из сумм в левой части последнего выражения могут быть вынесены перед символом оператора, и, пользуясь первым из равенств (1.91), получаем

$$\overline{F}\left(\frac{\sigma_k}{T_*}\right) e_k(M') = \frac{\sigma_k}{T_*}\overline{F}\, e_k = \frac{\sigma_k}{T_*}\lambda_k\, e_k .$$

Собирая коэффициенты при собственных функциях $e_k(M')$ в (1.95), находим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k(M')\left[(\bar{p}+\lambda_k)\frac{\sigma_k}{T_*} - \frac{\tau}{\mu_* L^2}\hat{Q}(\bar{p})\,\chi_k\right] = 0. \qquad (1.96)$$

Пользуясь линейной независимостью функций $e_k(M')$, т. е. полагая член в квадратных скобках выражения (1.96) равным нулю и учитывая равенство (1.87), определяем, что

$$\sigma_k(\bar{p}) = \hat{Q}(\bar{p})\,\frac{\chi_k}{\bar{p}+\lambda_k}. \qquad (1.97)$$

Подставляя, наконец, (1.97) в (1.92) и сравнивая результат с выражением (1.85), устанавливаем, что передаточная функция понижения в рассматриваемом случае имеет разложение вида

$$U_S(M, p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k}{\bar{p}+\lambda_k}\, e_k(M'). \qquad (1.98)$$

Разложение передаточной функции понижения вида (1.98) ввиду его универсальности в условиях ограниченных водоносных пластов может быть названо каноническим разложением передаточной функции понижения.

На основании разложения (1.98) могут быть определены выражения временны́х зависимостей понижения, соответствующих различным режимам водоотбора. Так, при $Q(t) = Q_0 = \text{const}$ имеет место равенство вида (1.37), где гидравлическое сопротивление $R_0(M, t)$ выражается в виде соответствующего канонического разложения

$$R_0(M, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k}{\lambda_k}\left(1 - e^{-\lambda_k \bar{t}}\right) e_k(M'). \qquad (1.99)$$

Для условий периодического водоотбора $Q(t)$, представляемого в виде отрезка ряда Фурье (1.56), частотная характеристика передаточной функции понижения может быть выражена в виде комплекса

$$U_S(M, i\omega) = A_r(M', \bar{\omega}) - i\,A_i(M', \bar{\omega}), \qquad (1.100)$$

где

$$\bar{\omega} = L^2\,\omega/a_*,$$

$$A_r(M', \bar{\omega}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k\,\lambda_k}{\lambda_k^2 + \bar{\omega}^2}\, e_k(M'), \qquad (1.101)$$

$$A_i(M', \bar{\omega}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k \bar{\omega}}{\lambda_k^2 + \bar{\omega}^2} e_k(M'). \quad (1.102)$$

Амплитудная и фазовая частотная характеристики понижения определятся при этом как модуль и аргумент комплекса (1.100)

$$R(M, \omega) = \sqrt{A_r^2(M', \bar{\omega}) + A_i^2(M', \bar{\omega})}, \quad (1.103)$$

$$\operatorname{tg} \Psi(M, \omega) = A_i(M', \bar{\omega}) / A_r(M', \bar{\omega}). \quad (1.104)$$

Формулы (1.100)–(1.102) являются следствием подстановки $\bar{p} = i\bar{\omega}$ в выражение (1.98) и последующего разделения вещественной и мнимой частей.

Использование канонического разложения передаточной функции понижения для гидрогеологических расчетов представляется перспективным ввиду четкого разграничения природных и искусственных факторов в структуре формулы (1.98). Так, от размещения водозаборных устройств по области (D) зависят лишь коэффициенты χ_k, в то время как параметры λ_k и функции $e_k(M')$, обусловленные природными факторами, представляют собой постоянные характеристики района и могут быть определены один раз навсегда. Это обстоятельство особенно существенно при создании постоянно действующих моделей геофильтрационных систем, так как применение для этого, например, разностных методов при оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод предполагает наличие детальной информации обо всех полях гидрогеологических параметров и геометрии области фильтрации на каждом шаге по времени, что особенно обременительно при периодическом режиме отбора, при расчетах по оптимизации размещения водозаборов и их режима, а также при имитационном моделировании геофильтрационных систем. Использование канонических разложений передаточных функций представляется более экономичным, несмотря на необходимость затраты больших усилий на предварительном этапе, так как после вычисления собственных элементов оператора фильтрации дальнейшие расчеты становятся достаточно простыми. Так, например, при Q = const выражение гидравлического сопротивления определяется по простой формуле (1.99). Сходные разложения действительны для частотных характеристик понижения, необходимых при расчете периодического режима водоотбора и оценке вероятностных свойств реакций геофильтрационных систем (выражения для частотных характеристик приведены в 1.2 настоящей главы). Наконец, при варьировании расположения водозаборов в области фильтрации в разложении (1.98) будут изменяться только коэффициенты χ_k, что позволяет свести эту задачу к проблеме выбора наилучшего в определенном смысле набора этих коэффициентов.

Как подчеркивалось выше, главная сложность при использовании метода канонического разложения передаточной функции понижения заключается в том, что определение собственных элементов оператора фильтрации довольно затруднительно и в аналитической форме возможно в ограниченном классе простых моделей областей. Поэтому основная задача состоит в разработке приближенных методов построения собственных элементов, пригодных для практического использования.

Задачи на определение собственных значений и функций дифференциальных операторов, подобных оператору фильтрации $\bar{F}$, широко известны в

различных физических и технических дисциплинах [25]. Наибольшее распространение получили сеточные и вариационные методы решения этих задач. Не умаляя несомненных достоинств сеточных методов, отметим, что применение вариационных методов представляется все же более перспективным для целей гидрогеологических расчетов, так как при этом оказывается возможным учитывать многообразную априорную информацию о геофильтрационных условиях и ожидаемых результатах расчета, что позволяет существенно повысить его эффективность. Главным препятствием на пути применения классических вариационных методов для решения задач математической физики была невозможность учета геометрии областей и сложных граничных условий; в настоящее время появились действенные способы, позволяющие задавать на аналитическом уровне информацию о сколь угодно сложном характере границ области фильтрации и полей гидрогеологических параметров [49].

Вариационные методы математической физики основаны на замене решения исходного уравнения вида (1.90) на эквивалентную задачу минимизации квадратического функционала

$$I(\hat{S}) = (\bar{F}\hat{S} + \bar{p}\hat{S}, \hat{S}) - 2\frac{\tau}{\mu_*}(\hat{S}, \bar{\mu}^{-1}\hat{\Upsilon}). \qquad (1.105)$$

Для приближенного решения этой вариационной задачи применяется известный метод Ритца. Для этого последовательность координатных функций $\psi_k(M')$, определенных на области (D') и удовлетворяющих граничным условиям, и минимум функционала (1.105) разыскиваются среди линейных комбинаций вида

$$\hat{S}_N = \frac{\hat{Q}(\bar{p})}{T_*} \sum_{k=1}^{N} s_k \psi_k(M'). \qquad (1.106)$$

В наиболее общем случае единственное условие, предъявляемое к системе функций $\psi_k(M')$, – ее полнота. Однако от выбора координатных функций во многом зависит эффективность решения задачи. Наиболее важные аспекты выбора координатных функций освещены в работе [42] и во многих других. Теоретическое положение излагаемого ниже метода, кроме того, выглядит более компактно и в случае ортонормированности координатной последовательности функций. Усложнения, вносимые в теорию при неортогональных функциях $\psi_k(M')$, носят технический характер. Поскольку от любой полной системы координатных функций с помощью процедуры ортонормализации Грама–Шмидта [14] можно перейти к эквивалентной ей ортонормированной системе, ниже без ограничения общности предполагается, что функции $\psi_k(M')$ удовлетворяют условиям ортонормированности $(\psi_k, \psi_j) = \delta_{kj}$.

Подстановка $\hat{S}_N$, определенного разложением (1.106), в функционал (1.105) превращает его в квадратичную форму N переменных $s_1, s_2, \ldots, s_N$. Отбрасывание несущественного общего множителя приводит эту форму к виду

$$I_N = \sum_{j,k=1}^{N} (\Omega_{kj} + \delta_{kj}\bar{p}) s_j s_k - 2\sum_{k=1}^{N} g_k s_k, \qquad (1.107)$$

где

$$\Omega_{kj} = (\bar{F}\,\psi_k,\ \psi_j), \tag{1.108}$$

$$g_k = (\bar{\mu}^{-1} f,\ \psi_k),\ k, j = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.109}$$

Как известно [25, 42, 43], минимум формы I_N достигается при коэффициентах s_k, удовлетворяющих системе линейных алгебраических уравнений, получающихся, если приравнять к нулю частные производные от I_N по всем s_k.

Вводя векторно-матричные обозначения

$$\Omega = (\Omega_{kj})_{k,j=1}^{N};\ \mathbf{G} = (g_k)_{k=1}^{N};\ \mathbf{X} = (s_k)_{k=1}^{N},$$

упомянутую систему уравнений можно компактно записать в виде

$$(\Omega + \bar{p}\,\mathbf{E})\,\mathbf{X} = \mathbf{G}, \tag{1.110}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

Симметричная матрица Ω имеет положительные собственные числа $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_N$ и соответствующие им ортонормированные собственные векторы $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \ldots, \mathbf{Z}_N$, образующие базис в N-мерном арифметическом пространстве. Вектор $\mathbf{G}$ из этого пространства может поэтому быть представлен в виде разложения

$$\mathbf{G} = \sum_{k=1}^{N} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_k)\,\mathbf{Z}_k, \tag{1.111}$$

коэффициенты которого суть скалярные произведения вектора $\mathbf{G}$ на орты базиса. Вектор $\mathbf{X}$ может быть представлен с помощью аналогичного разложения, но с неизвестными пока коэффициентами

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{N} x_k\,\mathbf{Z}_k. \tag{1.112}$$

Подставляя разложения (1.111) и (1.112) в уравнение (1.110) и пользуясь равенством $\Omega \mathbf{Z}_k = \Lambda_k \mathbf{Z}_k$, находим, что

$$x_k = \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_k)}{\bar{p} + \Lambda_k}. \tag{1.113}$$

Компоненты s_k вектора $\mathbf{X}$ при этом выразятся как

$$s_k = \sum_{j=1}^{N} z_j^{(k)}\, x_j, \tag{1.114}$$

где $z_j^{(k)}$ – k-я компонента вектора $\mathbf{Z}_j$. Подставляя (1.114) в выражение (1.106), получим

$$\hat{S}_N = \frac{\hat{Q}(\bar{p})}{T_*} \sum_{k=1}^{N} \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_k)}{\bar{p} + \Lambda_k}\, \tilde{e}_k(M'), \tag{1.115}$$

где

$$\tilde{e}_k(M') = \sum_{j=1}^{N} z_j^{(k)} \psi_k(M'). \tag{1.116}$$

Сравнивая выражения (1.115) и (1.35), устанавливаем, что сумма

$$U_S^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_k)}{\bar{p} + \Lambda_k} \tilde{e}_k(M') \tag{1.117}$$

представляет собой N-е приближение передаточной функции понижения. При $N \to \infty$ собственные числа Λ_k стремятся к собственным значениям λ_k оператора $\bar{F}$, функции $\tilde{e}_k(M')$ – к соответствующим собственным функциям $e_k(M')$. Таким образом, сопоставляя формулы (1.117) и (1.98), заключаем, что скалярные произведения $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_k)$ соответствуют коэффициентам χ_k в разложении (1.98).

Определенным недостатком описанного выше метода Ритца расчета собственных элементов оператора фильтрации и передаточной функции понижения является недостаточно быстрая сходимость. Отчасти это обусловлено тем обстоятельством, что его расчетные формулы не обеспечивают выполнение баланса вещества.

В предалагаемой ниже модификации метода, где этот недостаток устранен, достигается более высокая эффективность расчетов. Уравнение водного баланса эксплуатируемого пласта имеет вид

$$Q(t) = \iint_{(D)} \mu \frac{\partial S}{\partial t} dD + \int_{(\Gamma)} T \frac{\partial S}{\partial \check{n}} d\Gamma + \iint_{(D)} b\, S\, dD, \tag{1.118}$$

где (Γ) – граница питания области (D); $\check{n}$ – внутренняя нормаль к ней. Члены в правой части (1.112) представляют собой составляющие расхода водоотбора, обусловленные соответственно сработкой статических запасов, сокращением поверхностного стока и привлекаемым (компенсационным) питанием. Приводя (1.118) к безразмерному масштабу единиц и осуществляя преобразование Лапласа по временно́й переменной, имеем

$$\Xi_p(\hat{S}) = \hat{Q}(p)/T_*, \tag{1.119}$$

где Ξ_p – линейный функционал, определяемый равенством

$$\Xi_p(u) = \iint_{(D')} (\bar{\mu}\, \bar{p}\, u + \bar{b} u)\, dD' + \int_{(\Gamma')} \bar{T} \frac{\partial u}{\partial \check{n}_0} d\Gamma', \tag{1.120}$$

в котором (Γ') – часть границы области (D'), на которой заданы условия питания; $\check{n}_0$ – внутренняя нормаль к ней.

В соответствии с методом множителей Лагранжа для решения задач на условный экстремум вместо функционала (1.105) при этом рассматривается функционал

$$I^*(\hat{S}) = I(\hat{S}) - 2\nu \frac{\hat{Q}}{T_*}\left(\frac{\hat{Q}}{T_*} - \Xi_p(\hat{S})\right), \tag{1.121}$$

где ν – безразмерный, неизвестный пока множитель Лагранжа. Подставляя

в (1.121) разложение (1.106), получим вместо квадратичной формы (1.107) модифицированную форму вида

$$I_N^* = I_N - 2\nu\left(1 - \sum_{k=1}^{N} \xi_k s_k\right),$$

где

$$\xi_k = \Xi_p(\psi_k). \tag{1.122}$$

Приравнивая к нулю частные производные от I_N^* по всем s_k и ν, получаем систему $N+1$ линейного алгебраического уравнения относительно этих неизвестных, а именно

$$\left.\begin{aligned} &(\Omega + \bar{p}\,\mathbf{E})\,\mathbf{X} + \nu\vec{\xi} = \mathbf{G}, \\ &(\vec{\xi}\,\mathbf{X}) = 1, \end{aligned}\right\} \tag{1.123}$$

где $\vec{\xi}$ – вектор с компонентами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$.

Решение этой системы компактно записывается в терминах собственных элементов матрицы Ω. Используя разложения (1.111) и (1.112), получаем аналогично формуле (1.113), что

$$x_k = \frac{(\tilde{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{Z}_k)}{\bar{p} \cdot \Lambda_k}, \tag{1.124}$$

где

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} - \nu\vec{\xi},$$

а множитель Лагранжа ν определяется равенством

$$\nu = \frac{\sum_{k=1}^{N} (\bar{p} + \Lambda_k)^{-1} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_k)(\vec{\xi} \cdot \mathbf{Z}_k) - 1}{\sum_{k=1}^{N} (\bar{p} + \Lambda_k)^{-1} (\vec{\xi} \cdot \mathbf{Z}_k)^2}. \tag{1.125}$$

Множитель ν, а вместе с ним компоненты векторов $\tilde{\mathbf{G}}$ и $\mathbf{X}$ станут при этом рациональными функциями параметра $\bar{p}$, причем функциями довольно сложной структуры. При наличии в расчетной схеме границ совершенного или несовершенного питания, а также в условиях площадного компенсационного питания эксплуатируемого горизонта подземных вод увеличение времени эксплуатации может повлечь за собой стабилизацию значений понижения, если, конечно, гидрогеологические условия, и в первую очередь величина допустимого понижения, позволят это. В этих условиях все изложенные выше результаты могут быть значительно упрощены, если ограничиться требованием выполнения водного баланса в стационарном режиме, соответствующем пределу при $t \to \infty$ или, что то же самое, при $p = 0$ в соответствующих изображениях Карсона–Лапласа. При этом $\nu = \nu_0$, где

$$\nu_0 = \frac{\sum_{k=1}^{N} \Lambda_k^{-1} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_k)(\vec{\xi} \cdot \mathbf{Z}_k) - 1}{\sum_{k=1}^{N} \Lambda_k^{-1} (\vec{\xi} \cdot \mathbf{Z}_k)^2}, \tag{1.126}$$

а вектор $\vec{\xi}_0$ соответствует функционалу Ξ_0, получаемому при $p = 0$ на основании выражения (1.120):

$$\Xi_0(u) = \int\limits_{(\Gamma')} \bar{T} \frac{\partial u}{\partial \check{n}_0} d\Gamma' + \iint\limits_{(D')} \bar{b} u dD' . \tag{1.127}$$

При возрастании N величина множителя ν убывает по абсолютной величине. Строгое доказательство этого положения выходит за рамки настоящей работы и будет проиллюстрировано на примерах. Из сходимости к нулю величины ν_0 при $N \to \infty$ следует сходимость изложенного сбалансированного метода Ритца.

Для получения канонического разложения передаточной функции редукции воспользуемся формулами (1.42) и (1.98). Учитывая, что в (1.42) $T/T_* = \bar{T}$, дифференцирование по нормали $\check{n}$ к области (D) эквивалентно в принятом масштабе операции $\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \check{n}_0}$, где $\check{n}_0$ – направление нормали к границе преобразованной области (D'); элемент длины границы $d\Gamma$ соответствует величине $Ld\Gamma'$, так что равенство (1.42) примет вид

$$U_W = \int\limits_{(\Gamma')} \bar{T} \frac{\partial U_s}{\partial \check{n}_0} d\Gamma' , \tag{1.128}$$

где (Γ') – граница питания области (D'). Подставляя формулу (1.98) в это выражение, находим, что каноническое разложение передаточной функции редукции будет иметь вид

$$U_W(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k \alpha_k}{\bar{p} + \lambda_k} , \tag{1.129}$$

где

$$\alpha_k = \int\limits_{(\Gamma')} \bar{T} \frac{\partial e_k}{\partial \check{n}_0} d\Gamma' . \tag{1.130}$$

Так как оригинал изображения $\frac{1}{\bar{p}(\bar{p} + \lambda_k)}$ равен $\frac{1}{\lambda_k}(1 - e^{-\lambda_k \bar{t}})$, выражение для канонического разложения относительной редукции примет вид

$$w_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k \alpha_k}{\lambda_k} (1 - e^{-\lambda_k \bar{t}}) . \tag{1.131}$$

При $t \to \infty$ экспоненты в правой части этого выражения обращаются в нуль и предельное значение функции относительной редукции равно

$$\gamma = w_0(\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k \alpha_k}{\lambda_k} . \tag{1.132}$$

Поскольку изменение расхода не может превысить по абсолютной величине величины водоотбора, предел γ существует всегда; он может быть на-

зван предельной относительной редукцией, причем справедливо очевидное неравенство $\gamma \leqslant 1$. В условиях компенсационного питания это неравенство строгое: $\gamma < 1$; в условиях отсутствия компенсационного питания имеет место равенство $\gamma = 1$. Обозначая

$$C_k = \frac{\chi_k \alpha_k}{\lambda_k}, \tag{1.133}$$

формулу (1.122) с учетом (1.125) можно переписать в виде

$$U_W(p) = \gamma - \bar{p} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\lambda_k}{\bar{p} + \lambda_k}, \tag{1.134}$$

формулу (1.124) – в виде

$$w_0(t) = \gamma - \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k \bar{t}}. \tag{1.135}$$

Приближенное выражение для общего члена C_k в разложении (1.134) в процессе Ритца осуществляется по очевидным формулам:

$$C_k = \frac{(\tilde{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{Z}_k)}{\Lambda_k} \cdot \tilde{\alpha}_k, \tag{1.136}$$

где

$$\tilde{\alpha}_k = \int_{(\Gamma')} \bar{T} \frac{\partial \tilde{e}_k}{\partial \check{n}_0} d\Gamma', \tag{1.137}$$

а остальные обозначения – прежние.

Функция интегральной относительной редукции $v(t)$ для этих условий может быть представлена в виде

$$v(t) = \gamma - \bar{t}^{-1}(v_0 - \sum_{k=1}^{\infty} C_k^* e^{-\lambda_k \bar{t}}), \tag{1.138}$$

где

$$v_0 = -\frac{a_*}{L^2} \left. \frac{dU_W}{dp} \right|_{p=0} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^*, \tag{1.139}$$

$$C_k^* = C_k / \lambda_k. \tag{1.140}$$

Для случая периодического водоотбора выражения для частотной характеристики редукции на основании (1.132) аналогично (1.100) могут быть записаны в виде комплекса

$$w(\omega) = w_r(\bar{\omega}) - i w_i(\bar{\omega}), \tag{1.141}$$

где

$$w_r(\bar{\omega}) = \gamma + \bar{\omega}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k \lambda_k}{\lambda_k^2 + \bar{\omega}^2}, \tag{1.142}$$

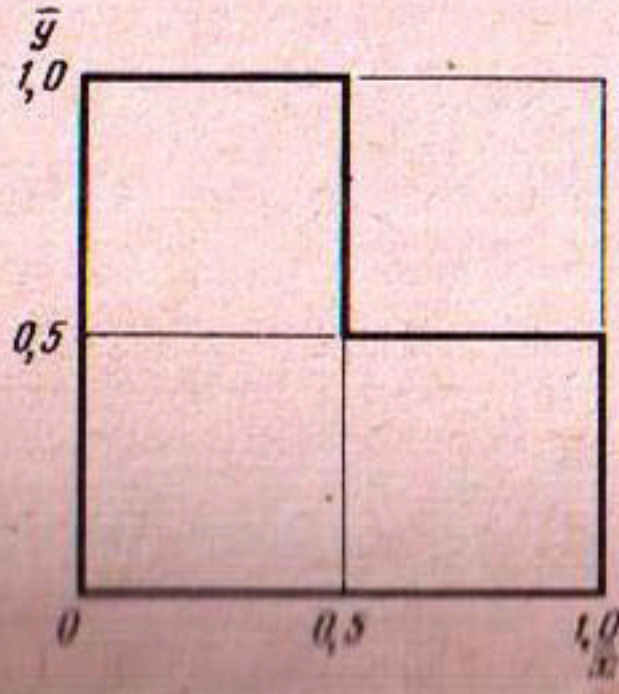
$$w_i(\bar{\omega}) = \bar{\omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k \lambda_k^2}{\lambda_k^2 + \bar{\omega}^2}; \tag{1.143}$$

амплитудная и фазовая частотные характеристики редукции при этом определяются как

$$w(\omega) = \sqrt{w_r^2(\bar{\omega}) + w_i^2(\bar{\omega})}, \tag{1.144}$$

$$\mathrm{tg}\psi(\omega) = w_i(\bar{\omega})/w_r(\bar{\omega}). \tag{1.145}$$

Рассмотренная методика сравнительно легко реализуется для условий плоскопараллельного или осесимметричного потоков, описываемых одномерным уравнением фильтрации. Для условий двумерного потока подземных вод задача существенно усложняется, особенно для условий неоднородных пластов. Вместе с тем все основные принципы остаются теми же, за исключением вопроса о выборе исходной координатной последовательности, так как возникает необходимость учета сложных геометрии областей, граничных условий, а также неоднородность полей фильтрационных параметров. В последнее время появились эффективные способы учета всех назван-



Р и с. 1.1. Форма *L*-образной области

ных факторов с помощью так называемой теории *R*-функций [49]. Эта теория позволяет, во-первых, описывать сколь угодно сложные по геометрии области с помощью единообразных аналитических уравнений; во-вторых, на основании этих уравнений она позволяет конструировать структуры решений краевых задач. Поясним сказанное на примере. Рассмотрим *L*-образную область на рис. 1.1. Она состоит из точек квадрата с единичной стороной, из множества которых исключены точки с координатами, отвечающими неравенствам $\bar{x} \geqslant 0{,}5$; $\bar{y} \geqslant 0{,}5$. Как легко убедиться, функция, определяемая уравнением

$$\omega_1(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}\bar{y}(1 - \bar{x})(1 - \bar{y}), \tag{1.146}$$

положительна внутри квадрата $0 \leqslant \bar{x}, \bar{y} \leqslant 1$ и обращается в нуль на его границах. Функция $\omega_2(\bar{x}, \bar{y})$, положительная внутри угловой области $\bar{x} \geqslant 0{,}5$; $\bar{y} \geqslant 0{,}5$ и обращающаяся в нуль на ее границах, может быть определена, например, в виде

$$\omega_2(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} + \bar{y} - 1 - \sqrt{(\bar{x} - 0{,}5)^2 + (\bar{y} - 0{,}5)^2}\ .$$

Согласно результатам теории *R*-функций искомое уравнение функции $\omega(\bar{x}, \bar{y})$, положительной внутри исходной *L*-образной области и равной нулю на ее границах, определяется формулой

$$\omega(\bar{x}, \bar{y}) = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}\ . \tag{1.147}$$

Если граничные условия задачи заключаются в равенстве нулю понижения вдоль всего контура области, можно утверждать, что стационарное решение уравнения фильтрации может быть представлено в виде

$$S(\bar{x}, \bar{y}) = \omega(\bar{x}, \bar{y})\ \Phi(\bar{x}, \bar{y}), \qquad (1.148)$$

где $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ – неизвестная пока функция, которая, однако, не должна уже удовлетворять никаким граничным условиям. Определение этой функции может быть сведено к вариационной задаче на минимум функционала типа (1.105), которая может быть решена прямыми методами математической физики, причем функция $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ представляется в виде линейной комбинации функций, образующих полную последовательность (ортогональных полиномов, тригонометрических функций и т.п.).

Формула (1.148) называется структурой решения задачи. В случае задачи Дирихле (условия первого рода вдоль всего контура границы) она имеет весьма прозрачный вид. В случаях условий второго и третьего родов, а также смешанной задачи (когда на части границы заданы условия питания, а на другой – условия постоянного расхода) структуры решений также могут быть выражены с помощью функции $\omega(\bar{x}, \bar{y})$, определяющей уравнение области, и ее производных [49], однако соответствующие выражения имеют достаточно громоздкий вид и не являются столь очевидными, как структура (1.148). В работе [49] описана также методика построения структур решений и для условий четвертого рода, т.е. для случаев плановой фильтрационной неоднородности. Изложение всех этих вопросов фактически означало бы повторение значительной части упомянутой монографии [49], поэтому нам представляется наиболее целесообразным ограничиться выражением мнения о перспективности применения теории R-функций к решению задач геофильтрации, в частности к построению передаточных функций понижения и редукции, которое становится возможным, таким образом, практически в любых реальных природных условиях.

В качестве примера рассмотрим применение предлагаемой методики определения передаточных функций для случая линейного и площадного водозаборов, работающих в условиях речной долины и эксплуатирующих неоднородный в фильтрационном отношении аллювиальный водоносный горизонт.

Пример 1. Геофильтрационные параметры – непрерывные функции координат.

Гидрогеологические разрезы долин ряда рек, особенно протекающих в гористых районах, часто характеризуются постепенным уменьшением мощности и фильтрационных свойств водоносных отложений при отдалении от уреза реки, что выражается в зависимости коэффициента водопроводимости от расстояния до реки. Здесь рассмотрен случай, когда эта зависимость носит линейный характер:

$$T(x) = T_0(1 - x/L),$$

где T_0 – значение коэффициента водопроводимости вблизи реки; L – ширина долины; x – расстояние от точки M до уреза реки. Величина коэффициента водоотдачи принята постоянной, $\mu = \mu_0 = \text{const}$; коэффициент b предполагается равным нулю (компенсационное питание отсутствует). Требуется оценить величину эксплуатационных ресурсов подземных вод

при их отборе параллельным реке линейным рядом скважин, а также при равномерно распределенном в долине площадном отборе.

Для решения задачи сначала определим собственные элементы оператора фильтрации, соответствующего граничным условиям задачи. В качестве характерного линейного размера для этого принимаем ширину долины L, в качестве опорного значения коэффициента водопроводимости – значение T_0. Поскольку имеет место плоскопараллельный поток подземных вод, оператор фильтрации одномерен и определяется выражением

$$\bar{F}u = -\frac{d}{d\bar{x}}(1-\bar{x})\frac{du}{d\bar{x}}. \tag{1.149}$$

Граничное условие совершенного питания на левой границе пласта (урез реки) имеет вид

$$S(0, t) = 0; \tag{1.150}$$

на правой границе пласта задается условие отсутствия расхода через нее:

$$\lim_{x \to L} T(x)\frac{\partial S}{\partial x} = 0. \tag{1.151}$$

Аналитические выражения для собственных элементов оператора могут быть получены с помощью решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения вида $\bar{F}u = \lambda u$ и имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{1}{4} j_{0n}^2, \\ e_n(\bar{x}) &= \frac{J_0(j_{0n}\sqrt{1-\bar{x}})}{|J_1(j_{0n})|}, \end{aligned}\right\} \tag{1.152}$$

где j_{0n} – n-й положительный нуль функции Бесселя $J_0(z)$.

Собственные элементы оператора (1.149) при граничных условиях (1.150), (1.151) оценим согласно методу Ритца. В качестве системы координатных функций выберем последовательность ортонормированных полиномов, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\psi_1(\bar{x}) = \sqrt{3}\,\bar{x},$$

$$\psi_2(\bar{x}) = \sqrt{80}\left(\bar{x}^2 - \frac{3}{4}\bar{x}\right),$$

$$\psi_3(\bar{x}) = \sqrt{1575}\left(\bar{x}^3 - \frac{4}{3}\bar{x}^2 + \frac{2}{5}\bar{x}\right),$$

$$\psi_4(\bar{x}) = 168\left(\bar{x}^4 - \frac{15}{8}\bar{x}^3 + \frac{15}{14}\bar{x}^2 - \frac{5}{28}\bar{x}\right) \text{ и т.д.}$$

Коэффициенты Ω_{kj} определяются по формуле (1.108), которая в рассматриваемых условиях может быть представлена в виде [43]

$$\Omega_{kj} = \int_0^1 \frac{d\psi_k}{d\bar{x}}\frac{d\psi_j}{d\bar{x}}\,d\bar{x}.$$

Таблица 2

Приближения собственных значений оператора фильтрации в условиях примера по методу Ритца

N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1	1,5000	–	–	–
2	1,4460	9,2206	–	–
3	1,4458	7,6780	28,3762	–
4	1,4458	7,6187	19,5578	67,3777
Точные значения	1,4458	7,6178	18,7216	34,7599

Сегмент матрицы четвертого порядка имеет при этом следующие элементы:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1{,}5000 & -0{,}6455 & 0{,}3819 & -0{,}2598 \\ -0{,}6455 & 9{,}1667 & -5{,}4231 & 3{,}6895 \\ 0{,}3819 & -5{,}4231 & 26{,}8333 & -18{,}2557 \\ -0{,}2598 & 3{,}6895 & -18{,}2557 & 58{,}5000 \end{pmatrix}$$

При $N = 1$ приближением первого собственного значения служит элемент матрицы $\Omega_{11} = 1{,}5000$; соответствующий ему собственный вектор состоит из единственного числа, равного единице, а соответствующая собственная функция приближается линейной зависимостью вида $\tilde{e}_1(\bar{x}) = \sqrt{3} \cdot \bar{x}$. При $N = 2$ приближения первых двух собственных чисел определяются из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1{,}5000 - \Lambda & -0{,}6455 \\ -0{,}6455 & 9{,}1667 - \Lambda \end{vmatrix} = 0$$

и составляют $\Lambda_1^{(2)} = 1{,}4460$; $\Lambda_2^{(2)} = 9{,}2206$. Нормированные собственные векторы, соответствующие этим собственным числам, равны соответственно $Z_1 = (0{,}9965;\ 0{,}0833)$; $Z_2 = (-0{,}0833;\ 0{,}9965)$. Приближения первых двух собственных функций оператора определяются при этом выражениями

$$\tilde{e}_1(\bar{x}) = 0{,}9965\ \psi_1(\bar{x}) + 0{,}0833\ \psi_2(\bar{x})$$

$$\tilde{e}_2(\bar{x}) = -0{,}833\ \psi_1(\bar{x}) + 0{,}9965\ \psi_2(\bar{x})$$

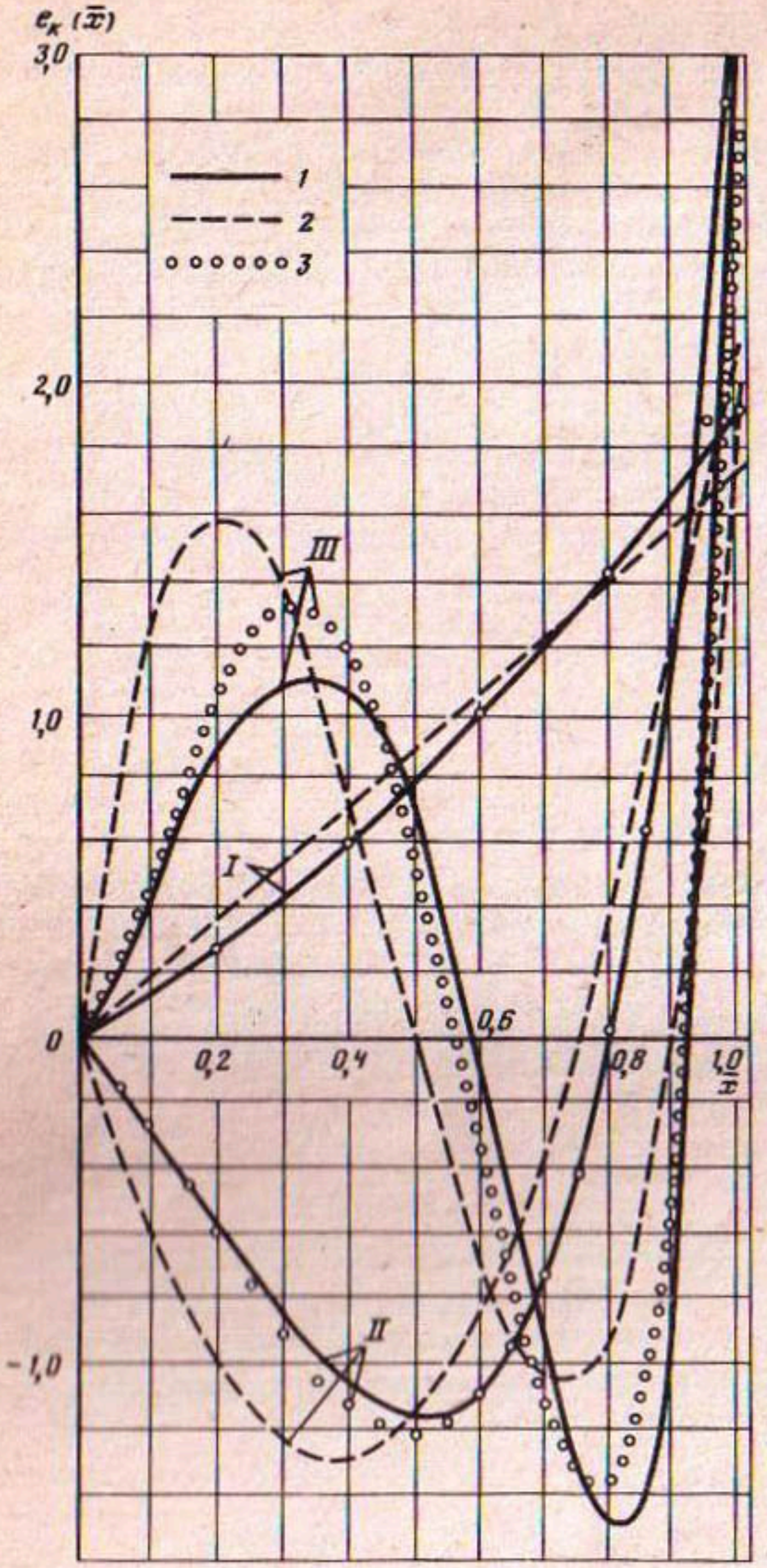
или после приведения подобных членов

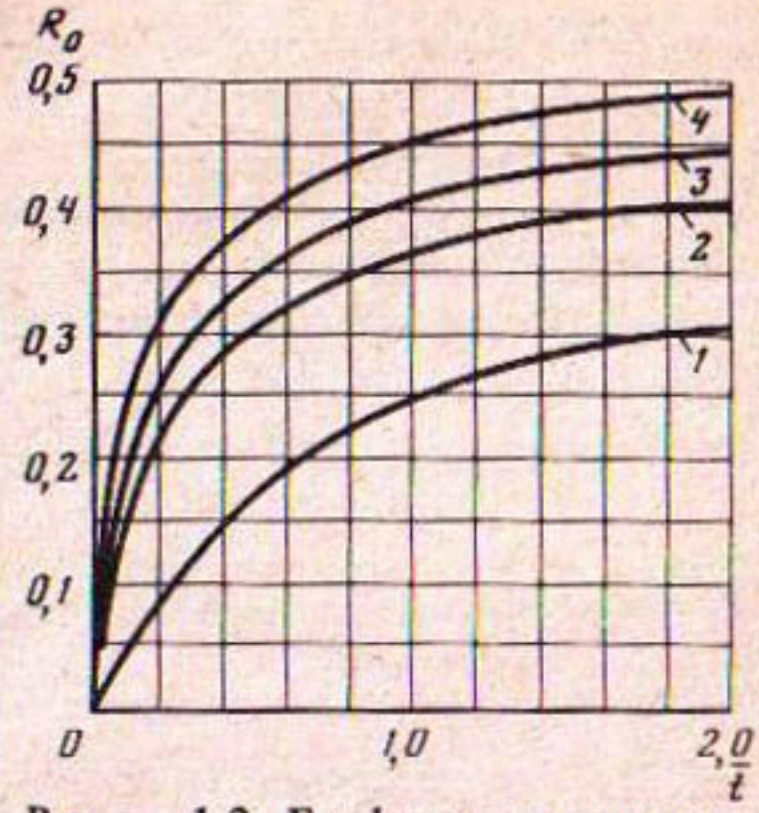
$$\tilde{e}_1(\bar{x}) = 0{,}7451\ \bar{x}^2 + 1{,}1672\ \bar{x},$$

$$\tilde{e}_2(\bar{x}) = 8{,}9130\ \bar{x}^2 - 6{,}8920\ \bar{x}.$$

Аналогично проводятся вычисления при $N \geqslant 3$. Приближения собственных значений оператора $\bar{F}$, соответствующие значениям $1 \leqslant N \leqslant 4$, а также точные значения, приведены в табл. 2.

В результате четвертого приближения первое собственное значение определено с точностью до четвертого знака включительно, ошибка в определении второго собственного значения составляет 0,01%, третьего –





Р и с. 1.2. Графики первых трех собственных функций в условиях примера 1 и их приближений по методу Ритца

I – $e_1(\bar{x})$; *II* – $e_2(\bar{x})$; *III* – $e_3(\bar{x})$; *1* – точные значения; *2* – первое приближение; *3* – третье приближение

Р и с. 1.3. Графики временно́й зависимости гидравлического сопротивления в условиях примера 1 и ее приближений по Ритцу *1* – $N = 1$; *2* – $N = 2$; *3* – $N = 3$; *4* – точное решение

4,5%; оценка четвертого значения неудовлетворительна. Характер приближения собственных функций оператора иллюстрируется графиками на рис. 1.2. В результате четырех приближений первая и вторая собственные функции аппроксимированы с большой точностью; максимальная ошибка в оценке значений третьей собственной функции составляет около 20% истинного значения.

В условиях плоскопараллельного движения подземных вод, когда двумерный оператор фильтрации заменяется на одномерный вида (1.149), величины, характеризующие количество отбираемых водозабором подзем-

ных вод (расход водоотбора, его модуль), приводятся к единице протяженности участка (отсчитываемой в условиях примера вдоль реки). При этом, как нетрудно показать, с помощью элементарных аналитических преобразований передаточная функция понижения и гидравлическое сопротивление могут быть выражены в виде

$$U_S(M,p) = \frac{L}{B}\ \tilde{U}_S(M,p);\ R_0(M,t) = \frac{L}{B}\ \tilde{R}_0(M,t), \qquad (1.153)$$

где характеристики $\tilde{U}_S(M,\ p)$; $\tilde{R}_0(M,\ t)$ определяются по условиям одномерной схемы, но в выражениях (1.35), (1.37) фигурирует при этом полная величина водоотбора по участку. В условиях примера при отборе подземных вод линейным рядом скважин функция $f(\bar{x})$ будет иметь вид $f(\bar{x}) = \delta(\bar{x}-\bar{d})$, где $\bar{d}$ – отношение расстояния между водозабором и рекой к ширине долины. Значения коэффициентов $\bar{g}_k$, определенные по формуле (1.109), в этом случае составляют $g_k = \psi_k(\bar{d})$. Примем, что $\bar{d} = 0{,}4$, тогда вектор четвертого порядка **G** будет иметь числовое выражение **G** = (0,6928; –1,2522; 0,4233; 0,9408). Нетрудно убедиться, что при отборе подземных вод линейным рядом скважин значения $\tilde{e}_k(M')$, где точка M' расположена на линии вдозабора, совпадают со значениями коэффициентов g_k.

При $N = 1$ согласно формуле (1.117) приближение передаточной функции понижения $\tilde{U}_S^{(1)}$ будет иметь вид

$$\tilde{U}_S^{(1)} = \frac{0{,}6928}{\bar{p}+1{,}5} \cdot 0{,}6928 = \frac{0{,}48}{\bar{p}+1{,}5},$$

а соответствующая временна́я зависимость гидравлического сопротивления $\tilde{R}_0^{(1)}$ имеет вид

$$\tilde{R}_0^{(1)} = \frac{0{,}48}{1.5}\left(1-e^{-1{,}5\,\bar{t}}\right) = 0{,}32\left(1-e^{-1{,}5\,\bar{t}}\right).$$

При $N = 2$, выполняя скалярные умножения собственных векторов $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$, полученных во втором приближении, на вектор, составленный из первых двух компонент вектора **G**, получим, что $(\mathbf{G}\cdot\mathbf{Z}_1) = 0{,}5861$; $(\mathbf{G}\cdot\mathbf{Z}_2) = -1{,}3055$; при этом

$$\tilde{U}_S^{(2)} = \frac{0{,}5861^2}{1{,}446+\bar{p}} + \frac{(-1{,}3055)^2}{9{,}2206+\bar{p}} = \frac{0{,}3435}{1{,}446+\bar{p}} + \frac{1{,}7043}{9{,}2206+\bar{p}},$$

$$\tilde{R}_0^{(2)} = 0{,}2376\left(1-e^{-1{,}4460\bar{t}}\right) + 0{,}1848\left(1-e^{-9{,}2206\,\bar{t}}\right).$$

Аналогично проводятся и все вычисления при $N \geqslant 3$. На рис. 1.3 изображены графики временны́х зависимостей $\tilde{R}_0(t)$ в первом–четвертом приближениях, а также график точной временно́й зависимости. Относительная ошибка определения значения гидравлического сопротивления составляет по четвертому приближению около 10%.

При отборе подземных вод площадной системой, равномерно распределенной в долине реки, функция $f(\bar{x})$ равна единице в промежутке $0 \leqslant \bar{x} \leqslant$

$\leqslant 1$, поэтому коэффициенты g_k в соответствии с формулой (1.109) будут определяться равенством

$$g_k = \int_0^1 \psi_k(\bar{x})\, d\bar{x}.$$

Вектор $\mathbf{G}$ четвертого порядка будет при этом иметь числовое выражение вида

$$\mathbf{G} = (0{,}8660;\ -0{,}3727;\ 0{,}2205;\ -0{,}1500).$$

В отличие от случая отбора подземных вод линейным рядом положение точки, соответствующей небольшому понижению уровня, будет изменяться с течением времени. В начальный период эксплуатации эта точка локализуется вблизи середины долины, перемещаясь затем к ее правой границе. Для упрощения результатов, носящих в основном иллюстративный характер, ограничимся исследованием временных характеристик только в одной точке, а именно при $\bar{x} = 0{,}5$. В первом приближении скалярное произведение $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_1)$ равно 0,8660; значение соответствующего приближения собственной функции оператора равно $\tilde{e}_1(0{,}5) = \sqrt{3} \cdot 0{,}5 = 0{,}8660$. Приближение передаточной функции понижения $\tilde{U}_S^{(1)}$ при этом будет иметь вид

$$\tilde{U}_S^{(1)} = \frac{0{,}8660}{1{,}5 + \bar{p}} \cdot 0{,}8660 = \frac{0{,}75}{1{,}5 + \bar{p}},$$

а приближение гидравлического сопротивления

$$\tilde{R}_0^{(1)} = (0{,}75/1{,}5)\ (1 - e^{-1{,}5\,\bar{t}}) = 0{,}5\ (1 - e^{-1{,}5\bar{t}}).$$

Во втором приближении, при $N = 2$, значения скалярных произведений составляют $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_1) = 0{,}8320$; $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_2) = -0{,}4435$; значения приближенных собственных функций при $\bar{x} = 0{,}5$ – соответственно $\tilde{e}_1(0{,}5) = 0{,}7699$; $\tilde{e}_2(0{,}5) = -1{,}1863$; соответствующее приближение передаточной функции понижения определится равенством

$$U_S^{(2)} = \frac{0{,}8320}{1{,}446 + \bar{p}} 0{,}7699 + \frac{-0{,}4435}{9{,}2206 + \bar{p}} (-1{,}1863) = \frac{0{,}6406}{1{,}446 + \bar{p}} +$$

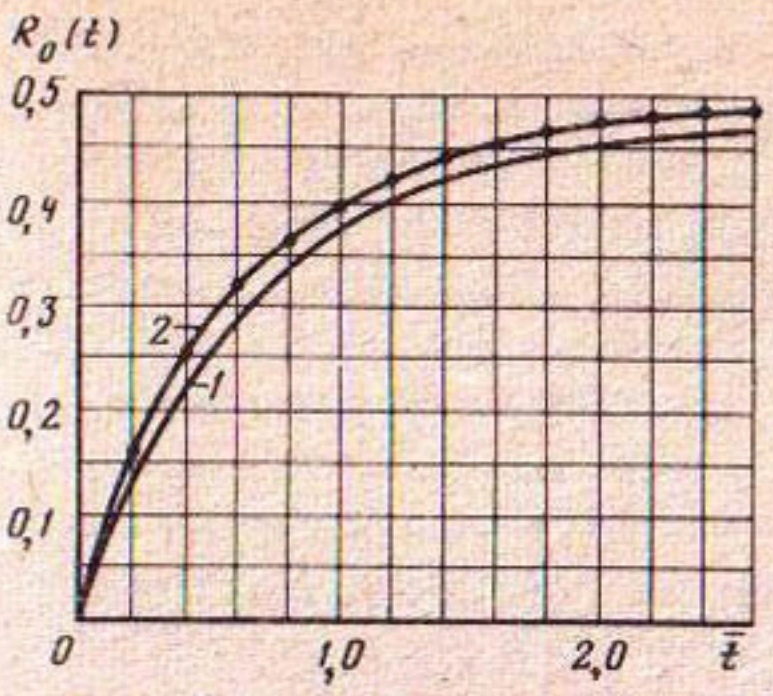
$$+ \frac{0{,}5261}{9{,}2206 + \bar{p}},$$

а приближение гидравлического сопротивления – выражением

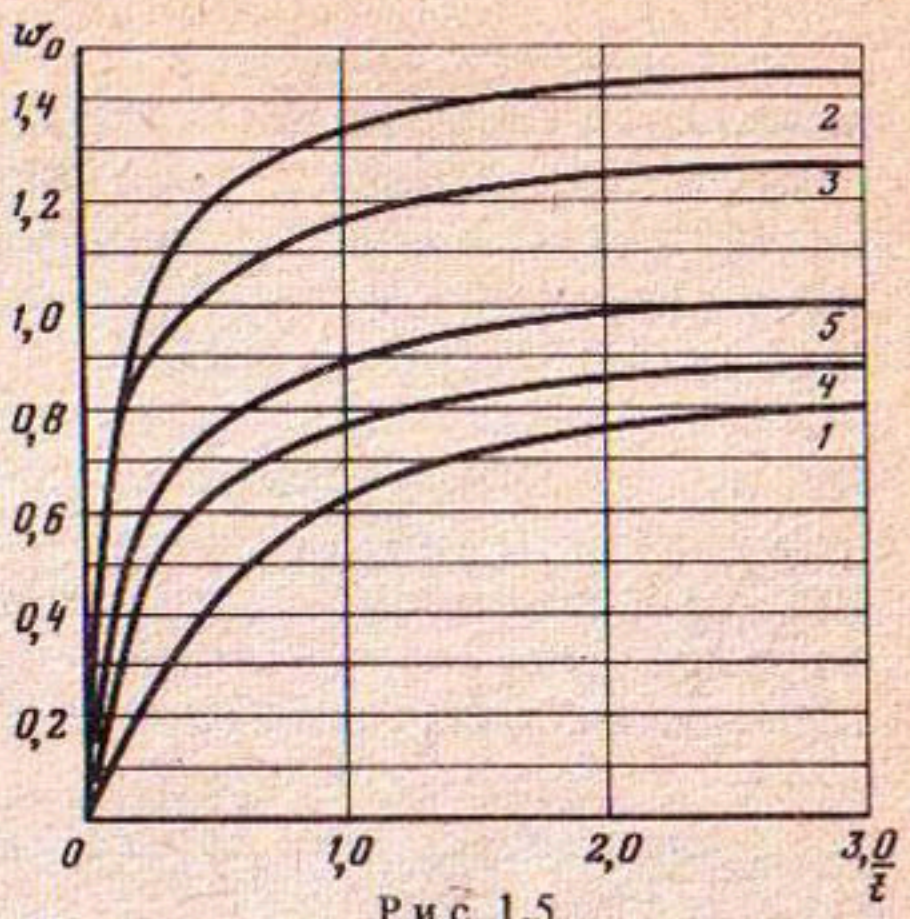
$$\tilde{R}_0^{(2)} = \frac{0{,}6406}{1{,}446}(1 - e^{-1{,}446\,\bar{t}}) + \frac{0{,}5261}{9{,}2206}(1 - e^{-9{,}2206\,\bar{t}}) =$$

$$= 0\,,4430\,(1 - e^{-1{,}446\,\bar{t}}) + 0{,}571\,(1 - e^{-9{,}2206\,\bar{t}}).$$

На рис. 1.4 представлены графики временны́х зависимостей гидравлических сопротивлений $\tilde{R}_0$ в приближениях, а также график точной зависимости. Графики показывают, что в отличие от условий отбора под-



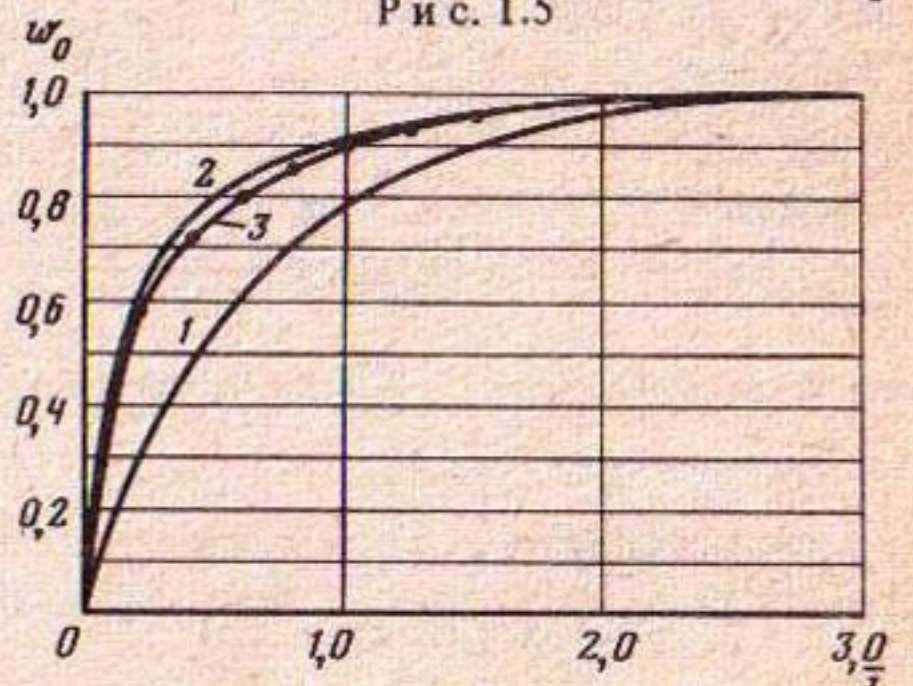
Р и с. 1.4. Графики временны́х зависимостей гидравлического сопротивления при отборе подземных вод площадным водозабором (кривая *2*) и ее приближения по Ритцу при $N = 1$ (кривая *1*) и при $N = 2$ (темные кружки)



Р и с. 1.5

Р и с. 1.5. Графики функции редукции в условиях примера (кривая *5*) и ее приближений по Ритцу

1 – $N = 1$; *2* – $N = 2$; *3* – $N = 3$; *4* – $N = 4$



Р и с. 1.6

Р и с. 1.6. Графики функции редукции (кривая *3*) и ее приближений, полученных с помощью модифицированного метода Ритца

1 – $N = 1$; *2* – $N = 2$; зачерненные кружки – $N = 3$

земных вод линейным рядом скважин в случае площадного отбора уже второе приближение приводит к практически точным результатам.

При практических расчетах с применением метода Ритца наихудшая сходимость соответствует условиям отбора подземных вод одиночными скважинными водозаборами, наилучшая – площадному отбору с непрерывной функцией плотности дебита $f(M)$, а случай линейного водозабора будет занимать промежуточное положение. Ухудшение сходимости разложений передаточной функции при уменьшении гладкости функции $f(M)$ имеет аналогичную математическую природу с ухудшением сходимости тригонометрических рядов Фурье при уменьшении гладкости разлагаемой функции. Поэтому применение метода Ритца представляется наиболее эффективным для проведения расчетов при региональной оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод.

Что касается расчетов скважинных и линейных водозаборов, то для достижения необходимой точности при использовании метода Ритца надо учитывать довольно большое число членов разложения. Так как приведенный выше алгоритм допускает простую интерпретацию в виде программы для ЭЦВМ, упомянутые расчеты всегда могут быть проведены с использованием средств вычислительной техники. При этом могут найти применение и такие эффективные математические методы, как асимптотические оценки собственных элементов операторов, а также методы возмущений.

Следует, наконец, отметить и тот факт, что приближения временно́й зависимости гидравлического сопротивления в условиях рассмотренного примера характеризуются несколько меньшими значениями, чем точная зависимость. Для целей практических расчетов это обстоятельство, вообще говоря, нежелательно, так как оно приводит к некоторой переоценке эксплуатационных ресурсов подземных вод. Рассматриваемый недостаток тесно связан со свойством метода Ритца давать в приближениях завышенные значения собственных чисел операторов. Вместе с тем имеются вычислительные методы, дающие для собственных значений оценки снизу [16]; при использовании этих методов значения временны́х зависимостей гидравлических сопротивлений в приближениях будут превосходить соответствующие точные значения.

Для определения коэффициентов разложения передаточной функции редукции воспользуемся формулами (1.130), (1.133), (1.134). В условиях примера произвдные от точных собственных функций оператора фильтрации равны [52] $(-1)^{n+1} j_{0n}/2$; поскольку интеграл по границе питания в рассматриваемых условиях равен значению производной в точке $\bar{x} = 0$ (в которой $\bar{T} = 1$), коэффициент α_n окончательно равен

$$\alpha_n = (-1)^{n+1} j_{0n}/2.$$

В соответствии с формулами (1.94), (1.133) при отборе подземных вод линейным рядом скважин

$$\chi_n = \frac{J_0(j_{0n}\sqrt{1-\bar{d}})}{|J_1(j_{0n})|},$$

$$C_n = (-1)^{n+1} 2 \frac{J_0(j_{0n}\sqrt{1-\bar{d}})}{j_{0n}|J_1(j_{0n})|}.$$

Числовые значения первых четырех коэффициентов таковы: $C_1 = 0{,}4862$; $C_2 = 0{,}3887$; $C_3 = 0{,}2430$; $C_4 = 0{,}0890$.

В ходе увеличения размерности N по методу Ритца получаются следующие результаты. При $N = 1$ $\tilde{e}_1'(0) = \sqrt{3} = 1{,}7321$; используя полученные выше значения приближений Λ_k и $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_k)$, определяем

$$C_1 = (1{,}7321/1{,}5)\ 0{,}6928 = 0{,}8000.$$

Первое приближение функции относительной редукции будет при этом иметь вид

$$w_0^{(1)}(t) = 0{,}8\ (1 - e^{-1{,}5\bar{t}}).$$

При $N = 2$ $\tilde{e}_1'(0) = 1{,}1672$; $\tilde{e}_2'(0) = -6{,}8290$; $C_1 = (1{,}1672/1{,}4460) \cdot 0{,}5861 = 0{,}4731$; $C_2 = (-6{,}8290/9{,}2206) \cdot (-1{,}3055) = 0{,}9669$.

$$w_0^{(2)}(t) = 1{,}44 - 0{,}5731\, e^{-1{,}446\bar{t}} - 0{,}9669\, e^{-9{,}2206\bar{t}}.$$

Аналогично проводятся вычисления и при $N \geqslant 3$; их результаты приведены в табл. 3.

На рис. 1.5 изображены графики расчетных приближений $w_0^{(N)}(\bar{t})$ и график точного решения, анализ которых свидетельствует о том, что в отли-

Таблица 3

Коэффициенты разложения функции относительной редукции, получаемые в ходе обычного метода Ритца

N	C_1	C_2	C_3	C_4
1	0,8000	–	–	–
2	0,4731	0,9669	–	–
3	0,4866	0,3332	0,4540	–
4	0,4862	0,4151	0,1599	–0,2788
Точные значения	0,4862	0,3887	0,2430	0,0890

чие от удовлетворительной последовательности $R_0^{(N)}(\bar{t})$ при $1 \leqslant N \leqslant 4$ в случае последовательности $w_0^{(N)}(t)$ это не так. Более того, например, второе и третье приближения дали значения функции относительной редукции, превышающие единицу, что лишено физического смысла. Указанное явление объясняется тем, что при построении приближений использовался обычный метод Ритца, т.е. без ограничений, накладываемых на условия баланса вещества. В сбалансированной модификации всегда будет соблюдаться условие $\sum_{k=1}^{N} C_k^{(N)} = 1$ и расчетные значения $w_0^{(N)}(t)$ не превысят этой величины. При $N = 1$ расчетное приближение $w_0^{(1)}(t)$ будет иметь вид $w_0^{(1)}(t) = 1 - e^{-1,5\bar{t}}$, а вектор $\vec{\xi}_0$, составленный из значений функционала Ξ_0, в рассматриваемых условиях – из величин

$$\xi_k = \int_{(\Gamma')} \bar{T} \frac{\partial \psi_k}{\partial \check{n}_0} d\Gamma'$$

или, учитывая плоскопараллельность движения и то, что при $\bar{x} = 0$ $\bar{T} = 1$,

$$\xi_k = \psi'_k(0),$$

а именно: $\xi_1 = 1,7321$; $\xi_2 = 6,7082$; $\xi_3 = 15,8745$; $\xi_4 = -30$. При $N = 2$, определяя значения $(\vec{\xi}_0 \cdot \mathbf{Z}_1) = 1,1672$, $(\vec{\xi}_0 \cdot \mathbf{Z}_2) = -6,8290$ и используя вычисленные выше величины $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_1) = 0,5861$, $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_2) = -1,3055$, по формуле (1.126) находим значение $\nu_0 = 0,0733$. Вычисляя затем значения $(\tilde{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{Z}_1) = (\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_1) - \nu_0 (\vec{\xi}_0 \cdot \mathbf{Z}_1) = 0,5861 - 0,0733 \cdot 1,1672 = 0,5005$. $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_2) = (\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_2) - \nu_0 (\vec{\xi}_0 \cdot \mathbf{Z}_2) = -1,3055 - 0,0733\ (-6,8290) = -0,8047$, определяем приближения для коэффициентов разложения

$$C_1^{(2)} = \frac{0,5005}{1,4460} \cdot 1,1672 = 0,4040,$$

$$C_2^{(2)} = \frac{-0,8047}{9,2206} \cdot (-6,8290) = 0,5960.$$

Расчетное приближение функции относительной редукции примет вид

$$w_0^{(2)}(t) = 1 - 0,404\, e^{-1,4460\bar{t}} - 0,596\, e^{-9,2206\bar{t}}.$$

Таблица 4

Коэффициенты разложения функции относительной редукции, получаемые в ходе сбалансированного метода Ритца

N	C_1	C_2	C_3	C_4
1	1,0000	–	–	–
2	0,4040	0,5960	–	–
3	0,4632	0,3180	0,2188	–
4	0,4970	0,4272	0,1640	–0,0882
Точные значения	0,4862	0,3887	0,2430	0,0890

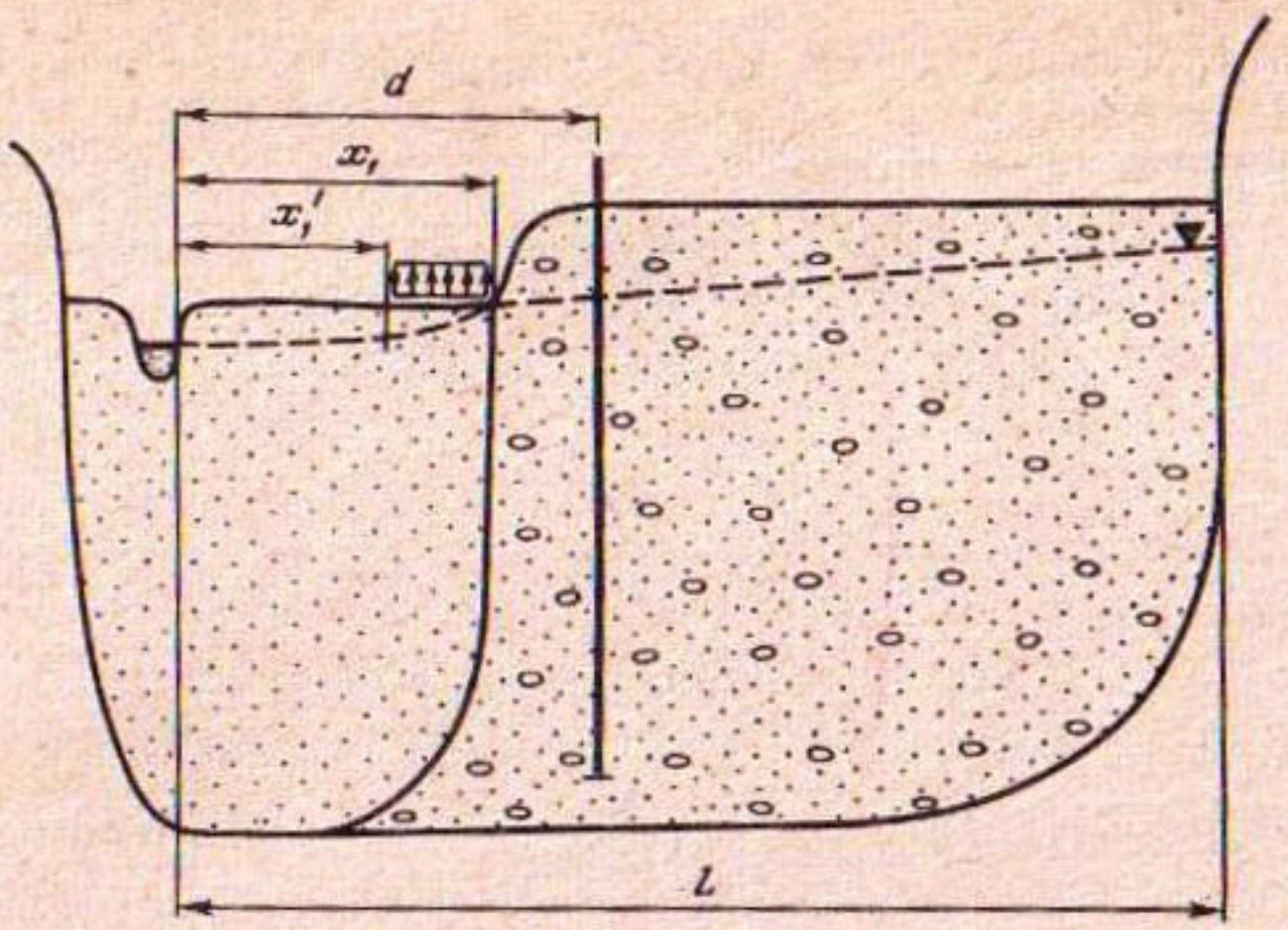
Аналогичны расчеты коэффициентов разложения и при $N \geqslant 3$; в табл. 4 приведены их результаты. На рис. 1.6 изображены графики зависимостей $w_0^{(N)}(t)$, построенные с использованием модифицированного метода Ритца. Уже второе приближение обеспечивает необходимую точность расчета; значения третьего приближения практически совпадают со значениями точного решения. Анализ примера приводит к выводу о предпочтительности сбалансированного метода Ритца по сравнению с его обычной модификацией, а также демонстрирует его эффективность в условиях, аналогичных условиям примера.

Пример 2. Геофильтрационные параметры изменяются скачкообразно. Условия залегания подземных вод в разрезе изображены на рис. 1.7. В плане водоносный пласт может быть схематизирован в виде пласта-полосы с одной границей питания (урез реки) и одной границей нулевого расхода (линия контакта с коренными отложениями). Водопроводимость в пределах области 1 составляет $T_1 = 200$ м^2/сут, в пределах области 2 $T_2 = 1000$ м^2/сут; значения коэффициентов уровнепроводности: $a_1 = 2000$ м^2/сут, $a_2 = 10\,000$ м^2/сут. Гидравлическая связь между рекой и подземными водами несовершенная, $\Delta L = 300$ м. Конкретные значения размеров на рис. 1.7 таковы: $L = 5000$ м, $x_1 = 1500$ м, $d = 2000$ м. В полосе шириной $x_1 - x_1' = 500$ м происходит интенсивная разгрузка грунтовых вод путем эвапотранспирации, модуль которой до начала эксплуатации подземных вод составлял $E_e = 2 \cdot 10^{-3}$ м/сут. Критическое понижение $S_{кр} = 2{,}5$ м. Требуется рассчитать временные зависимости гидравлического сопротивления в точке на линии водозабора и изменения расхода реки.

Решение задачи. Для получения решений прежде всего выберем характерные значения расстояния и водопроводимости. Примем, что $L = 5000$ м, $T_* = 1000$ м^2/сут, $\mu_* = 0{,}1$. Тогда $a_* = 10^4$ м^2/сут, $\tau = 5000^2/10^4 = 2500$ сут.

В качестве координатных функций $\psi_k(\bar{x})$ выберем нормированные собственные функции следующей краевой задачи:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d}{d\bar{x}}\left(\bar{T}\,\frac{du}{d\bar{x}}\right) &= \lambda u, \\ 1 \cdot u'(0) &= u(0), \\ u'(1) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.154)$$



Р и с. 1.7. Схематизированный гидрогеологический разрез к примеру 2

где через l обозначено значение $\Delta L/L$, а $\bar{T} = \bar{T}_1 = T_1/T_2$ при $0 \leqslant \bar{x} \leqslant \bar{x}_1$; $\bar{T} = 1$ при $\bar{x}_1 \leqslant \bar{x} \leqslant 1$. Оператор этой задачи отличается от оператора исходной задачи только отсутствием компенсационного питания, поэтому при таком выборе $\psi_k(\bar{x})$ можно ожидать удовлетворительных результатов.

Нормированные собственные функции краевой задачи (1.154) имеют следующий вид:

$$e_n(\bar{x}) = \begin{cases} \beta_n \left(\sin \dfrac{z_n \bar{x}}{\sqrt{\bar{T}_1}} + l \dfrac{z_n}{\sqrt{\bar{T}_1}} \cos \dfrac{z_n \bar{x}}{\sqrt{\bar{T}_1}}\right), 0 \leqslant \bar{x} \leqslant \bar{x}_1, \\ \gamma_n \cos z_n (1 - \bar{x}), \ \bar{x}_1 \leqslant \bar{x} \leqslant 1, \end{cases} \tag{1.155}$$

где z_n – квадратные корни из соответствующих собственных значений задачи (1.154); β_n, γ_n – нормировочные множители. Значения z_n, β_n, γ_n приведены в табл. 5. Поскольку, как уже указывалось, оператор задачи отличается от оператора вспомогательной задачи (1.154) лишь наличием в уравнении фильтрации члена, описывающего компенсационное питание, коэффициенты Ω_{kj}, как легко показать, могут быть определены по формуле

$$\Omega_{kj} = z_k^2 \delta_{kj} + \int_0^1 \bar{b}(\bar{x}) \psi_k(\bar{x}) \psi_j(\bar{x}) dx. \tag{1.156}$$

Значение $\bar{b}(\bar{x})$ отлично от нуля лишь в интервале $\bar{x}_1' \leqslant \bar{x} \leqslant \bar{x}_1$, где оно, согласно формуле (1.156), равно $2500 \cdot 8 \cdot 10^{-4}/0{,}1 = 20$ (значение $b = E_e/S_{кр} = 2 \cdot 10^{-3}/2{,}5 = 8 \cdot 10^{-4}$ сут$^{-1}$). Поэтому выражение для Ω_{kj} записывается в виде

$$\Omega_{kj} = z_k^2 \delta_{kj} + \bar{b} \int_{\bar{x}_1'}^{\bar{x}_1} \psi_k(\bar{x}) \psi_j(\bar{x}) d\bar{x}, \tag{1.157}$$

где зависимости $\psi_k(\bar{x})$ и $\psi_j(\bar{x})$ заданы формулой (1.155).

Таблица 5

Значения z_n, β_n, γ_n, g_n

n	1	2	3	4
z_n	0,7809	3,4390	4,8754	7,7932
β_n	1,6964	1,7301	1,4795	1,4979
γ_n	1,1734	−1,0052	1,1936	−0,7855
g_n	1,0469	0,4754	−1,1658	0,0286

Таблица 6

Собственные числа и векторы сегментов матрицы Ω возрастающего порядка

	Собственные числа			
N	1	2	3	4
Λ_1	2,1598	1,7846	1,7743	1,7039
Λ_2	–	15,8417	15,8139	15,3029
Λ_3	–	–	24,5252	24,5110
Λ_4	–	–	–	67,6693

Собственные векторы:

$N = 1$

$\mathbf{Z}_1 = (1)$

$N = 2$

$\mathbf{Z}_1 = (0{,}9866;\ -0{,}1634)$

$\mathbf{Z}_2 = (0{,}1634;\ 0{,}9866)$

$N = 3$

$\mathbf{Z}_1 = (0{,}9865;\ -0{,}1626;\ 0{,}0212)$

$\mathbf{Z}_2 = (0{,}1612;\ 0{,}9853;\ 0{,}0565)$

$\mathbf{Z}_3 = (-0{,}0302;\ -0{,}0523;\ 0{,}9982)$

$N = 4$

$\mathbf{Z}_1 = (0{,}9878;\ -0{,}1505;\ 0{,}0208;\ 0{,}0333)$

$\mathbf{Z}_2 = (0{,}1455;\ 0{,}9833;\ 0{,}0472;\ 0{,}0986)$

$\mathbf{Z}_3 = (-0{,}0269;\ -0{,}0422;\ 0{,}09986;\ 0{,}0176)$

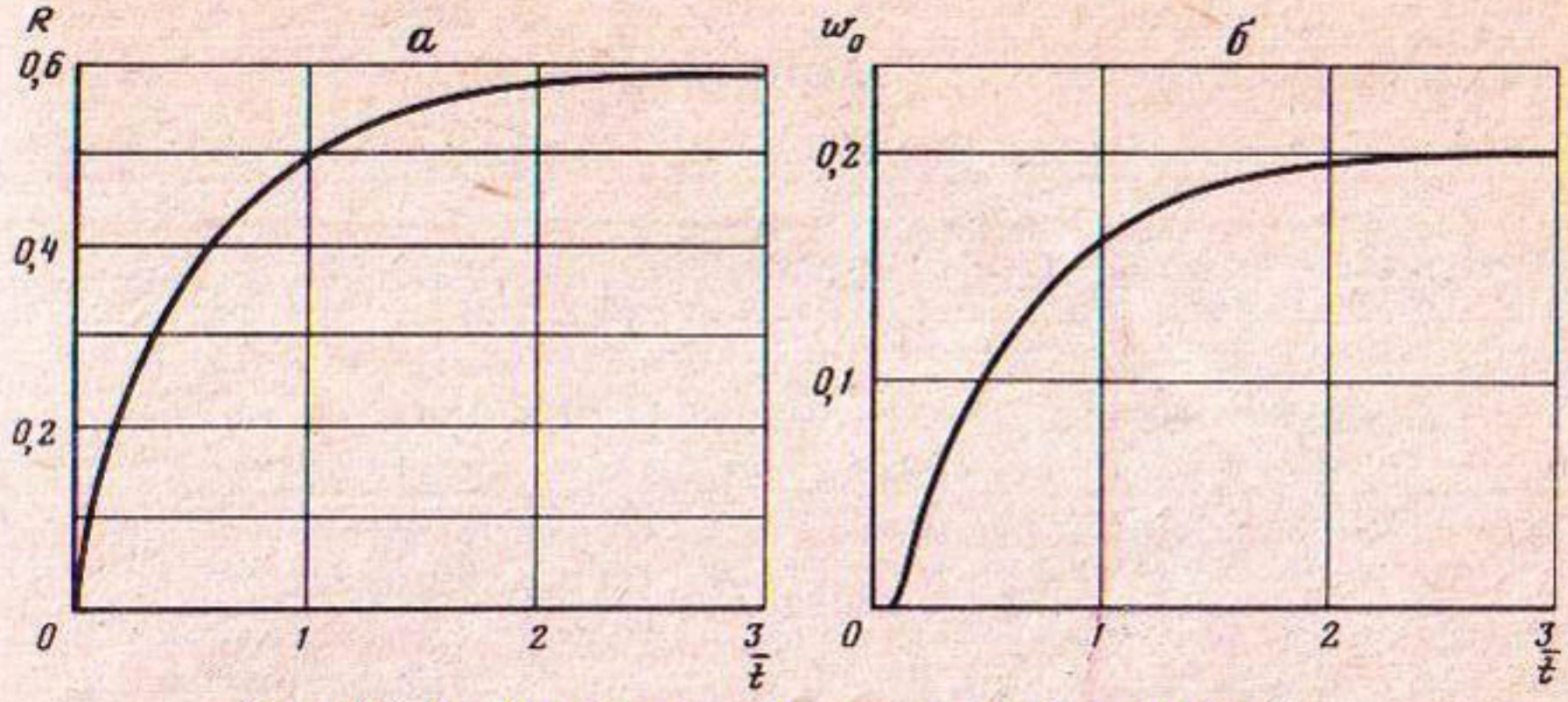
$\mathbf{Z}_4 = (-0{,}0480;\ -0{,}0932;\ 0{,}0123;\ 0{,}9944)$

Сегмент 4-го порядка матрицы Ω приобретает после выполнения вычислений следующий вид:

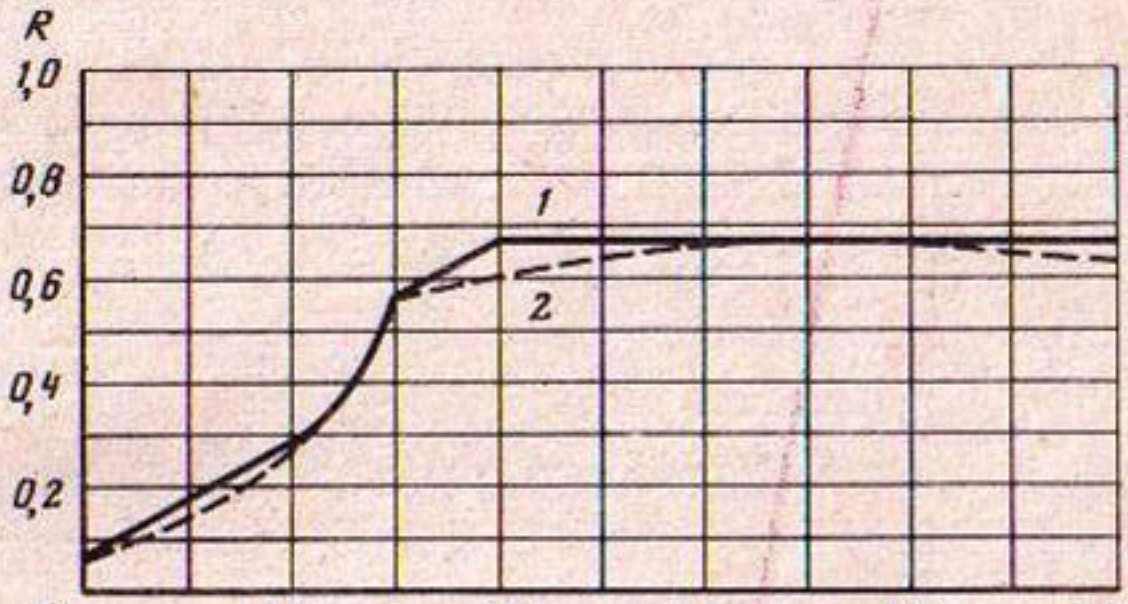
$$\Omega = \begin{pmatrix} 2{,}1598 & 2{,}2658 & -0{,}5577 & -2{,}9395 \\ 2{,}2658 & 15{,}4665 & -0{,}4059 & -4{,}7793 \\ -0{,}5577 & -2{,}9395 & 24{,}4871 & 0{,}4703 \\ -2{,}9395 & -4{,}7793 & 0{,}4703 & 67{,}0738 \end{pmatrix}.$$

Значения компонент вектора $\mathbf{G}$, вычисленные по формуле (1.109), равны значениям $\psi_k(\bar{x})$ при $\bar{x} = \bar{d}$; их величины также приведены в табл. 5.

В табл. 6 приведены собственные числа и векторы сегментов матрицы Ω различных порядков. Используя эти данные, можно определить коэффициенты разложения передаточной функции понижения (1.117). Так, при $N = 4$ значения $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_k)$ следующие: $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_1) = 0{,}9393$, $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_2) = 0{,}5675$, $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_3) = 1{,}2129$, $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_4) = -0{,}0804$. Значения функций $e_k(M')$ в точке, соответствующей водозабору, как это следует из формулы (1.116), сов-



Р и с. 1.8. Графики временны́х зависимостей к примеру 2
а – гидравлического сопротивления; *б* – функции редукции



Р и с. 1.9. График стационарного распределения значений гидравлического сопротивления в условиях примера 2 (*1*) и его приближения (*2*)

падают со значениями $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_k)$. Поэтому при $N = 4$ числовое выражение гидравлического сопротивления имеет вид

$$R_0(t) = 0{,}518\,(1 - e^{-1{,}704\bar{t}}) + 0{,}021\,(1 - e^{-15{,}3\bar{t}}) + 0{,}060 \cdot \cdot (1 - e^{-24{,}5\bar{t}}).$$

На рис. 1.8, *а* изображен график временно́й зависимости $R_0(t)$, построенный по этому выражению.

Приближения временно́й зависимости функции редукции находим на основе выражения (1.131). Значения коэффициента α_k в условиях примера, очевидно, равны

$$\alpha_k = \bar{T}_1\, \tilde{e}'_k(0).$$

Если ввести вектор $\vec{\psi}'_0$ значений производных координатных функций при $\bar{x} = 0$ (в условиях примера его компоненты суть $\psi'_k(0) = \beta_k z_k / \sqrt{\bar{T}_1}$), можно записать на основе (1.137)

$$\alpha_k = \bar{T}_1 (\mathbf{Z}_k \cdot \vec{\psi}'_0).$$

Таблица 7

Значения коэффициентов $\psi'_k(1)$, α_k и C_k

K	1	2	3	4
$\psi'_k(0)$	2,9621	13,3042	16,1291	26,1026

$N = 1$

$\alpha_1 = 2{,}9621 \quad C_1 = 0{,}2872$

$N = 2$

$\alpha_1 = 0{,}7485 \quad C_1 = 0{,}0801$

$\alpha_2 = 13{,}6099 \quad C_2 = 0{,}1100$

$N = 3$

$\alpha_1 = 1{,}1009 \quad C_1 = 0{,}1155$

$\alpha_2 = 14{,}4977 \quad C_2 = 0{,}1048$

$\alpha_3 = 15{,}3149 \quad C_3 = -0{,}1524$

$N = 4$

$\alpha_1 = 2{,}1283 \quad C_1 = 0{,}2347$

$\alpha_2 = 16{,}8488 \quad C_2 = 0{,}1250$

$\alpha_3 = -15{,}0047 \quad C_3 = -0{,}1485$

$\alpha_4 = 24{,}7732 \quad C_4 = 0{,}0059$

Значения $\psi'_k(0)$, α_k и C_k, найденные по (1.133), приведены в табл. 7. Временна́я зависимость функции редукции для $N = 4$ будет иметь выражение

$$w_0(t) = 0{,}235\,(1 - e^{-1{,}704\bar{t}}) + 0{,}125\,(1 - e^{-15{,}3\bar{t}}) - 0{,}149\,(1 - e^{-24{,}5\bar{t}}) - 0{,}006\,(1 - e^{-66{,}7\bar{t}}).$$

На рис. 1.8,*б* изображен график этой зависимости.

Оценить точность совпадения полученных временны́х зависимостей с истинными затруднительно, поэтому для суждения о качестве построенных приближений используем стационарные значения гидравлического сопротивления и функции редукции. При $t \to \infty$ зависимость гидравлического сопротивления от расстояния $\bar{x}$ стремится к стационарной, выраженной формулами

$$R_0(\infty) = \begin{cases} 1{,}0873 + 0{,}06\,(\bar{x} + 0{,}06), & 0 \leqslant \bar{x} \leqslant 0{,}2; \\ 0{,}1087\,\mathrm{sh}\,10(\bar{x} - 0{,}2) + 0{,}2827\,\mathrm{ch}\,10(\bar{x} - 0{,}2), & 0{,}2 \leqslant \bar{x} \leqslant 0{,}3 \\ \bar{x} + 0{,}264, & 0{,}3 \leqslant \bar{x} \leqslant 0{,}4; \\ 0{,}664, & 0{,}4 \leqslant \bar{x} \leqslant 1. \end{cases}$$

На рис. 1.9 изображены график этой зависимости и график стационарного распределения гидравлических сопротивлений, полученных на основе результатов четвертого приближения. Анализ графиков показывает, что четвертое приближение дает удовлетворительное совпадение с точным решением; ошибка в значении гидравлического сопротивления на линии водозабора составляет $(0{,}664 - 0{,}6)/0{,}664 = 0{,}096$, т.е. около 10%. Значение стационарного изменения расхода реки в четвертом приближении оказалось равным 0,205 против точного значения 0,217 (ошибка менее 6%).

1.4. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЗАВИСИМОСТИ ЭВАПОТРАНСПИРАЦИИ ГРУНТОВЫХ ВОД ОТ ГЛУБИНЫ ИХ ЗАЛЕГАНИЯ ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В УРАВНЕНИЯХ ФИЛЬТРАЦИИ

Эксплуатационный отбор подземных вод приводит к снижению расхода восходящего движения грунтовых вод в зону аэрации, вызванного эвапотранспирацией, если в естественных условиях уровень грунтовых вод находился на глубине, меньшей критической. Величина снижения модуля расхода грунтовых вод на испарение при этом определяется формулой (1.6). Нелинейный характер этой зависимости затрудняет получение точных решений уравнения (1.17), поэтому в целях упрощения расчетов нелинейное уравнение (1.17) заменяется линеаризованным (1.128), в котором коэффициент испарения b_E может быть выбран несколькими способами.

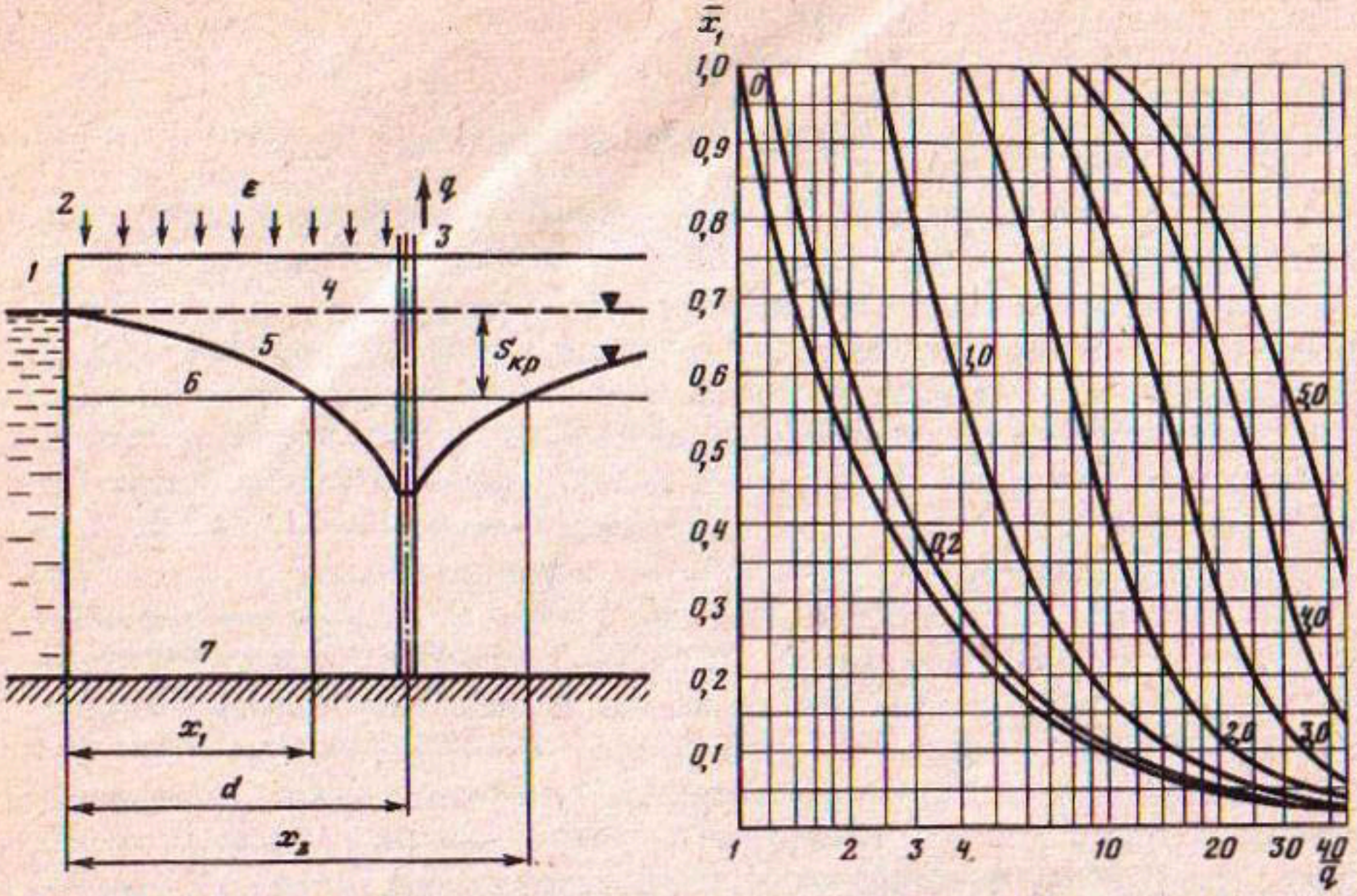
Простейший способ линеаризации безразмерной характеристики испарения, при котором она считается приближенно линейной с угловым коэффициентом, определяемым по значению производной характеристики в начале координат, обладает существенным недостатком. При этом способе линеаризации не учитывается прекращение испарения по достижении свободной поверхностью критического уровня залегания. Более реалистические результаты достигаются в случае применения методов "прямой линеаризации" [2]. Однако, как показали проверочные расчеты, в задачах оценки изменения поверхностного стока, а также эксплуатационных ресурсов подземных вод при наличии стабилизирующих факторов (границ питания, факторов компенсации) наиболее приемлемым методом линеаризации служит предлагаемый ниже способ "приведения" испарения, основанный на балансовых соотношениях.

Суть этого метода заключается в том, что нелинейное уравнение (1.17) заменяется линеаризованным уравнением (1.28), в котором коэффициент испарения b_E выбирается таким образом, чтобы достигалось равенство определяющих статей баланса подземных вод, получаемых в результате решения нелинейной и линеаризованной задач в стационарной постановке. В условиях влияния границ питания в качестве такой статьи баланса может быть выбрана редукция поверхностного стока, в условиях компенсационного питания – величина его суммарного расхода и т.п. Здесь рассматривается только первый вариант, а именно случай отбора подземных вод, гидравлически связанных с поверхностными. Решение соответствующей нелинейной стационарной задачи проводится в аналитическом виде лишь в очень узком классе гидрогеологических условий, поэтому в общем случае для получения решений необходимо привлечение численных методов расчета.

Если получено (аналитически или численно) решение стационарной нелинейной задачи и найдена величина предельной относительной редукции γ, а также известна теоретическая зависимость предельной относительной редукции γ^* от величины коэффициента b_E в линеаризованной постановке задач, последняя может быть получена в результате решения уравнения

$$\gamma^*(b_E) = \gamma. \qquad (1.158)$$

Ниже рассматривается применение этого принципа в одном важном част-



Р и с. 1.10. Схема к расчету стационарного режима фильтрации при линейной зависимости расхода грунтовых вод на эвапотранспирацию от глубины их залегания

1 – водоток; *2* – площадное нагнетание; *3* – скважина; *4* – уровень грунтовых вод до начала их эксплуатации; *5* – уровень грунтовых вод в стационарном эксплуатационном режиме; *6* – критическая глубина залегания грунтовых вод; *7* – кровля водоупора

Р и с. 1.11. Графики зависимостей $\bar{x}_1$ от параметров $\bar{q}$ и χ_ε при отборе подземных вод линейным рядом скважин.

Числа у кривых – значения χ_ε

ном случае плоскопараллельного движения грунтовых вод. На рис. 1.10 изображена одномерная схема фильтрационного потока в однородном безнапорном пласте у совершенной реки, создаваемого действием линейного ряда скважин, отстоящего от реки на расстояние d, и площадного нагнетания, равномерно распределенного в полосе между рекой и линейным рядом. Последнее вводится в расчет для учета действия обратной инфильтрации оросительных вод на полях. Предполагается, что перетекание отсутствует, а величина критического положения $S_{кр}$ положительна и равна константе для всего изучаемого участка. В этих условиях уравнение фильтрации для стационарного потока имеет вид

$$TS'' - \Delta\epsilon_E + q\,\delta(x-d) - \epsilon\,[1-\theta(x-d)] = 0, \qquad (1.159)$$

где q – погонный дебит линейного водозабора;

$$\epsilon = k_в q/d \qquad (1.160)$$

– модуль площадного нагнетания; $k_в$ – коэффициент возврата. Граничные условия:

$$S(0) = \lim_{x\to\infty} S(x) = 0. \qquad (1.161)$$

Для удобства решения задачи приведем ее к безразмерному виду, полагая

$$\bar{x} = x/d; \quad y(\bar{x}) = S(x)/S_{кр}. \tag{1.162}$$

Уравнение (1.159) с учетом формулы (1.21) примет вид

$$y'' - \chi_e^2 k_E(y) + \bar{q}\,\delta(\bar{x} - 1) - \bar{\epsilon}\,[1 - \theta(\bar{x} - 1)] = 0, \tag{1.163}$$

где

$$\chi_e = d\sqrt{\epsilon_E^{(e)}/TS_{кр}} \tag{1.164}$$

– "естественный" параметр испарения,

$$\bar{q} = qd/TS_{кр}, \tag{1.165}$$

$$\bar{\epsilon} = \epsilon d^2/TS_{кр} = k_в \bar{q}. \tag{1.166}$$

В случае, когда показатель κ в формуле С.Ф. Аверьянова (1.6) равен единице, зависимость $k_E(y)$ принимает вид кусочно-линейной функции, т.е. при $y \leqslant 1$ $k_E(y) = y$, а при $y > 1$ $k_E(y) = 1$. Следовательно, полуось $0 \leqslant x < \infty$ можно разбить на три участка в зависимости от значения, принимаемого на каждом из них функцией $y(\bar{x})$: на участке 1 $(0 \leqslant \bar{x} \leqslant \bar{x}_1)$ имеем $0 \leqslant y_1(\bar{x}) \leqslant 1$; на участке 2 $(\bar{x}_1 \leqslant \bar{x} \leqslant \bar{x}_2)$ имеем $y_2(\bar{x}) \geqslant 1$; на участке 3 $(\bar{x} \geqslant \bar{x}_2)$ – $y_3(\bar{x}) \leqslant 1$, причем линейный водозабор, очевидно, всегда расположен в пределах второго участка. Сделанное разбиение позволяет представить уравнение (1.163) в виде эквивалентной системы уравнений и граничных условий:

$$y_1'' - \chi_e^2 y_1 = \bar{\epsilon}, \tag{1.167}$$

$$y_2'' - \chi_e^2 + \bar{q}\,\delta(\bar{x} - 1) - \bar{\epsilon}\,[1 - \theta(\bar{x} - 1)] = 0, \tag{1.168}$$

$$y_3'' = \chi_e^2 y_3, \tag{1.169}$$

$$y_1(0) = 0, \; y_1(\bar{x}_1) = y_2(\bar{x}_1) = y_2(\bar{x}_2) = y_3(\bar{x}_2) = 1, \tag{1.170}$$

$\lim_{\bar{x} \to \infty}$, $y_3(\bar{x}) = 0$, $y_1'(\bar{x}_1) = y_2'(\bar{x}_1)$; $y_2'(\bar{x}_2) = y_3'(\bar{x}_2)$,

$x \to \infty$.

Решение задачи (1.167)–(1.170), получаемое методами теории обыкновенных дифференцированных уравнений [23], имеет вид

$$y_1(\bar{x}) = \operatorname{sh}\chi_e \bar{x} / \operatorname{sh}\chi_e \bar{x}_1 + \epsilon^* \left[\frac{\operatorname{sh}\chi_e(\bar{x}_1 - \bar{x}) + \operatorname{sh}\chi_e \bar{x}}{\operatorname{sh}\chi_e \bar{x}_1} - 1 \right], \tag{1.171}$$

где

$$\epsilon^* = \bar{\epsilon}/\chi_e^2; \tag{1.172}$$

$$y_2(\bar{x}) = 1 + A_2(\bar{x} - \bar{x}_1) + 0{,}5(\chi_e^2 + \bar{\epsilon}\,\bar{\epsilon})(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 - \bar{q}(\bar{x} - 1)\,\theta(\bar{x} - 1) -$$

$$- (\bar{\epsilon}/2)(\bar{x} - 1)^2\,\theta(\bar{x} - 1), \tag{1.173}$$

где положено

$$A_2 = 0{,}5\,\bar{\epsilon}\,(\bar{x}_2 - 1)^2/(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + \bar{q}\,(\bar{x}_2 - 1)/(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - 0{,}5 \times \tag{1.174}$$

$$\times\,(\chi_e^2 + \bar{\epsilon}),$$

$$y_3(\bar{x}) = \exp\{-\chi_e(\bar{x} - \bar{x}_2)\}. \tag{1.175}$$

Неизвестные абсциссы $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ определяются подстановкой выражений (1.171), (1.173), (1.174) в условиях (1.170). В результате для определения абсциссы $\bar{x}_1$ получается трансцендентное уравнение

$$\bar{\epsilon}\,(1 - \bar{x}_1)^2 + \{\varphi(\bar{x}_1) - \chi_e^{-1}\,[\bar{q} - \bar{\epsilon}\,(1 - \bar{x})]\}^2 = \tag{1.176}$$

$$= 1 + 2\,\bar{q}\,(1 - \bar{x}_1).$$

где

$$\varphi(\bar{x}_1) = \operatorname{cth}\chi_e\,\bar{x}_1 + \epsilon^*\,\operatorname{th}\chi_e\,\bar{x}_1/2. \tag{1.177}$$

Решение уравнения (1.176) может проводиться с помощью какого-либо численного метода [29, 52] и др.; по соотношению (1.177) определяется значение $\varphi(\bar{x}_1)$, по нему в случае надобности – значение $\bar{x}_2$:

$$\bar{x}_2 = 1 + \chi_e^{-2}\,[\bar{q} - \chi_e(1 + \varphi_1) - (\bar{\epsilon} + \chi_e^2)(1 - \bar{x}_1)]. \tag{1.178}$$

Предельная относительная редукция равна

$$\gamma = TS'(0)/q;$$

в силу выражения (1.171) и с учетом формул (1.162) это дает

$$\gamma = \chi_e\,\bar{q}^{-1}(\operatorname{cosech}\chi_e\,\bar{x}_1 - \epsilon^*\,\operatorname{th}\chi_e\,\bar{x}_1/2). \tag{1.179}$$

С другой стороны, величина предельной относительной редукции для схемы однородного пласта, ограниченного с одной стороны совершенной рекой, при совместном действии отбора подземных вод линейным рядом скважин и площадного нагнетания, при линеаризованном по формуле (1.24) модуле испарения, может быть выражена в виде [64]:

$$\gamma^* = e^{-\chi} - k_в\,(1 - e^{-\chi})/\chi, \tag{1.180}$$

где

$$\chi = d\sqrt{b_E/T}, \tag{1.181}$$

– "линеаризованный", или "приведенный", параметр компенсации. Вычисляя величину γ по формуле (1.179) и приравнивая ее к γ^*, находим значение параметра χ с помощью решения уравнения (1.180) с левой частью, равной γ. При известной величине χ по уравнению (1.181) может быть найдено эквивалентное значение коэффициента эвапотранспирации

$$b_E = T\,(\chi/d)^2. \tag{1.182}$$

Квадрат отношения параметров компенсации в приведенных к линейным к естественным условиям может быть назван коэффициентом приведения

$$C_E = (\chi/\chi_e)^2. \tag{1.183}$$

Эта величина имеет следующий смысл: если принять уменьшенное значе-

ние модуля расхода грунтовых вод на эвапотранспирацию в "естественных" условиях, а именно взять

$$\epsilon^{(e)}_{E_{пр}} = C_E \epsilon^{(e)}_E, \tag{1.184}$$

то кусочно-линейная характеристика испарения $k_E(y)$ может быть заменена на линейную вида $k_{E_{пр}}(y) = y$, причем эта замена будет асимптотически точной при $t \to \infty$ в смысле значений редукции расхода реки.

Частный случай отсутствия площадного нагнетания в рассматриваемых условиях легко вывести из общих формул, полагая в них $\overline{\epsilon} = 0$ или $k_в = 0$. При этом для определения абсциссы $\overline{x}_1$ получаем уравнение

$$2\overline{q}(1 - \overline{x}_1) = \left(\frac{\overline{q}}{\chi_e} - \operatorname{cth}\chi_e \overline{x}_1\right)^2 - 1; \tag{1.185}$$

абсцисса $\overline{x}_2$ может быть определена с помощью равенства.

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_1 + \chi_e^{-2}\overline{q} - \chi_e^{-1}(1 + \operatorname{cth}\chi_e \overline{x}_1). \tag{1.186}$$

На рис. 1.11 показана серия зависимостей абсциссы $\overline{x}_1$ от параметров χ_e и $\overline{q}$. Линеаризованный коэффициент испарения при этом может определяться по формуле

$$b_E = d^{-2} T \ln^2(\chi_e \overline{q}^{-1} \operatorname{sh}\chi_e \overline{x}_1), \tag{1.187}$$

коэффициент приведения – по формуле

$$C_E = \chi_E^{-2} \ln^2(\chi_e^{-1}\overline{q} \operatorname{sh}\chi_e \overline{x}_1). \tag{1.188}$$

На рис. 1.12 изображена серия графиков зависимости коэффициента приведения от параметров $\overline{q}$ и χ_e. Если величина коэффициента возврата не превышает 0,2, учет влияния инфильтрации оросительных вод при определении коэффициента приведения может осуществляться заменой величины $\overline{q}$ на $(1 - k_в)\overline{q}$ в соответствующих формулах и при пользовании графиками.

При значениях $\overline{q}$, удовлетворяющих условию

$$\overline{q} \leqslant 2\chi_e(\chi_e - 1), \tag{1.189}$$

или практически

$$\chi_e \geqslant \sqrt{\overline{q}/2}, \tag{1.190}$$

значение абсциссы $\overline{x}_1$ может быть приближенно определено в виде

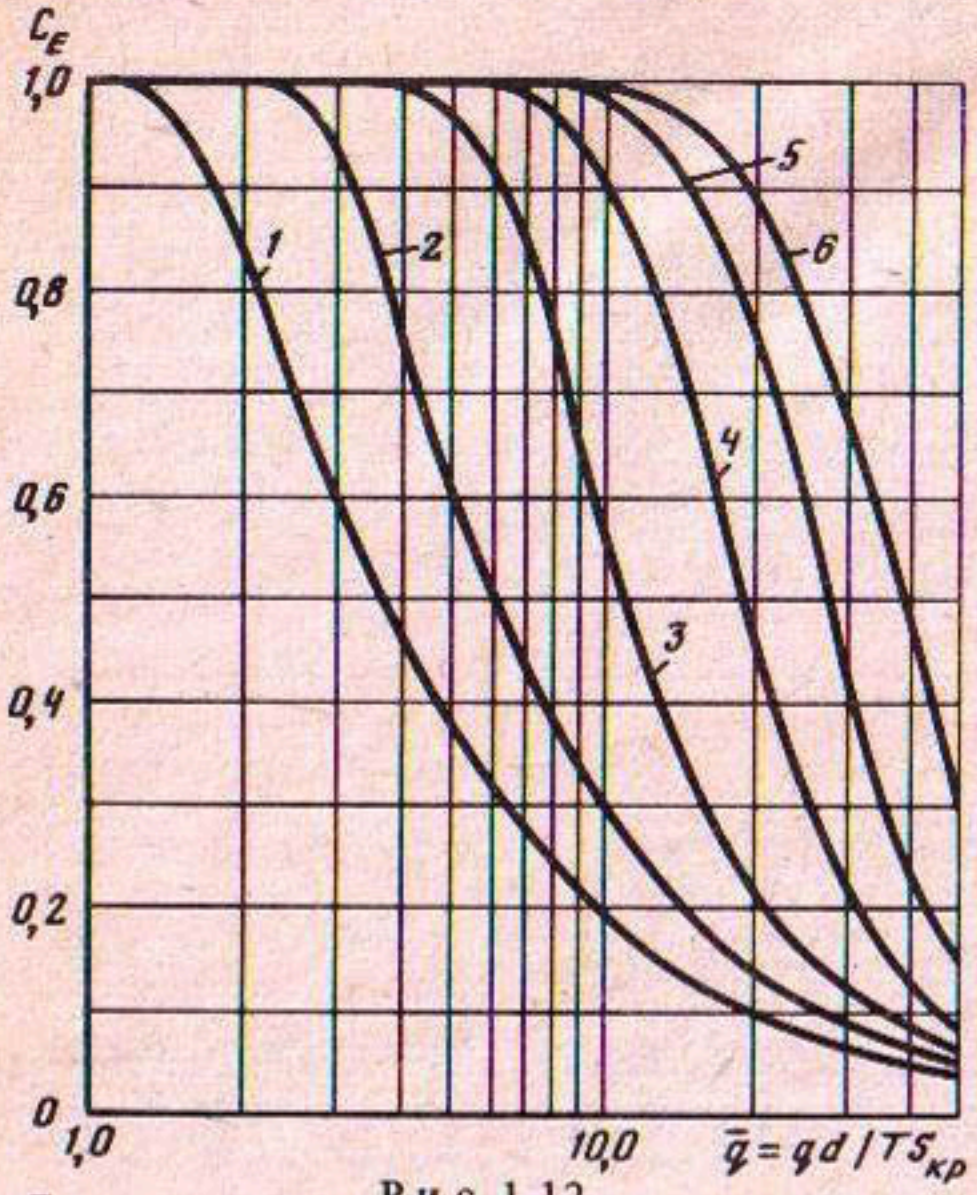
$$\overline{x}_1 \approx \chi_e^{-1}(\overline{q} - \overline{q}_{кр})/\overline{q}_{кр}, \tag{1.191}$$

где

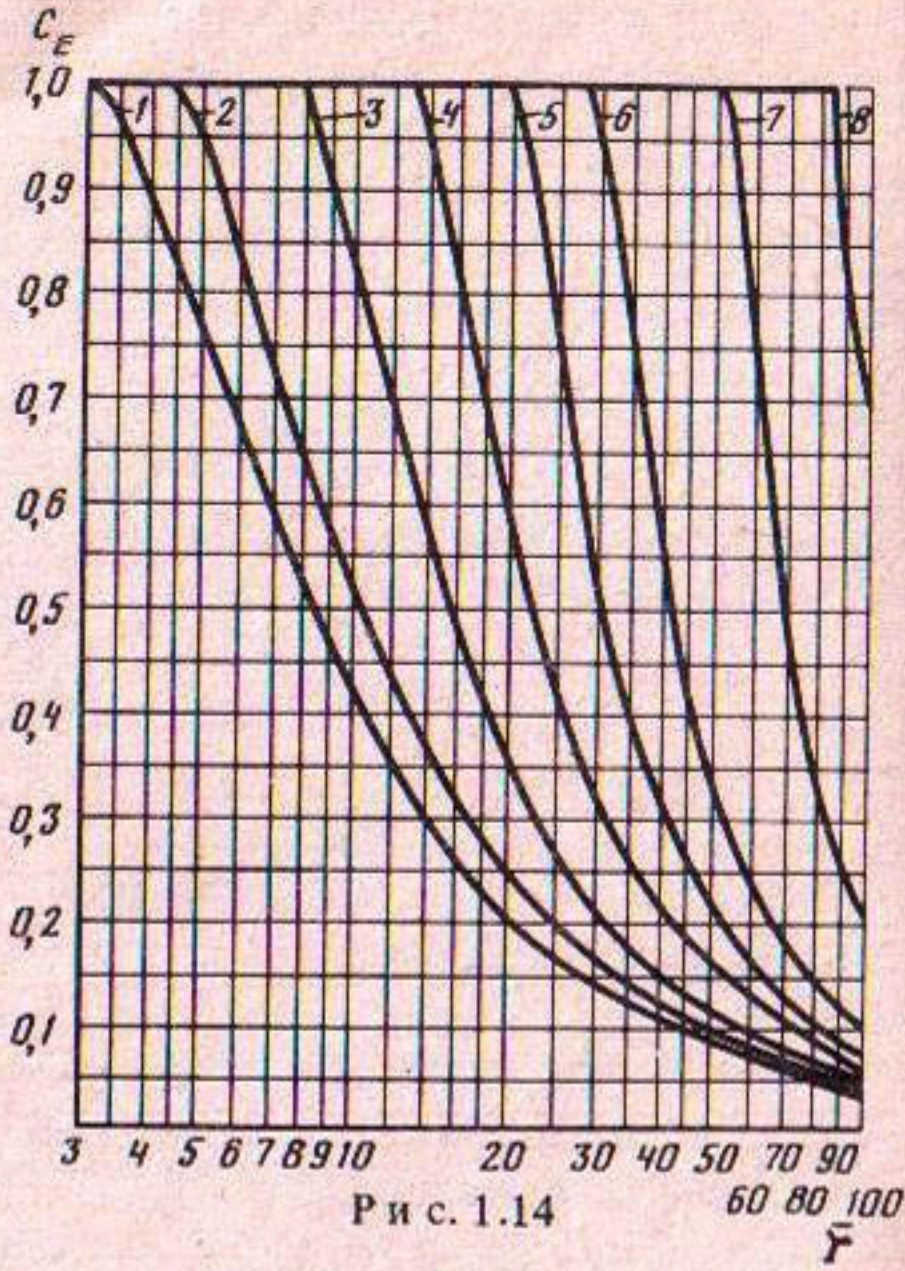
$$\overline{q}_{кр} = \frac{2\chi_e^2}{2\chi_e \exp(-\chi_e) \operatorname{sh}\chi_e - k_в(1 - \exp(-\chi_e))^2}. \tag{1.192}$$

При малых значениях χ_e, а именно при

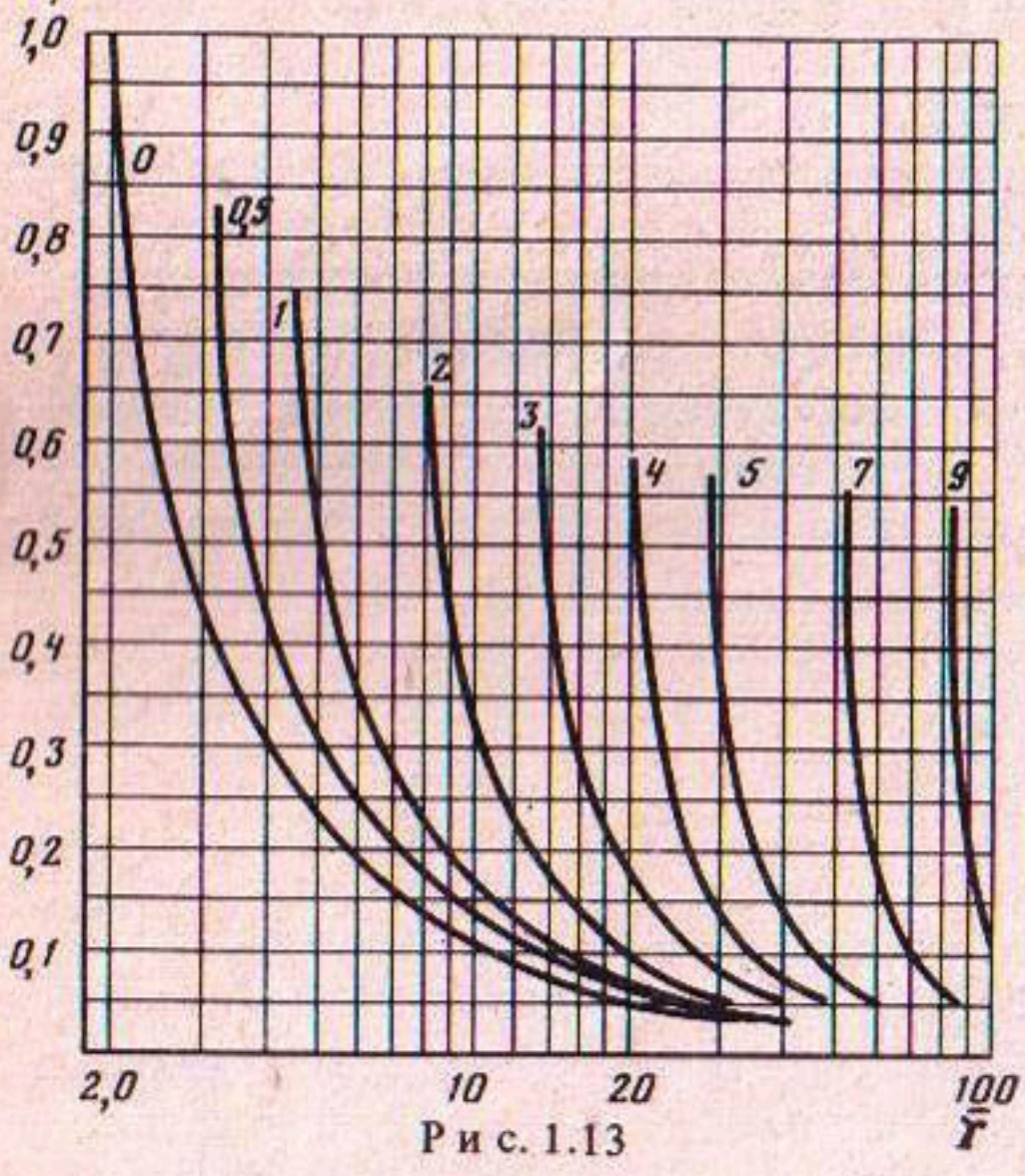
$$\chi_e \leqslant \frac{0{,}3\,\overline{q}}{1 + 0{,}3\sqrt{2\overline{q} - 1}}, \tag{1.193}$$



Р и с. 1.12



Р и с. 1.14



Р и с. 1.13

Р и с. 1.12. Графики зависимостей коэффициентов приведения C_E от параметров $\bar{q}$ и χ_e

1 – $\chi_e = 0{,}2$; *2* – $\chi_e = 0{,}5$; *3* – – $\chi_e = 1{,}0$; *4* – $\chi_e = 2{,}0$; *5* – $\chi_e = 5$; *6* – $\chi_e = 10$

Р и с. 1.13. Графики зависимостей $\bar{x}_1$ от параметров $\bar{r}$ и χ_e при отборе подземных вод площадным водозабором

Числа у кривых – значения χ_e

Р и с. 1.14. Графики зависимостей коэффициента приведения C_E от параметров $\bar{r}$ и χ_e при отборе подземных вод площадным водозабором

1 – $\chi_e = 0{,}5$; *2* – $\chi_e = 1{,}0$; *3* – $\chi_e = 2$; *4* – $\chi_e = 3$; *5* – $\chi_e = 4$; *6* – $\chi_e = 5$; *7* – $\chi_e = 7$; *8* – $\chi_e = 9$

имеет силу приближение

$$\bar{x}_1^{-1} \approx \bar{q} + \chi_e^2 - \chi_e \sqrt{\chi_e^2 + 2\bar{q} - 1}\,. \qquad (1.194)$$

Наконец, в условиях, когда неравенство (1.189) не выполняется, но

$$\bar{q}/\bar{q}_{кр} \leqslant 0{,}25\,(4 - \bar{q}_{кр} e^{-\chi_e} \operatorname{ch} \chi_e)^{-1}, \qquad (1.195)$$

абсцисса $\bar{x}_1$ приближенно находится по выражению

$$\bar{x}_1 \approx 1 - \chi_e^{-1} \operatorname{th} \chi_e + \bar{q}^{-1} \operatorname{sech} \chi_e\, e^{\chi_e}\,. \qquad (1.196)$$

Частный случай площадного водозабора, равномерно распределенного в полосе $0 \leqslant x \leqslant d$, очевидно, может быть выведен из общего случая, если везде в формулах положить $\overline{q} = 0$; $\epsilon = -(1 - k_в)\,\overline{\Upsilon}$, где

$$\overline{\Upsilon} = \Upsilon d^2 / T S_{кр}, \tag{1.197}$$

Υ – модуль отбора подземных вод площадной системой скважин. Уравнение (1.176) при этом приобретает вид

$$-(1 - k_в)\,\overline{\Upsilon}\,(1 - \overline{x}_1)^2 + [\varphi(\overline{x}_1) + (1 - k_в)\,\chi_e^{-1}\,\overline{\Upsilon}\,(1 - \overline{x}_1)]^2 = 1, \tag{1.198}$$

выражение предельной относительной редукции –

$$\gamma = \chi_e\,[(1 - k_в)\,\overline{\Upsilon}]^{-1}\,(\operatorname{cosech}\chi_e^{-1}\,\overline{x}_1 + \Upsilon^*\,(1 - k_B)\,\operatorname{th}\chi_e\,\overline{x}_1/2), \tag{1.199}$$

где

$$\Upsilon^* = \overline{\Upsilon}/\chi_e^2\,. \tag{1.200}$$

Уравнение (1.176) заменяется на

$$\gamma^* = (1 - k_в)\,(1 - e^{-\chi})/\chi. \tag{1.201}$$

Графики зависимостей координаты $\overline{x}_1$ от параметров $(1 - k_в)\,\overline{\Upsilon}$ и χ_e изображены на рис. 1.13, а зависимость коэффициета приведения от этих же параметров – на рис. 1.14.

При определенных соотношениях между величинами водоотбора, инфильтрации и параметрами испарения грунтовых вод в режиме эксплуатации уровень грунтовых вод ни в одной точке на опустится ниже критической отметки; очевидно, при этом коэффициент приведения $C_E = 1$ и $\chi = \chi_e$. Для того чтобы найти критические условия, при которых свободная поверхность грунтовых вод начинает пересекать критический уровень, следует решить уравнение (1.163) при линейной характеристике испарения $k_E(y) = k_{Eпр}(y) = y$ и приравнять к единице максимальное значение $y(\overline{x})$. В случае линейного водозабора искомое критическое условие имеет вид

$$\overline{q} \leqslant \overline{q}_{кр}, \tag{1.202}$$

где значение $\overline{q}_{кр}$ определяется формулой (1.192). В случае площадного водозабора может быть получено сходное критическое условие на модуль отбора

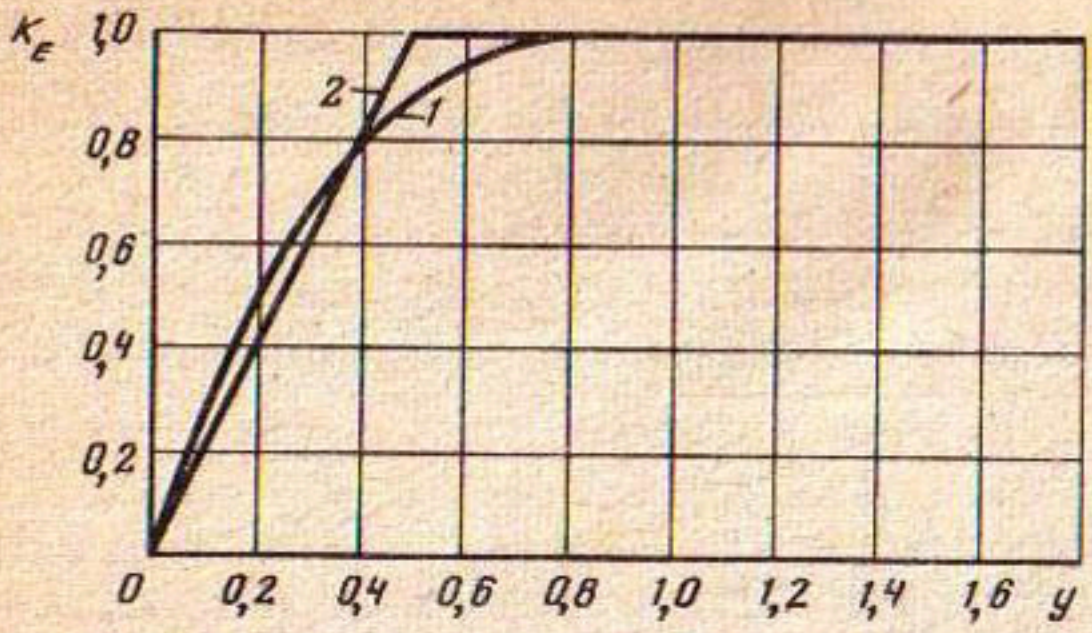
$$\overline{\Upsilon} \leqslant \overline{\Upsilon}_{кр}, \tag{1.203}$$

где

$$\overline{\Upsilon}_{кр} = (1 - k_в)^{-1}\,\frac{\chi_e^2}{1 - e^{-\chi e}\sqrt{2\,e^{\chi e} - 1}}\,. \tag{1.204}$$

Изложенные результаты относятся лишь к простой схеме на рис. 1.10. Многие реальные конфигурации приводят уже к весьма сложным расчетным схемам. Вместе с тем опытные расчеты показали, что вполне удовлетворительные результаты могут быть получены с помощью формул приведения для схемы на рис. 1.10, если вычислять параметр $S_{кр}$ по вытекающей из (1.6) и (1.20) формуле

$$S_{кр} = \Delta_{кр}\,(\epsilon_E^{(e)}/E_0)^{1/\kappa}. \tag{1.205}$$



Р и с. 1.15. График зависимости $K_E(y)$ при $\kappa = 3$ (кривая *1*) и "деформированной" безразмерной характеристики эвапотранспирации для $\kappa = 1$ (кривая *2*)

В этой формуле величины $\Delta_{кр}$, E_0 и κ определяются климатическими и гидрогеологическими условиями района, а модуль испарения в естественных условиях – на основе результатов водобалансовых исследований – делением расхода грунтовых вод на испарение на полную площадь области фильтрации.

Что касается применения формулы С.Ф. Аверьяновва (1.6) при значениях показателя κ, отличных от единицы, формулы приведения, аналогичные выражению (1.184), могут быть получены и в этом случае. Соответствующие формулы будут, однако, весьма громоздкими по своей структуре, поэтому для практического учета возможного отличия значения κ от единицы, как представляется, более целесообразно воспользоваться приемом "деформации" безразмерной характеристики эвапотранспирации $k_E(y)$. Под этим подразумеваются продление горизонтального участка характеристики влево и соответствующая замена криволинейного начального участка характеристики прямолинейной с угловым коэффициентом, определяемым из условия равенства интегралов в пределах от нуля до точки перелома "деформированной" характеристики. На рис. 1.15 приведен график зависимости $k_E(y)$ при $\kappa = 3$ (это значение близко к максимально возможному), а также график "деформированной" характеристики. Анализ этого рисунка позволяет прийти к выводу о возможности замены действительной характеристики на "деформированную" в пределах точности, сравнимой с точностью исходной информации.

Уравнение "деформированной" характеристики, определенное на основании приведенных выше соображений, имеет вид

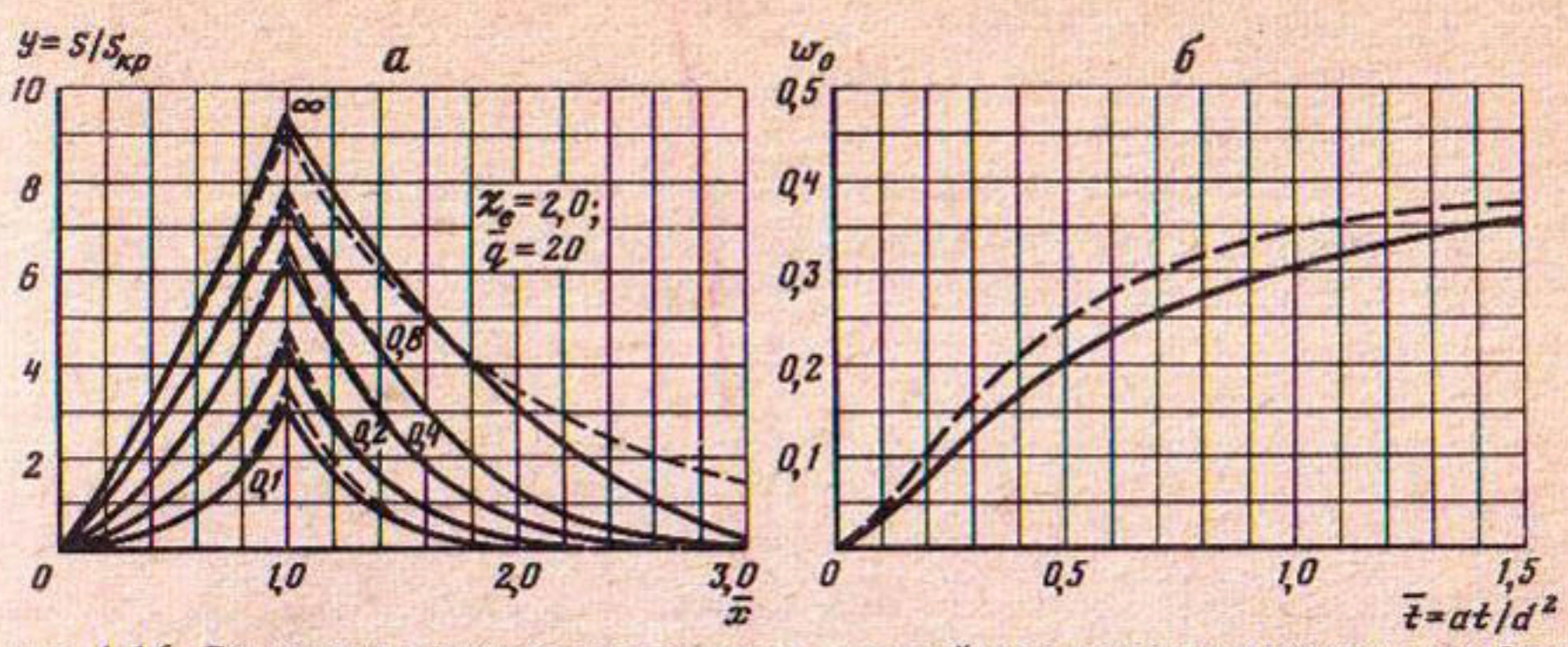
$$k_E^*(y) = \begin{cases} y/y_0, \ y \leqslant y_0, \\ \\ 1, \ y \geqslant y_0, \end{cases} \qquad (1.206)$$

где $y_0 = 2\ (1 + \kappa)^{-1}$. Очевидно, использование этой характеристики эквивалентно уменьшению параметра $S_{кр}$ по сравнению с расчетной величиной, т.е. принятию вместо последней значения

$$S_{кр}^* = 2\, S_{кр}/(1 + \kappa). \qquad (1.207)$$

Численные расчеты показывают, что описанный прием приводит к хорошим результатам в смысле приближения характеристик редукции.

Изложенный балансовый метод линеаризации уравнения фильтрации более приемлем для задач по определению изменения поверхностного



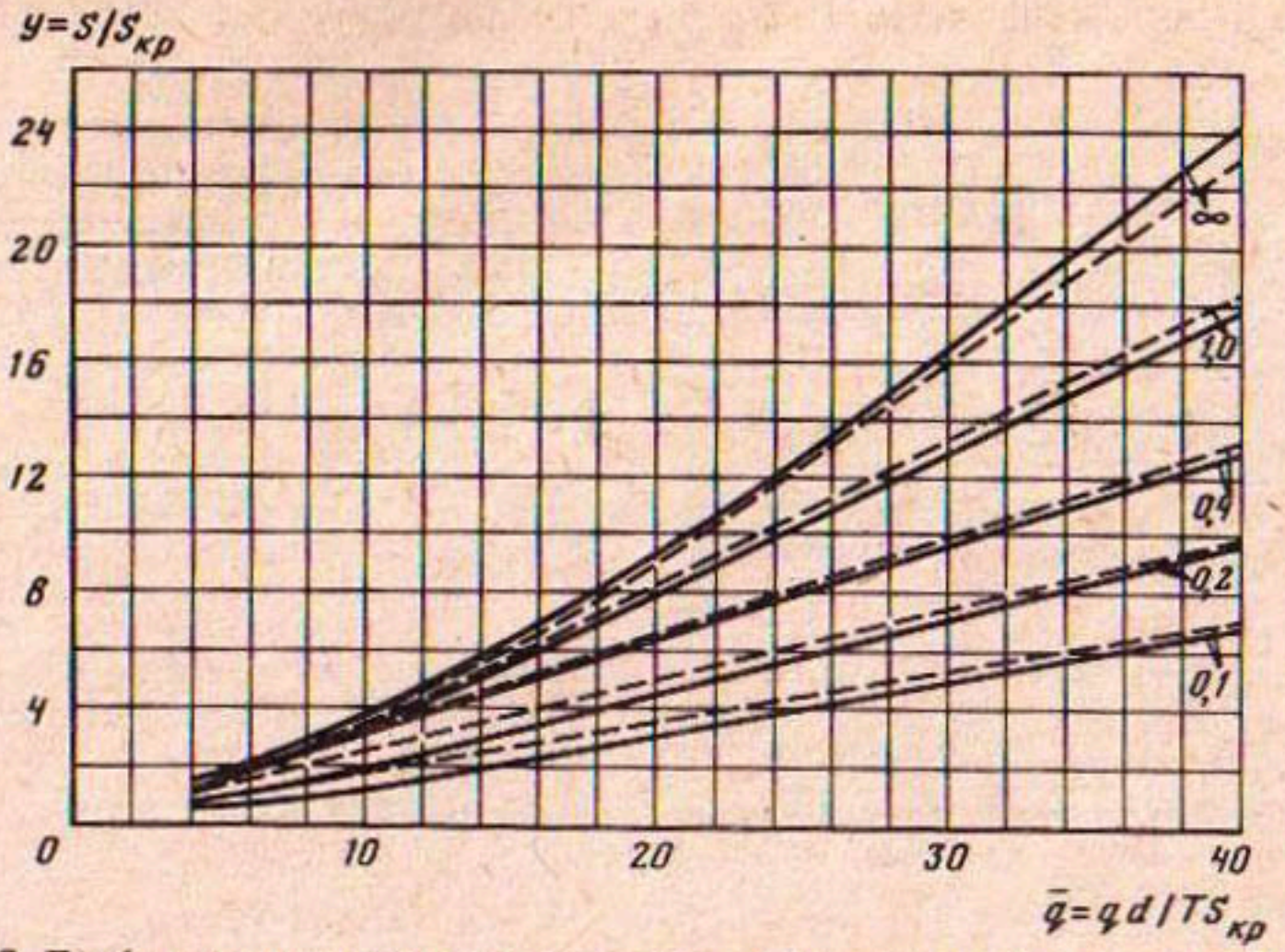
Р и с. 1.16. Результаты численного решения нелинейного нестационарного уравнения фильтрации (сплошные линии) и графики аналитических решений линеаризованного уравнения (пунктирные линии)

На рис. *а* – зависимости понижения уровня грунтовых вод от расстояния до границы питания (числа над кривыми – значения t), на рис. *б* – зависимости относительной редукции от $\bar{t}$

стока, однако удовлетворительные результаты получены и при его использовании для расчетов понижения уровня грунтовых вод и при их эксплуатации. На рис. 1.16, *а* изображены графики распределений отношения понижения уровня к критическому значению при отборе грунтовых вод в условиях схемы (рис. 1.10) при различных значениях времени эксплуатации $t = at/d^2$. Сплошными линиями нанесены кривые, соответствующие результатам численных расчетов с помощью метода конечных разностей, пунктиром – кривые, полученные аналитическими расчетами после выполнения линеаризации. На рис. 1.16, *б* изображены соответствующие графики для функций относительной редукции при $\chi_e = 2{,}0$; $\bar{q} = 20$, которые могут отвечать, например, таким типичным условиям: $T = 1000$ м^2/сут; $b_e = 10^{-3}$ сут$^{-1}$, $d = 2$ км, $q = 10$ м^2/сут; $S_{кр} = 1$ м. Графики показывают, что использование предложенного метода линеаризации в рассмотренных условиях приводит к некоторому завышению расчетных значений редукции поверхностного стока, что является желательным в целях обеспечения некоторого "запаса надежности".

На рис. 1.17 приведена серия графиков зависимостей относительной величины понижения уровня грунтовых вод на линии водозабора при $\chi_e = 2{,}0$ и переменном значении относительной величины водоотбора q. Графики показывают, что при изменении величины $\bar{q}$ в широких пределах сохраняется удовлетворительная точность расчетов понижения уровня на линии водозабора, за исключением весьма больших величин времени эксплуатации, при которых расчетное значение понижения при линеаризации превосходит полученное в результате численного интегрирования.

Метод линеаризации зависимости изменения модуля эвапотранспирации от глубины залегания грунтовых вод может быть использован для учета влияния еще одной статьи баланса подземных вод – их разгрузки в коллекторно-дренажную сеть высокой плотности. Этот эмпирический способ заключается в линеаризации зависимости модуля дренажного стока от глубины залегания грунтовых вод и основан на внешней аналогии механизма стабилизирующего действия горизонтального дренажа высокой плотности



Р и с. 1.17. Графики относительных величин понижения уровня грунтовых вод на линии водозабора при $\chi_e = 2$

Числа у кривых — значения $\bar{t}$. Сплошные линии — результат численного расчета, пунктирные — аналитические решения линеаризованного уравнения

на положение уровня грунтовых вод с механизмом действия эвапотранспирации. Действительно, и интенсивная эвапотранспирация грунтовых вод, и их дренажная разгрузка происходят в условиях неглубокого их залегания, т.е. площади распространения обоих факторов примерно совпадают. Как нетрудно убедиться, рассматривая известные решения уравнений динамики грунтовых вод, в междренном промежутке величина дренажного стока пропорциональна средней глубине залегания грунтовых вод между дренами [47, 59]. Это же положение подтверждается и некоторыми натурными наблюдениями [24, 46]. При опускании свободной поверхности ниже отметки дна дрен их сток, очевидно, станет равен нулю. Эти соображения дают возможность представить величину модуля дренажного стока в виде

$$\epsilon_{др} = \begin{cases} \epsilon_{др.о}\,(1 - \Delta/\Delta_д),\ \Delta \leqslant \Delta_д, \\ 0,\ \Delta \geqslant \Delta_д, \end{cases} \qquad (1.208)$$

где $\epsilon_{др.о}$ — величина модуля дренажного стока при стоянии грунтовых вод у дневной поверхности; $\Delta_д$ — глубина дна дрен, Δ — глубина залегания грунтовых вод.

Аналогия формулы (1.208) с формулой (1.6) при допущении в последней $\kappa = 1$ очевидна. Поэтому зависимость суммарного модуля испарения и дренажного стока от глубины залегания грунтовых вод может быть линеаризована с помощью описанного выше метода приведения. Его процедура, требует, однако, некоторых усложнений, связанных с различием свойств характеристик (1.6) и (1.208). Однако, если положить $\kappa = 1$ и $\Delta_д = \Delta_{кр}$ (ввиду приближенности метода это не должно вносить качественного искажения результатов), указанные осложнения снимаются. В этом случае

вместо величины испаряемости E_0 должна фигурировать суммарная величина

$$\epsilon_{\Sigma}^{(0)} = E_0 + \epsilon_{\text{др.о}}, \tag{1.209}$$

а вместо величины модуля расхода грунтовых вод на эвапотранспирацию в естественных условяих – суммарная величина

$$\epsilon_{\Sigma}^{(e)} = \epsilon_{E}^{(e)} + \epsilon_{\text{др}}^{(e)}, \tag{1.210}$$

где последнее слагаемое равно модулю дренажного стока до начала эксплуатации подземных вод.

По аналогии с формулой (1.24) можно записать, что сокращение суммарного модуля испарения и дренажного стока в режиме эксплуатации равно

$$\Delta\epsilon_{\Sigma} = b_{\Sigma\text{пр}} S, \tag{1.211}$$

где

$$b_{\Sigma\text{пр}} = \epsilon_{\Sigma\ \text{пр}}^{(e)} / S_{\text{кр}} \tag{1.212}$$

– приведенная величина коэффициента компенсационного питания, включая сокращение как расхода на эвапотранспирацию, так и дренажного стока. Сокращение модуля одного дренажного стока (без эвапотранспирации) при этом составит

$$\Delta\epsilon_{\text{др}} = b_{\text{др}} S, \tag{1.213}$$

где

$$b_{\text{др}} = (\epsilon_{\text{др}}^{(e)} / \epsilon_{\Sigma}^{(e)})\, b_{\Sigma\ \text{пр}}. \tag{1.214}$$

Величина изменения дренажного стока при эксплуатации подземных вод может быть охарактеризована интегралом вида

$$W_{\text{др}}(t) = b_{\text{др}} \iint\limits_{(D)} S(M, t)\, dx\, dy; \tag{1.215}$$

с учетом формулы (1.35) изображение по Лапласу временно́й зависимости $W_{\text{др}}(t)$ может быть представлено в виде

$$\hat{W}_{\text{др}}(p) = U_{W\text{др}}(p)\, \hat{Q}(p), \tag{1.216}$$

где передаточная функция редукции дренажного стока выражается в виде

$$U_{W\ \text{др}}(t) = \frac{1}{T_*} \iint\limits_{(D)} b_{\text{др}}\, U_S(M, p)\, dx\, dy. \tag{1.217}$$

Глава 2

ОЦЕНКА ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД ПРИ ПОСТОЯННОМ ВО ВРЕМЕНИ ОТБОРЕ

Вопросы методики гидрогеологических расчетов по оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод разрабатываются в течение полувека: первые работы С.Тэйса относятся к началу 30-х годов. К настоящему времени эта отрасль гидрогеологической науки представляет собой достаточно сформировавшуюся научно-техническую дисциплину, характеризующуюся комплексом сложившихся взглядов на предмет исследований – движение подземных вод в условиях их эксплуатации, а также принципов решения соответствующих гидродинамических задач. Наиболее полное представление о современном состоянии методики оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод дают получившие широкую известность монографии и учебники Ф.М.Бочевера [6], В.М.Шестакова [59], М.С.Хантуша [64], В.С.Уолтона [76] и др. Однако, учитывая отсутствие сколько-нибудь полных систематических библиографических обзоров по этому вопросу, представляется весьма желательным издание обширного справочника по расчетам эксплуатационных ресурсов подземных вод.

Настоящая глава преследует в основном методические цели, не претендуя на полное изложение соответствующих расчетных зависимостей, что обусловило определенное сужение рассматривающихся в ней гидрогеологических условий. Рассматриваются схемы, которые могут быть причислены к наиболее простым. Это схемы однородных в фильтрационном отношении пластов – неограниченного, с границей питания, а также схемы пластов-полос. Более сложные конфигурации областей фильтрации, а также вопросы, связанные с фильтрационной неоднородностью водоносных горизонтов, подробно не рассматриваются. Вместе с тем рассмотренная в главе 1 (1.3) методика определения передаточных функций для ограниченных в плане и неоднородных в фильтрационном отношении водоносных пластов позволяет выполнить необходимые расчеты и для этих условий. В настоящей главе в качестве примера таких расчетов приведен случай линейного и площадного водозаборов, работающих в речной долине, характеризующейся полосовой фильтрационной неоднородностью эксплуатируемого горизонта и наличием испарения в естественных условиях.

Следует отметить, что рассмотренные гидрогеологические схематизации охватывают довольно широкий круг реально существующих природных условий, что обусловливает и определенное практическое значение излагаемого материала. Авторы включили в настоящую главу некоторые новые результаты, а также таблицы и графики, что особенно важно при практическом применении расчетных формул.

Как уже сообщалось во введении и главе 1, оценка эксплуатационных ресурсов сводится к установлению пространственно-временной зависимости между эксплуатационным водоотбором и вызванным им понижением уровня в эксплуатируемом горизонте. Для этого необходимо и достаточно определить гидравлическое сопротивление $R_0(M, t)$ и подставить его в основные расчетные зависимости (1.37) или (1.38).

2.1. СХЕМЫ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТОВ

Схема неограниченного однородного по фильтрационным параметрам пласта является наиболее простой для изучения; выражения передаточной функции понижения и гидравлического сопротивления при отборе подземных вод одиночным водозабором получены М.С.Хантушем [64] и имеют вид соответственно

$$U_S(M, p) = \frac{1}{2\pi} K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a} + g^2}\right), \tag{2.1}$$

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi} W\left(\frac{r^2}{4at}, gr\right), \tag{2.2}$$

где $K_0(z)$ – функция Макдональда [52]; $W(u, \alpha)$ – функция Хантуша, табулированная почти во всех руководствах по гидрогеологическим расчетам, например в работе [53]. При этом в формулах (2.1), (2.2) r – расстояние от точки M до центра водозабора, $g = \sqrt{\frac{b}{T}}$ – параметр, который принято называть компенсационным эффектом. В условиях отсутствия компенсационного питания формула (2.2) переходит в выражение, полученное впервые С.Тэйсом:

$$R_0(M, t) = -\frac{1}{4\pi} \mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right), \tag{2.3}$$

где $\mathrm{Ei}(z)$ – интегральная показательная функция [52].

При $t \to \infty$, когда $g \neq 0$, гидравлическое сопротивление (2.2) стабилизируется, будучи ограничено сверху величиной

$$R_0(M, t) = \frac{1}{2\pi} K_0(gr). \tag{2.4}$$

Если компенсационное питание отсутствует, стабилизации значений гидравлического сопротивления не будет ни в одной точке области фильтрации. При значениях времени, превышающих $(2{,}5...5)\, r^2/a$, формула (2.3) упрощается при этом до вида

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{2{,}25\, at}{r^2}, \tag{2.5}$$

который обычно и применяется для расчета понижения.

В условиях, когда отбор подземных вод ведется прямолинейным рядом скважин значительной протяженности B, передаточная функция понижения определяется равенством

$$U_S(M, p) = \frac{e^{-\beta r}}{2B\beta}, \tag{2.6}$$

где зависимость

$$\beta(p) = \sqrt{\frac{p}{a} + g^2} \tag{2.7}$$

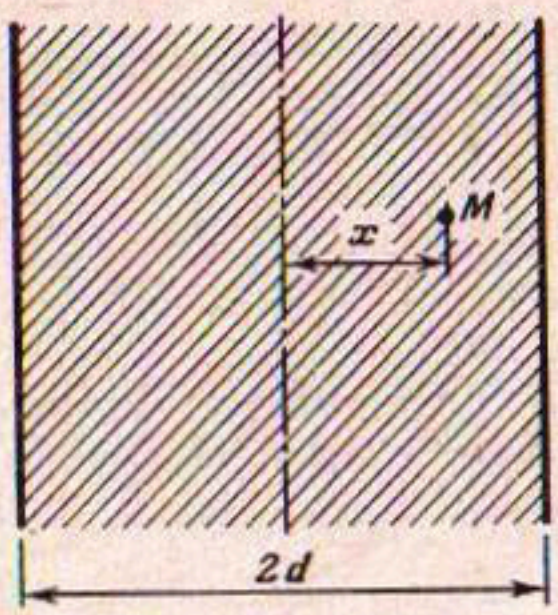
носит характер операционного компенсационного эффекта. Соответствующее передаточной функции (2.6) гидравлическое сопротивление имеет вид

$$R_0(M, t) = \frac{1}{2Bg} \mathrm{D}^*\left(\frac{r}{2\sqrt{at}}; gr\right), \tag{2.8}$$

где функция $\mathrm{D}^*(z, \alpha)$ определена выражением

$$\mathrm{D}^*(z, \alpha) = \frac{1}{2}\left[e^{-\alpha}\mathrm{erfc}\left(z - \frac{\alpha}{2z}\right) - e^{\alpha}\mathrm{erfc}\left(z + \frac{\alpha}{2z}\right)\right], \tag{2.9}$$

erfc z – дополнительный интеграл вероятностей [52], значения этой функции приведены в Приложении 1. Значения функции $\mathrm{D}^*(z, \alpha)$ приведены



Р и с. 2.1 Схема площадного полосового водозабора в неограниченном однородном пласте

в Приложении 3. При отсутствии компенсационного питания выражение (2.8) приобретает более простой вид:

$$R_0(M, t) = \frac{\sqrt{at}}{B} \,\mathrm{ierfc}\, \frac{r}{2\sqrt{at}}, \tag{2.10}$$

где ierfc z – повторный интеграл вероятностей [52], значения которого также приведены в Приложении 1.

Если отбор подземных вод ведется площадным водозабором, равномерно распределенным в полосе шириной $2d$ (рис. 2.1), передаточная функция понижения имеет следующий вид:

$$U_S(M, p) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-\beta d}\,\mathrm{ch}\,\beta x}{2\beta^2 dB} & \text{– для точек, находящихся внутри полосы отбора,} \\ \dfrac{1}{2\beta^2 dB} e^{-\beta|x|}\,\mathrm{sh}\,\beta d & \text{– для точек вне полосы отбора.} \end{cases} \tag{2.11}$$

Соответствующие временны́е зависимости гидравлических сопротивлений выражаются формулами:
для точек внутри полосы отбора

$$R_0(M, t) = \frac{1}{2dBg^2}\left\{1 - e^{-ag^2 t} - \frac{1}{2}\mathrm{D}_0\left(\frac{d - |x|}{2\sqrt{at}}; g(d - |x|)\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\mathrm{D}_0\left(\frac{d + |x|}{2\sqrt{at}}; g(d + |x|)\right)\right\}; \tag{2.12}$$

для точек вне этой полосы

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4dBg^2}\left\{ D_0\left(\frac{|x| - d}{2\sqrt{at}};\ g(|x| - d)\right) - D_0\left(\frac{|x| + d}{2\sqrt{at}};\right.\right.$$
$$\left.\left. g(|x| + d)\right)\right\}, \qquad (2.13)$$

где

$$D_0(z, \alpha) = D(z, \alpha) - e^{-\frac{\alpha^2}{4z^2}} \operatorname{erfc} z, \qquad (2:14)$$

$$D(z, \alpha) = \frac{1}{2}\left[e^{-\alpha}\operatorname{erfc}\left(z - \frac{\alpha}{2z}\right) + e^{\alpha}\operatorname{erfc}\left(z + \frac{\alpha}{2z}\right)\right]. \qquad (2.15)$$

Значения функции $D(z, \alpha)$ приведены в Приложении 2.

В условиях отсутствия компенсационного питания формулы (2.12) и (2.13) переходят соответственно в выражения

$$R_0(M, t) = \frac{at}{2Bd}\left\{1 - 2i^2\operatorname{erfc}\frac{d - |x|}{2\sqrt{at}} - 2i^2\operatorname{erfc}\frac{d + |x|}{2\sqrt{at}}\right\}; \qquad (2.16)$$

$$R_0(M, t) = \frac{at}{Bd}\left\{i^2\operatorname{erfc}\frac{|x| - d}{2\sqrt{at}} - i^2\operatorname{erfc}\frac{|x| + d}{2\sqrt{at}}\right\}. \qquad (2.17)$$

В точке на осевой линии водозабора величина гидравлического сопротивления может быть определена по формуле

$$R_0(M', t) = \frac{d}{B}F\left(\frac{d}{2\sqrt{at}}, gd\right), \qquad (2.18)$$

где.

$$F(z, \alpha) = \frac{1 - e^{-\frac{\alpha^2}{4z^2}} - D_0(z, \alpha)}{2\alpha^2}; \qquad (2.19)$$

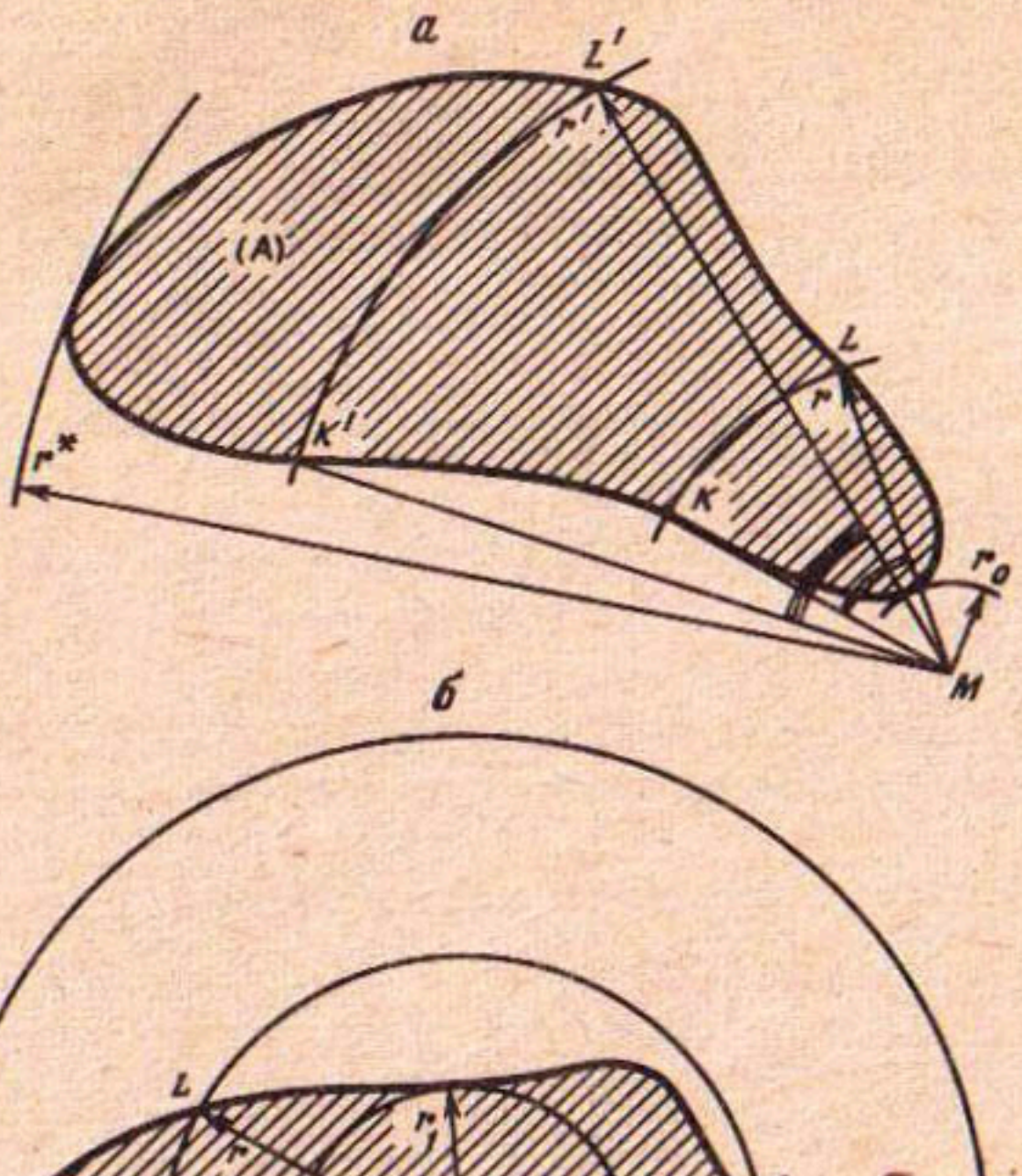
при $g = 0$

$$F(z, \alpha) = \frac{1 - 4i^2\operatorname{erfc} z}{8z^2}. \qquad (2.20)$$

Расчет понижения уровня (напора) подземных вод при их отборе площадными водозаборами более сложной формы в условиях однородного неограниченного пласта рассматривался многими авторами [6, 47, 59, 64 и др.], давшими решения для случаев прямоугольных и круговых областей водоотбора. Здесь приводится приближенное решение этой задачи для любой конфигурации области водоотбора.

Пусть область равномерного водоотбора имеет форму, изображенную на рис. 2.2. Понижение уровня подземных вод в точке M, находящейся вне области (A) (рис. 2.2, *а*), согласно принципу суперпозиции равно результату влияния всех точек, содержащихся внутри области (A), причем каждая точка этой области вызывает в точке M элементарное понижение, передаточная функция которого, как известно [2], определяется формулой

$$U_S(M, p) = \frac{1}{2\pi}K_0(\beta r). \qquad (2.21)$$



Р и с. 2.2. Схемы к выводу формул (2.24) и (2.25)

а – в случае, когда точка M находится вне области водоотбора, при радиусе дуги $r = MK$ угол $\theta(r)$ равен $\angle KML$; при радиусе дуги $r' = K'M$ угол $\theta(r')$ равен $\angle K'ML'$; *б* – в случае, когда точка M находится внутри области водоотбора, угол, под которым видна часть дуги радиуса r, лежащая внутри области (A), равна сумме углов $\angle KML$ и $\angle K_1ML_1$

При этом очевидно, что точки, лежащие от точки M на равном расстоянии r, вызывают в точке M одинаковую реакцию; таким образом, если мы проведем из точки M дугу окружности KL радиуса r, все точки из области (A), лежащие на этой дуге, эквивалентны в отношении понижения, вызываемого ими в точке M. Разобьем теперь область (A) сеткой окружностей с центром в точке M. В пределах малой области, ограниченной дугами близкого радиуса $\tilde{r}_{n-1}$ и r_n с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка, чем $\Delta r_n = r_n - r_{n-1}$, значение передаточной функции понижения по отношению к точке M будет равно $\frac{1}{2\pi} K_0(\beta \tilde{r}_n)$,

где $r_{n-1} \leqslant \tilde{r}_n \leqslant r_n$. Поэтому значение элементарного понижения, обусловленного влиянием малой области между дугами радиусов r_{n-1} и r_n, будет равно (при постоянном для всей области модуле водоотбора Υ)

$\frac{\Upsilon}{2\pi} \Delta A_n K_0(\beta \tilde{r}_n)$, где ΔA_n – площадь определенной выше малой области.

По формулам элементарной геометрии с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δr_n,

$$\Delta A_n = \frac{\tilde{\theta}}{2}(r_n^2 - r_{n-1}^2), \tag{2.22}$$

где $\tilde{\theta}$ – угол (в радианах), под которым видна дуга радиуса $\tilde{r}_n$ из точки M. Преобразуя (2.22), имеем

$$\Delta A_n = \tilde{\theta} \frac{r_n + r_{n-1}}{2} \Delta r_n;$$

для определения передаточной функции понижения, учитывающей влияние всех точек области водозабора, составляем теперь сумму

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi} K_0(\beta \tilde{r}_n) \frac{r_{n-1} + r_n}{2} \tilde{\theta} \Delta r_n. \tag{2.23}$$

Устремляя величины Δr_n к нулю, в пределе получаем выражение для передаточной функции понижения в виде

$$U_S(M, p) = \frac{1}{2\pi A} \int_{r_0}^{r^*} K_0(\beta r)\theta(r) r dr, \tag{2.24}$$

где A – площадь области водоотбора (A); r_0 и r^* – значения радиусов, при которых величина $\theta(r)$ обращается в нуль.

Для точек внутри области водоотбора (рис. 2.2, *б*), очевидно, $\theta(r) = 2\pi$ при $0 \leqslant r \leqslant r_*$, поэтому для этих точек справедливо выражение для передаточной функции понижения вида

$$U_S(M, p) = \overset{\circ}{U}_S(M, p) + \frac{1}{2\pi A} \int_{r_*}^{r^*} K_0(\beta r)\theta(r) r dr, \tag{2.25}$$

где

$$\overset{\circ}{U}_S(M, p) = \frac{A^0}{A} \frac{1}{\pi r_*^2} \int_0^{r_*} K_0(\beta r) r dr = \frac{A^0}{A}\left\{\frac{1}{\pi\beta^2 r_*^2} - \frac{K_1(\beta r_*)}{\pi\beta r_*}\right\}, \tag{2.26}$$

$A^0 = \pi r_*^2$ – площадь круга радиуса r_*.

Гидравлические сопротивления для нахождения понижений определяются по аналогичным формулам:

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{r_0}^{r^*} W\left(\frac{r^2}{4at}, gr\right)\theta(r) r dr \tag{2.27}$$

Таблица 8

Значения функции $F_0(\alpha)$

α	$F_0(\alpha)$	α	$F_0(\alpha)$	α	$F_0(\alpha)$	α	$F_0(\alpha)$
0,0001	0,7666	0,006	0,4410	0,20	0,1694	7,0	0,0114
0,0002	0,7114	0,007	0,4288	0,30	0,1408	8,0	0,0099
0,0003	0,6792	0,008	0,4182	0,40	0,1215	9,0	0,0088
0,0004	0,6563	0,009	0,4089	0,50	0,1072	10	0,0080
0,0005	0,6385	0,01	0,4005	0,60	0,0960	20	0,0040
0,0006	0,6240	0,02	0,3457	0,70	0,0870	30	0,0027
0,0007	0,6118	0,03	0,3139	0,80	0,0795	40	0,0020
0,0008	0,6011	0,04	0,2914	0,90	0,0732	50	0,0016
0,0009	0,5918	0,05	0,2740	1,0	0,0678	60	0,0013
0,001	0,5834	0,06	0,2599	2,0	0,0383	70	0,0011
0,002	0,5283	0,07	0,2480	3,0	0,0262	80	0,0010
0,003	0,4960	0,08	0,2378	4,0	0,0198	90	0,0009
0,004	0,4732	0,09	0,2288	5,0	0,0159	100	0,0008
0,005	0,4555	0,10	0,2208	6,0	0,0133		

– для точек вне области водоотбора,

$$R_0(M,t) = \overset{\circ}{R}_0(M,t) + \frac{1}{4\pi A}\int_{r_*}^{r^*} W\left(\frac{r^2}{4at}, gr\right)\theta(r)\,r\,dr \qquad (2.28)$$

– для точек внутри этой области, причем

$$\overset{\circ}{R}_0(M,t) = \frac{A^\circ}{A}\left\{\frac{1-e^{-ag^2t}}{\pi g^2 r_*^2} - F\left(\frac{r_*^2}{4at};\ gr_*\right)\right\}. \qquad (2.29)$$

где положено

$$F(\alpha,\chi) = \frac{1}{4\pi}\int_{\alpha}^{\infty} e^{-z-\frac{\chi^2}{4z^2}}\frac{dz}{z^2}. \qquad (2.30)$$

При $g = 0$, что соответствует условиям отсутствия компенсационного питания, все формулы упрощаются; так, для определения величины гидравлического сопротивления, относящегося к точке M вне области водоотбора, используется формула

$$R_0(M,t) = \frac{1}{4\pi A}\int_{r_0}^{r^*}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right)\right]\theta(r)\,r\,dr; \qquad (2.31)$$

для точки M внутри области – формула

$$R_0(M,t) = \overset{\circ}{R}_0(M,t) + \frac{1}{4\pi A}\int_{r_*}^{r^*}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right)\right]\theta(r)\,r\,dr, \qquad (2.32)$$

Таблица 9

Значения узлов x_k и весов w_k квадратурной формулы Гаусса при некоторых значениях N

k	x_k	w_k	k	x_k	w_k
	$N=4$			$N=6$	
1	– 0,8611	0,3479	1	– 0,9325	0,1713
2	– 0,3400	0,6521	2	– 0,6612	0,3608
3	0,3400	0,6521	3	– 0,2386	0,4679
4	0,8611	0,3479	4	0,2386	0,4679
			5	0,6612	0,3608
			6	0,9325	0,1713
	$N=8$			$N=10$	
1	– 0,9603	0,1012	1	– 0,9739	0,0667
2	– 0,7967	0,2224	2	– 0,8651	0,1459
3	– 0,5255	0,3137	3	– 0,6794	0,2191
4	– 0,1834	0,3627	4	– 0,4334	0,2693
5	0,1834	0,3627	5	– 0,1489	0,2955
6	0,5255	0,3137	6	0,1489	0,2955
7	0,7967	0,2224	7	0,4334	0,2693
8	0,9603	0,1012	8	0,6794	0,2191
			9	0,8651	0,1495
			10	0,9739	0,0667

где [6, 45, 56]

$$\overset{\circ}{R}_0(M, t) = \frac{A^\circ}{A} F_0\left(\frac{r_*^2}{4at}\right), \tag{2.33}$$

$$F_0(\alpha) = \frac{1}{4\pi\alpha}\left\{1 - e^{-\alpha} - \alpha\,\mathrm{Ei}(-\alpha)\right\}. \tag{2.34}$$

Значения функции $F_0(\alpha)$ приводятся в табл. 8; при значениях $\alpha < 0{,}15...0{,}25$ она может определяться по формуле [6]

$$F_0(\alpha) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{1{,}53}{\alpha}. \tag{2.35}$$

Интегралы общего вида в формулах (2.24), (2.25), (2.27), (2.28), (2.32) могут вычисляться с помощью квадратурной формулы Гаусса [52]

$$U_S(M, p) \approx \frac{r^* - r_0}{4\pi A} \sum_{k=1}^{N} w_k K_0(\beta r_k)\theta(r_k) r_k, \tag{2.36}$$

где

$$r_k = \frac{r_0 + r^*}{2} + \frac{r_0^* - r_0}{2} x_k; \tag{2.37}$$

x_k – узлы; w_k – веса квадратурной формулы Гаусса N-го порядка, некоторые значения которых приведены в табл. 9.

Формула (2.36) имеет простую содержательную трактовку: влияние водозабора сложной формы на понижение в точке M считается эквивалентным суммарному влиянию N одиночных водозаборов, каждый из которых отстоит от точки M на расстоянии r_k и имеет дебит в размере

$$Q_k = \frac{r^* - r_*}{2A} r_k \theta(r_k) w_k Q, \qquad (2.38)$$

где Q – суммарный дебит площадного водозабора. Для расчета понижения в точке внутри области водоотбора при этом следует полагать, что оно формируется как суперпозиция частичных понижений, обусловленных эксплуатацией одиночных водозаборов, определенных выше, и площадного водозабора круговой формы, центр которого совпадает с точкой M, а дебит определяется величиной

$$Q_{\text{пр}} = \frac{A^\circ}{A} Q. \qquad (2.39)$$

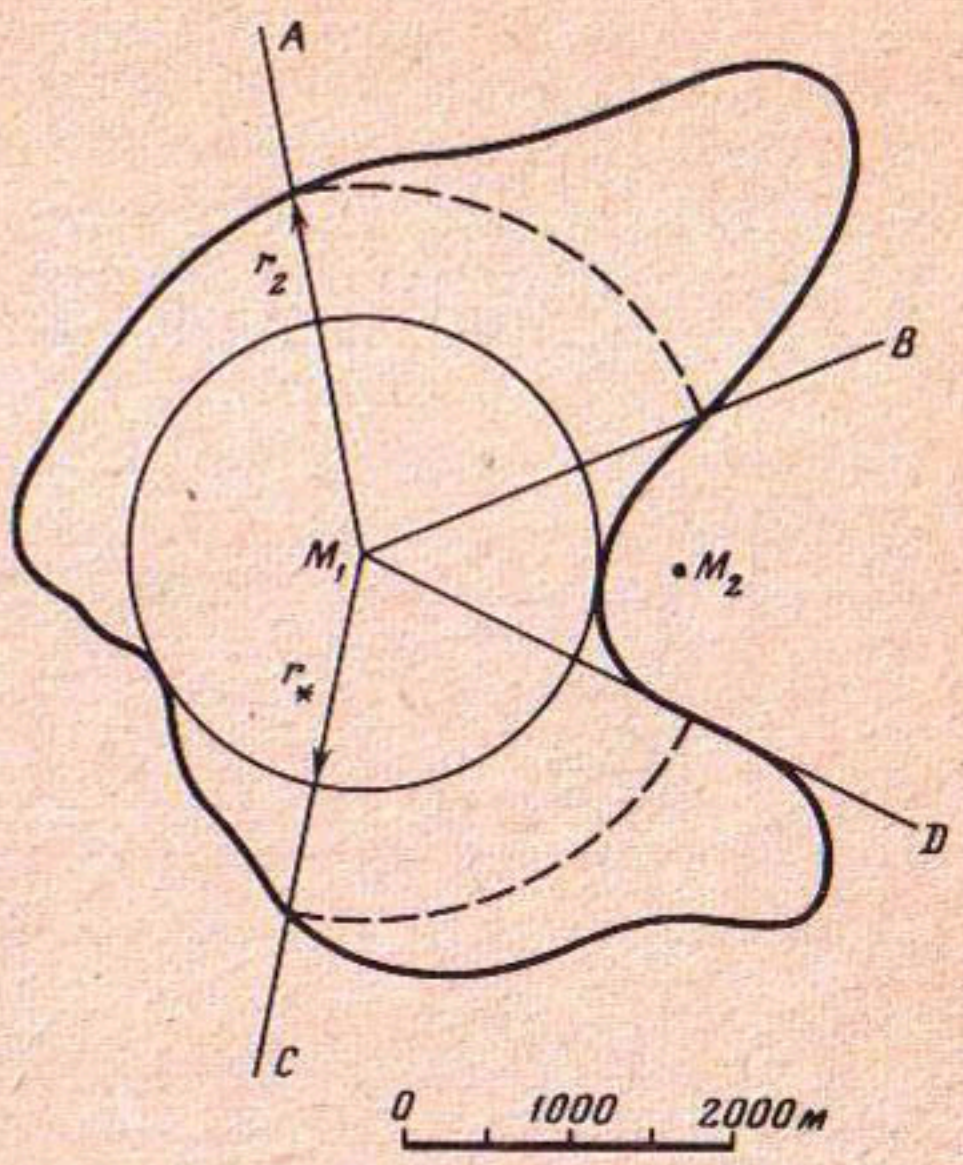
Пример расчета. На рис. 2.3 изображена конфигурация площадного водозабора сложной формы в неограниченном однородном пласте; требуется определить временны́е зависимости понижения в точках M_1 и M_2. Точка M_1 находится внутри водозабора; величина радиуса r_* окружности, касающейся ближайшей к точке M_1 границы области водоотбора, составляет $r_* = 1400$ м; расстояние r^* от точки M_1 до наиболее удаленной от нее границы области водоотбора равно $r^* = 4000$ м.

Гидрогеологические параметры: коэффициент водопроводимости $T = 1000$ м^2/сут; коэффициент уровнепроводности $a = 10^4$ м^2/сут; допустимое понижение составляет 50 м; компенсационное питание отсутствует. Водоотбор равномерно распределен по области (A), величина его модуля составляет $\Upsilon = 0{,}008$ м/сут, что при площади области (A), равной 17,64 км^2 соответствует суммарному дебиту $Q = 141\,120$ м^3/сут.

Рассмотрим точку M_1 внутри области водоотбора. Согласно сказанному выше, влияние водозабора сложной конфигурации приближенно эквивалентно влиянию площадного водозабора круговой формы радиуса r_* с центром в точке M и влиянию N одиночных водозаборов, расстояния которых от точки M определяются формулой (2.37), а дебиты – формулой (2.38). Принимая $N = 4$, в условиях примера имеем: $r_1 = 1580$ м, $r_2 = 2258$ м, $r_3 = 3142$ м, $r_4 = 3819$ м. Вычертив на плане области окружности этих радиусов и отметив точки их пересечения с контурами границы области (A), соединяем эти точки M_1 и замеряем величины углов, под которыми видны части дуг окружностей, лежащие внутри области. При этом следует иметь в виду разрывы всех дуг, радиус которых превышает r_1: внутри области (A) они имеют по две части; соответствующие углы следует суммировать. Измеренные значения углов $\theta(r_k)$ на рис. 2.3 составили: $\theta(r_1) = 5{,}39$ рад, $\theta(r_2) = 2{,}71$ рад; $\theta(r_3) = 0{,}75$ рад; $\theta(r_4) = 0{,}19$ рад. В соответствии с формулой (2.38) определяем нагрузки каждого из четырех одиночных водозаборов:

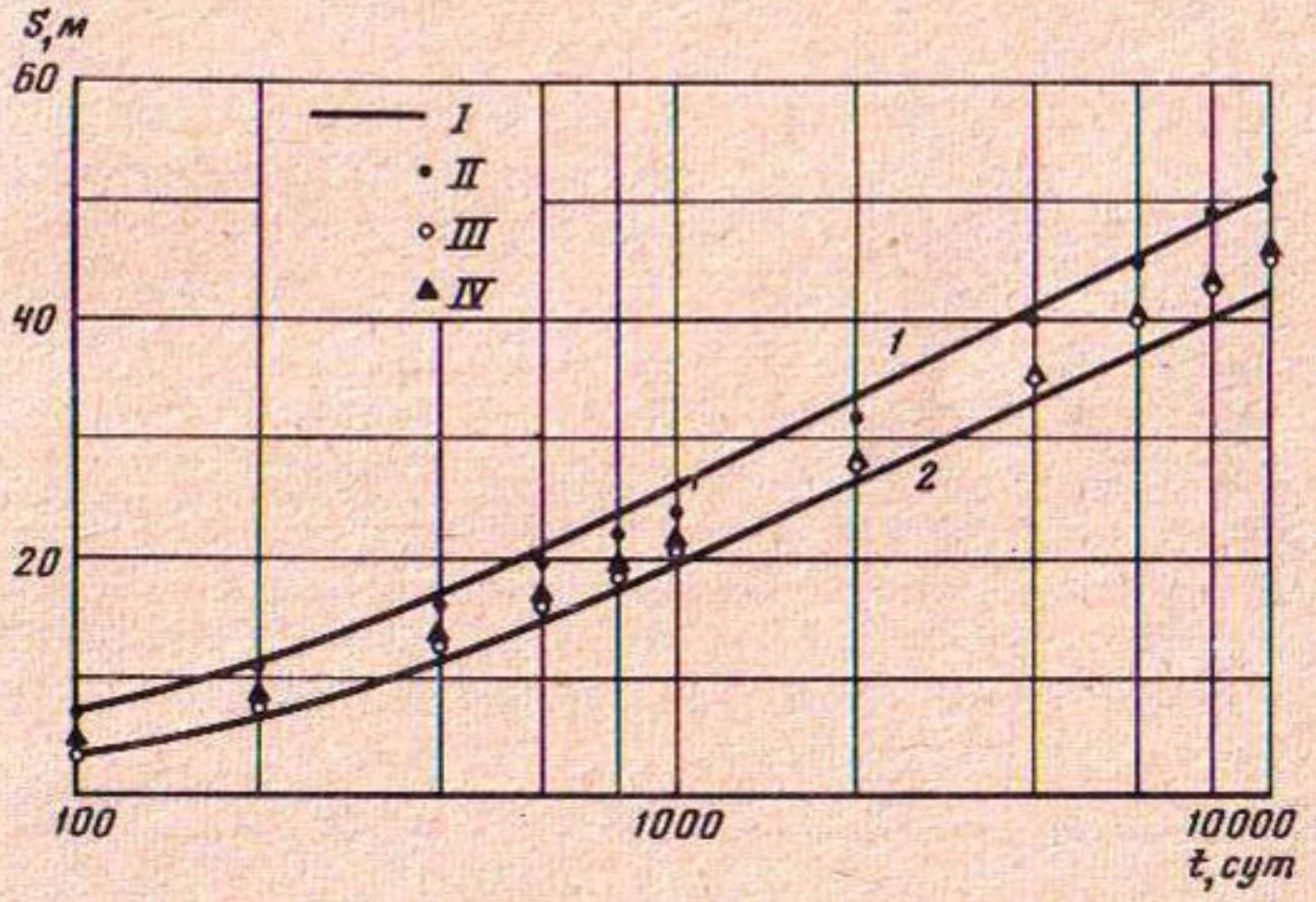
$$Q_1 = \frac{4000-1400}{2 \cdot 17{,}64 \cdot 10^6} 1580 \cdot 5{,}39 \cdot 0{,}3479 \cdot 141120 = 30813 \text{ м}^3/\text{сут}$$

Р и с. 2.3 Конфигурация области водоотбора в условиях примера



Р и с. 2.4. Результаты расчетов понижения с помощью различных методов в условиях примера

I: кривая *1* – график зависимости понижения в точке M_1 от времени, полученный по формулам (2.40) при $N = 4$; кривая *2* – то же, для точки M_2; *II* – результаты соответствующих расчетов при $N = 6$ для точки M_1; *III* – то же, для точки M_2; *IV* – результаты расчетов понижения в точке M_1 при замене истинной формы водозабора равновеликой круговой



и, аналогично, $Q_2 = 41\ 499$ м^3/сут, $Q_3 = 15\ 981$ м^3/сут, $Q_4 = 2625$ м^3/сут. Дебит площадного водозабора согласно формуле (2.39) составил $Q_{пл} = 50\ 202$ м^3/сут.

Теперь остается только сложить понижения, обусловленные влиянием площадного водозабора, рассчитываемого по формуле

$$S^{(пл)}(M_1, t) = \frac{Q_{пл}}{T} F_0\left(\frac{r_*^2}{4at}\right), \qquad (2.40а)$$

с влияниями каждого из четырех одиночных водозаборов, рассчитываемых по известной зависимости

$$S_k = \frac{Q_k}{T}\frac{1}{4\pi}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_k^2}{4at}\right)\right]. \qquad (2.40б)$$

На рис. 2.4 приведен график зависимости понижения от времени в точке M_1, построенный описываемым способом.

Для расчета понижения в точке M_2 определяем $r_0 = 500$ м, $r^* = 4000$ м; согласно формуле (2.37) значения расстояний r_k равны: $r_1 = 743$ м, $r_2 = 1655$ м, $r_3 = 2845$ м, $r_4 = 3757$ м; соответствующие значения углов, определенные по плану области, составили $\theta\ (r_1) = 2{,}83$ рад, $\theta\ (r_2) = 4{,}01$ рад, $\theta\ (r_3) = 2{,}06$ рад, $\theta\ (r_4) = 0{,}37$ рад.

Величина нагрузки на первый из одиночных водозаборов по формуле (2.38) равна

$$Q_1 = \frac{4000-500}{2 \cdot 17{,}64 \cdot 70^6}\ 743 \cdot 2{,}83 \cdot 0{,}3479 \cdot 141\ 120 = 10\ 241\ \text{м}^3/\text{сут};$$

аналогично: $Q_2 = 60\,588$ м^3/сут, $Q_3 = 53\,505$ м^3/сут, $Q_4 = 6771$ м^3/сут. На том же рис. 2.4 приведен график зависимости $S\ (M_2, t)$, полученный как результат суперпозиции влияния четырех водозаборов. На рис. 2.4 показаны также в виде серии одинаковых точек графики соответствующие условию $N = 6$ в квадратурной формуле Гаусса, как для точки M_1, так и для точки M_2. Видно, что уточнение, полученное в результате увеличения числа узлов, незначительное, и в рассматриваемом примере можно было ограничиться квадратурной формулой с $N = 4$.

Наконец, на том же рис. 2.4 соответствующими точками нанесены расчетные значения $S\ (M_2, t)$ при замене области водоотбора равновеликим кругом с центром в центре тяжести водозабора.

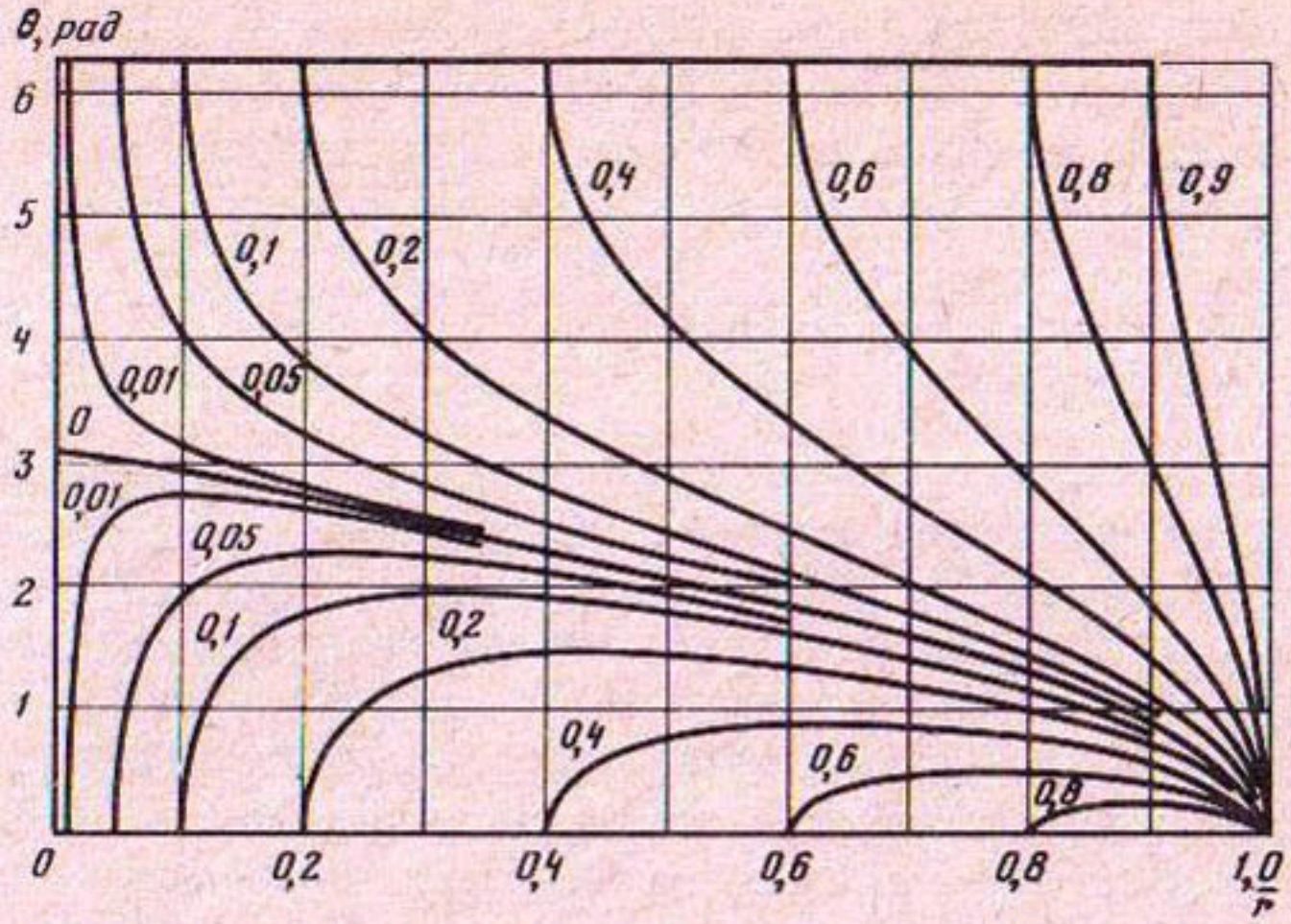
Можно видеть, что они весьма близки по величине к значениям $S\ (M_2, t)$, приведенным на кривой. Это обстоятельство делает достаточно обоснованным применяемый в гидрогеологической практике расчетный прием, по которому площадные водозаборы часто рассматриваются с помощью замены истинной конфигурации области равновеликой окружностью, центр которой расположен в центре тяжести водозабора.

Следует отметить, что вообще в точках, расположенных вне области водозабора, применение метода равновеликого круга практически всегда приводит к хорошим результатам.

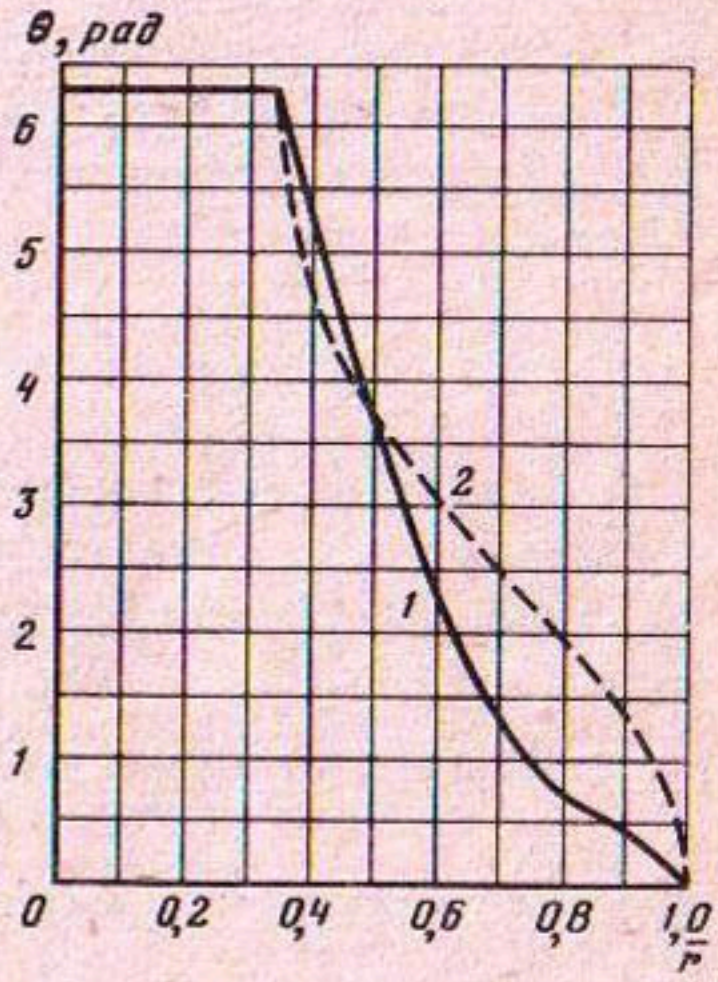
Косвенным свидетельством того, допустима ли замена области водоотбора кругом для внутренней точки области, может служить характеристика $\theta\ (r)$ и ее сравнение с характеристикой для внутренней точки окружности, имеющей вид

$$\theta\ (r) = 4\ \text{arctg} \sqrt{\frac{1-\bar{r}}{1+\bar{r}}\ \frac{\bar{r}+\bar{r}_0}{\bar{r}-\bar{r}_0}},$$

где $\bar{r} = r/r^*$, $\bar{r}_0 = r_0/r^*$, причем r_0 – расстояние от точки M до наиболее близкой, r^* – то же, до наиболее далекой точки окружности. Графики зависимостей $\theta\ (r)$ для различных $\bar{r}_0$ приведены на рис. 2.5. Можно видеть, что характеристики $\theta\ (\bar{r})$, построенные, например, для области, изображенной на рис. 2.3 (эта характеристика приводится на рис. 2.6), достаточно близки к соответствующим характеристикам круговых водозаборов. Некоторые расхождения характеристик при больших значениях r мало влияют на результаты в силу своей отдаленности от точки M; в то же вре-



Р и с. 2.5. Зависимости $\theta(r)$ для внутренней (верхняя серия кривых) и внешней (нижняя серия) точек по отношению к круговой области. Граница между сериями – кривая $\bar{r}_0 = 0$; цифры над кривыми – значения $\bar{r}_0 = r_0/r^*$



Р и с. 2.6. Угловые характеристики $\theta(r)$ для точки M_1 (схема на рис. 2.3)

1 – истинная; *2* – соответствующая круговой области при $\bar{r}_0 = 0{,}35$

мя совпадение характеристик при малых r, которые и формируют в основном значения гидравлического сопротивления, весьма хорошее.

Что касается точек, лежащих вне области водоотбора, для них, как уже говорилось выше, замещение истинной формы этой области кругом бывает, как правило, чаще оправданным. Зависимость $\theta(r)$ для внешних точек круговых областей имеет вид

$$\theta(r) = 2 \arccos \frac{\bar{r}^2 + \bar{r}_0}{\bar{r}\,(1 + \bar{r}_0)}, \qquad (2.41)$$

где $\bar{r} = r/r^*$; $\bar{r}_0 = r_0/r^*$, r_0, r^* – соответственно наиболее близкое и наиболее далекое расстояния от точки M. На рис. 2.5 построены графики зависимостей (2.41) (семейство кривых, расположенных ниже кривой $\bar{r}_0 = 0$). Для точек, расположенных вне области (A), отличия характеристик $\theta(r)$ для областей общего вида от характеристик (2.41) в общем меньше, чем

для внутренних точек. С учетом относительно большей отдаленности внешних точек от области водоотбора можно сделать вывод о большей справедливости принципа замены истинной области на равновеликую круговую для внешних точек, чем для внутренних.

2.2. СХЕМЫ ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТОВ С ГРАНИЦЕЙ ПИТАНИЯ В ПЛАНЕ

На рис. 2.7 изображены схемы однородного пласта, имеющего в плане границу питания прямолинейной формы, эксплуатируемого соответственно одиночным (*а*), линейным (*б*) и площадным водозабором полосовой (*в*) и общей (*г*) формы. Выражения для передаточных функций понижения для всех этих схем могут быть получены с помощью принципа отражения, согласно которому влияние водоотбора на понижение уровня подземных вод в условиях схем на рис. 2.7 эквивалентно совместному влиянию истинного водозабора и зеркального отражения относительно границы аналогичного по форме и производительности источника нагнетания, работающих в условиях схемы неограниченного пласта (рис. 2.8).

В соответствии с этим принципом выражение для передаточной функции понижения для условий отбора подземных вод одиночным водозабором будет иметь вид

$$U_S(M, p) = \frac{1}{2\pi}\left[K_0(r\beta) - K_0(\rho\beta)\right], \tag{2.42}$$

где r – расстояние от точки M до центра водозабора; ρ – расстояние от точки M до его отражения относительно границы. Соответствующее передаточной функции (2.42) гидравлическое сопротивление определяется выражением

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi}\left[W\left(\frac{r^2}{4at}; gr\right) - W\left(\frac{\rho^2}{4at}; g\rho\right)\right]. \tag{2.43}$$

В условиях отсутствия компенсационного питания

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right) + \mathrm{Ei}\left(-\frac{\rho^2}{4at}\right)\right]. \tag{2.44}$$

При $t \to \infty$ и $g \neq 0$ значения гидравлического сопротивления в выражении (2.43) стабилизируются:

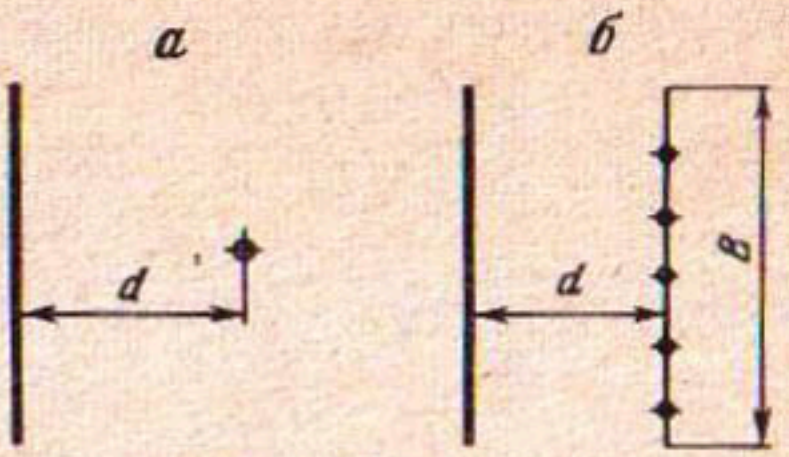
$$R_0(M, \infty) = \frac{1}{2\pi}\left[K_0(gr) - K_0(\rho g)\right], \tag{2.45}$$

а при $g = 0$

$$R_0(M, \infty) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho}{r}. \tag{2.46}$$

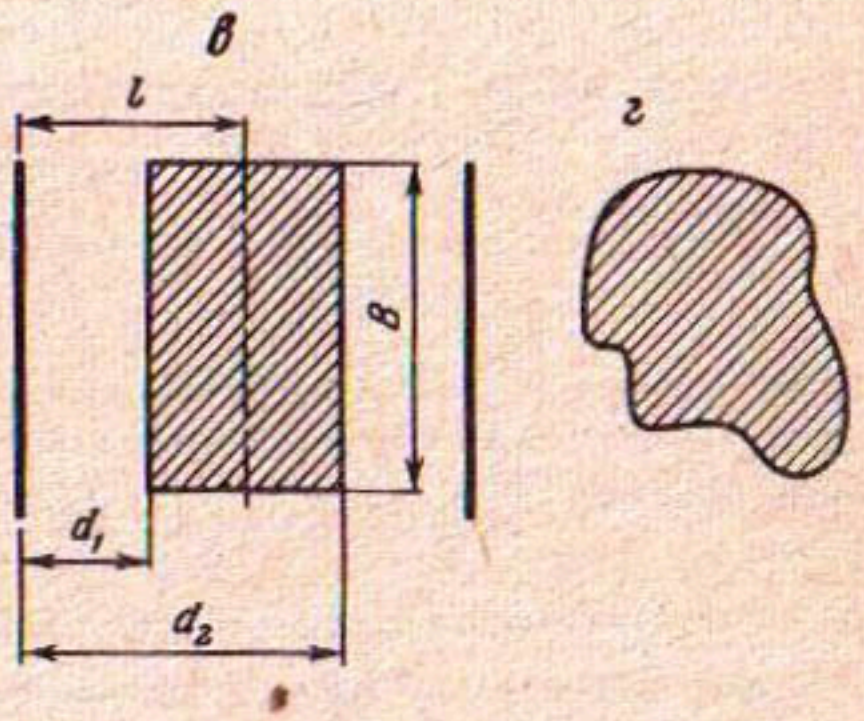
Для условий отбора подземных вод линейным рядом скважин (рис. 2.7,*б*) передаточная функция понижения имеет вид

$$U_S(M, p) = \frac{1}{2B\beta}\left(e^{-\beta r} - e^{-\beta\rho}\right), \tag{2.47}$$



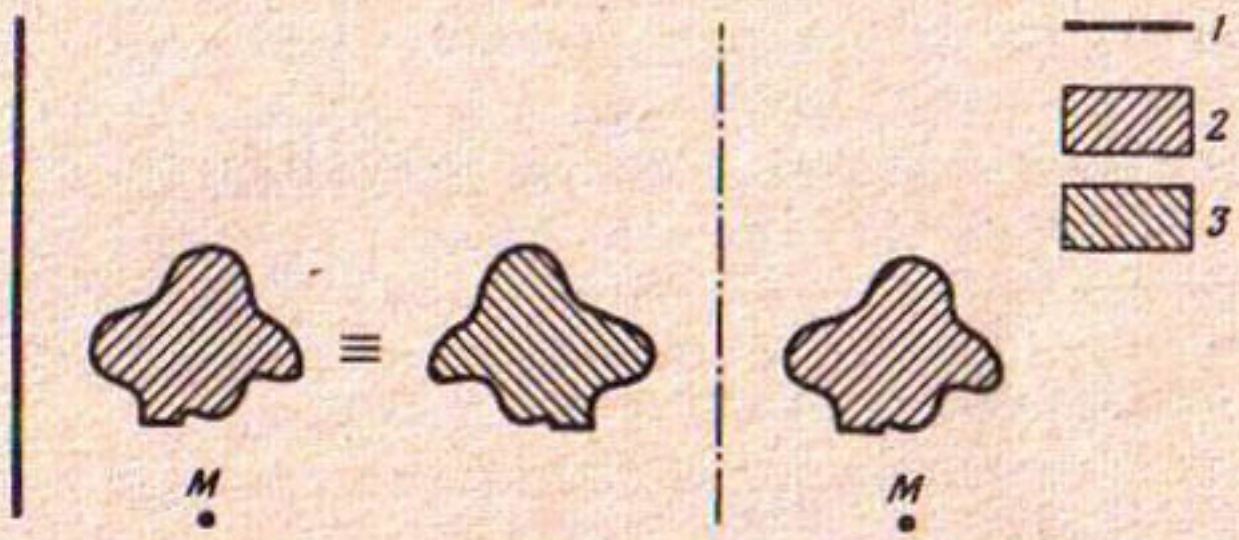
Р и с. 2.7. Схемы водозаборов в однородном водоносном пласте с границей питания в плане

а – одиночный водозабор; *б* – линейный ряд скважин; *в* – площадной водозабор в виде полосы; *г* – площадной водозабор произвольной формы



Р и с. 2.8. Схема, иллюстрирующая принцип зеркального отражения: понижение в точке *M*, формирующееся под влиянием водозабора произвольной формы, работающего в условиях однородного пласта с прямолинейной границей питания, эквивалентно совместному действию водозабора и нагнетания, расположенного симметрично относительно линии границы в условиях неограниченного пласта

1 – граница питания; *2* – площадной водозабор; *3* – область фиктивного площадного нагнетания



что соответствует выражению для гидравлического сопротивления вида

$$R_0(M, t) = \frac{1}{2Bg}\left[\mathrm{D}^*\left(\frac{r}{2\sqrt{at}}; gr\right) - \mathrm{D}^*\left(\frac{\rho}{2\sqrt{at}}; g\rho\right)\right]. \qquad (2.48)$$

В условиях отсутствия компенсационного питания

$$R_0(M, t) = \frac{\sqrt{at}}{B}\left(\mathrm{ierfc}\ \frac{r}{2\sqrt{at}} - \mathrm{ierfc}\ \frac{\rho}{2\sqrt{at}}\right). \qquad (2.49)$$

При $t \to \infty$ предельные значения гидравлических сопротивлений равны

$$R_0(M, \infty) = \frac{e^{-gr} - e^{-g\rho}}{2Bg}. \qquad (2.50)$$

в условиях отсутствия компенсационного питания

$$R_0(M, \infty) = (\rho - r)/2B. \qquad (2.51)$$

При отборе подземных вод площадным водозабором в форме полосы (рис. 2.7,*в*) передаточная функция понижения для точки *M*, находящейся

между границей и полосой водоотбора,

$$U_S(M, p) = \frac{e^{-\beta d_1} - e^{-\beta d_2}}{2Bd\beta^2} \operatorname{sh}\beta x; \qquad (2.52)$$

для точки M внутри полосы водоотбора

$$U_S(M, p) = \frac{e^{-\beta d_1} - e^{-\beta d_2}}{2Bd\beta^2} \operatorname{sh}\beta x - \frac{\operatorname{ch}\beta(x-d_1)-1}{2Bd\beta^2}; \qquad (2.53)$$

для точки M, находящейся дальше от границы, чем полоса водоотбора,

$$U_S(M, p) = \frac{e^{-\beta d_1} - e^{-\beta d_2}}{2Bd\beta^2} \operatorname{sh}\beta x - \frac{\operatorname{ch}\beta(x-d_1)-\operatorname{ch}\beta(x-d_2)}{2Bd\beta^2}, \qquad (2.54)$$

где x – расстояние от границы до точки M. Выражения для сопротивлений, соответствующие передаточным функциям (2.52)–(2.54), довольно громоздки, что делает их труднопригодными для практических вычислений, поэтому для расчетов понижения удобнее воспользоваться рассмотренным в 2.1 приближенным методом, учитывающим совместное влияние (в условиях неограниченного пласта) реального площадного водозабора и зеркального отражения относительно границы аналогичного ему по форме и производительности нагнетания (рис. 2.8). При этом в каждом конкретном случае перед расчетом следует проверить, нельзя ли водозабор, или его отражение, или то и другое вместе рассматривать как равновеликие им круги.

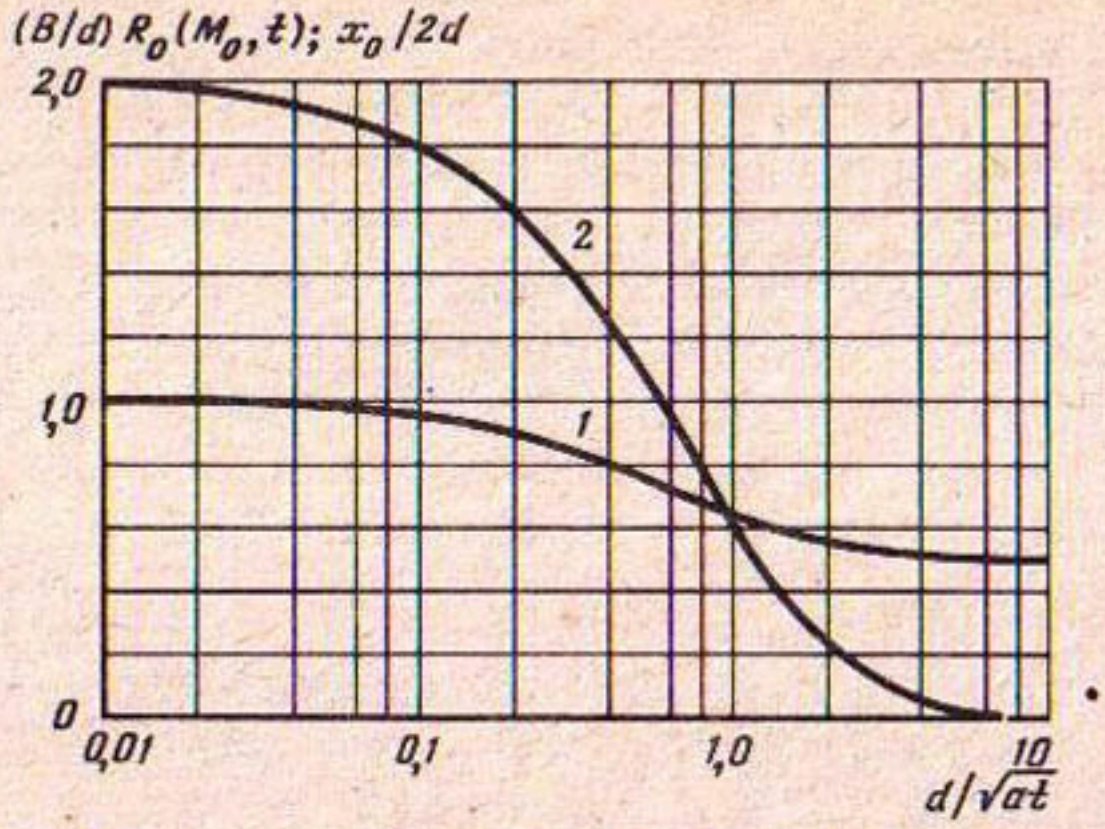
Расчетные формулы для сопротивления становятся проще в частном случае, когда $d_1 = 0$, $d_2 = 2d$. В этом случае передаточная функция понижения для точки M внутри водозабора принимает вид

$$U_S(M, p) = \frac{1 - e^{-\beta x} - e^{-2\beta d}\operatorname{sh}\beta x}{2Bd\beta^2}. \qquad (2.55)$$

Для определения эксплуатационных ресурсов подземных вод необходимо вычислять понижение их уровня в наиболее глубокой точке депрессионной воронки; в отличие от условий отбора подземных вод скважинным или линейным водозабором положение этой точки при работе площадной системы скважин будет изменяться со временем; при малых значениях времени оно близко к середине полосы отбора, а с течением времени ее положение перемещается в направлении от границы питания. При отсутствии компенсационного питания это перемещение происходит в определенных условиях достаточно долго. Поскольку выражение для гидравлического сопротивления при рассматриваемых условиях отбора подземных вод имеет вид

$$R_0(M, t) = \frac{at}{2Bd}\left\{1 - 4\mathrm{i}^2\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} - 2\mathrm{i}^2\operatorname{erfc}\frac{2d-x}{2\sqrt{at}} + 2\mathrm{i}^2\operatorname{erfc}\frac{2d+x}{2\sqrt{at}}\right\}, \qquad (2.56)$$

где $\mathrm{i}^2\operatorname{erfc} z$ – второй повторный интеграл вероятностей [52] (значения этой функции приведены в Приложении 1), для определения временной зависимости положения точки наибольшей глубины депрессионной воронки следует продифференцировать выражение (2.56) по x, приравнять к нулю



Р и с. 2.9. Зависимости относительного значения абсциссы точки максимального понижения (кривая *1*) и соответствующего значения гидравлического сопротивления (кривая *2*) от времени в условиях отбора подземных вод полосовым площадным водозабором, в схеме однородного пласта с границей питания в плане

полученное выражение и, решив полученное уравнение относительно x, определить искомую зависимость. Результаты этих действий – график зависимости величины $x_0/2d$ от параметра $d/\sqrt{at}$, где x_0 – абсцисса наиболее глубокой точки воронки, приведен на рис. 2.9 (кривая *1*). На рис. 2.9 изображена также зависимость величины гидравлического сопротивления в этой точке от того же параметра (кривая *2*). В табл. 10 эта информация приведена в числовой форме.

Пример расчета эксплуатационных ресурсов подземных вод с учетом перемещения точки наибольшего понижения в процессе водоотбора. Гидрогеологические условия определяются параметрами: $T = 10^3$ м^2/сут, $a = 10^4$ м^2/сут, полуширина полосы отбора $d = 5000$ м, компенсационное питание отсутствует; следует определить величину эксплуатационных ресурсов подземных вод на срок $t = 10^4$ сут, если протяженность полосы отбора

Таблица 10

Значения $x_0/2d$ и гидравлического сопротивления в точке x_0 от параметра $d/\sqrt{at}$

$d/\sqrt{at}$	0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,20
$x_0/2d$	0,9944	0,9887	0,9775	0,9663	0,9552	0,9442	0,8914
$(B/d)\,R_0$	1,9749	1,9504	1,9110	1,8668	1,8238	1,7816	1,5808
$d/\sqrt{at}$	0,30	0,40	0,50	0,60	0,8	1,0	1,2
$x_0/2d$	0,8433	0,8005	0,7631	0,7307	0,6787	0,6406	0,6126
$(B/d)\,R_0$	1,3998	1,2386	0,9714	0,9744	0,7669	0,6108	0,4917
$d/\sqrt{at}$	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	4,0
$x_0/2d$	0,5920	0,5765	0,5646	0,5554	0,5393	0,5294	0,5181
$(B/d)\,R_0$	0,4002	0,3293	0,2739	0,2301	0,1550	0,1099	0,0624

B = 20 000 м, допустимое понижение составляет 50 м, а схема отбора отвечает рис. 2.7,*в*.

Вначале вычисляем значение $d/\sqrt{at} = 5000/\sqrt{10^4 \cdot 10^4} = 0{,}50$; по табл. 10 находим, что величина $x_0/2d$ равна 0,7631; величина гидравлического сопротивления, соответствующая этой точке, согласно табл. 10 равна (d/B) 1,0964 = (5000/20 000) 1,0964 = 0,2741; величина расхода водоотбора, который может быть осуществлен в этих условиях, равна

$$Q = \frac{10^3 \cdot 50}{0{,}2741} = 182415 \text{ м}^2/\text{сут} = 2{,}11 \text{ м}^3/\text{сут}.$$

Если считать, что положение наиболее глубокой точки депрессионной воронки локализуется в точке M_1 близ середины полосы отбора, т.е. при x = 5000 м, согласно формуле (2.56) получаем

$$R_0(M_1, t) = \frac{10^4 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^3 \cdot 5000} \left\{1 - 4i^2\,\text{erfc}\,\frac{5000}{2\sqrt{10^4 \cdot 10^4}} - 2i^2\,\text{erfc}\,\frac{2 \cdot 5000 - 5000}{2\sqrt{10^4 \cdot 10^4}} + 2i^2\,\text{erfc}\,\frac{2 \cdot 5000 + 5000}{2\sqrt{10^4 \cdot 10^4}}\right\} = 0{,}2442,$$

что соответствует расходу водоотбора в размере Q = 2,37 м^3/с.

Если принять, что наибольшее понижение соответствует точке с абсциссой $x = 2d$ = 10 000 м, по формуле (2.56) получаем, что величина сопротивления составит $R_0(M_2, t)$ = 0,4436, что соответствует расходу водоотбора в размере Q = 1,30 м^3/с.

Таким образом, приведенный пример показывает, что перенос положения точки наибольшего понижения к центру водозабора приводит к завышению величины эксплуатационных ресурсов подземных вод (в условиях примера на 12%), а перенос точки к наиболее дальнему от реки урезу полосы водоотбора – к неоправданно большому занижению эксплуатационных ресурсов (на 38% в условиях примера), что говорит о целесообразности учета истинного расположения точки максимального понижения.

2.3. СХЕМЫ ПЛАСТОВ-ПОЛОС

Схемы пластов-полос изображены на рис. 2.10,*а, б*. При отборе подземных вод одиночной скважиной в условиях пласта-полосы с двумя границами питания (*а*) передаточная функция понижения в точке M с координатами x, y может быть получена в виде

$$U_S(M, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n \bar{x}_0 \cdot \sin \pi n \bar{x}}{\sqrt{\pi^2 n^2 + \chi^2 + \bar{p}}} e^{-|y|\sqrt{\pi^2 n^2 + \chi^2 + \bar{p}}}, \qquad (2.57)$$

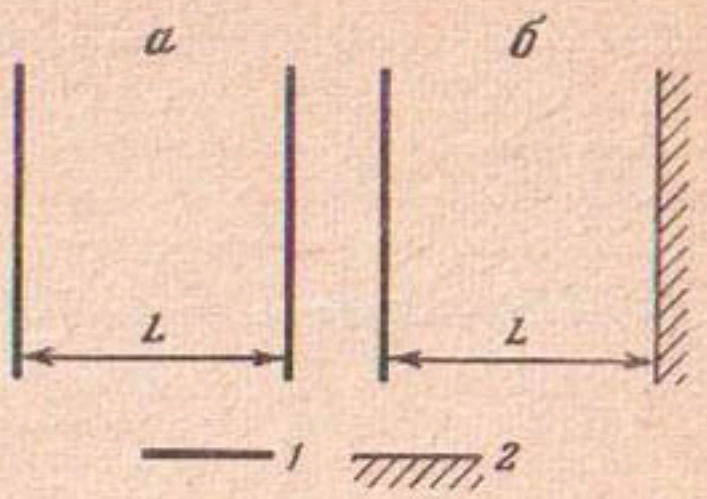
где $\bar{x} = x/L$; $\bar{y} = y/L$; $\bar{p} = pL^2/a$, $\chi = gL$. Гидравлическое сопротивление, соответствующее передаточной функции (2.57), определяется выражением

$$R_0(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n \bar{x}_0 \cdot \sin \pi n \bar{x}}{\sqrt{\pi^2 n^2 + \chi^2}} D^*\left(\frac{|y|}{2\sqrt{at}}; |y|\sqrt{\pi^2 n^2 + \chi^2}\right), \qquad (2.58)$$

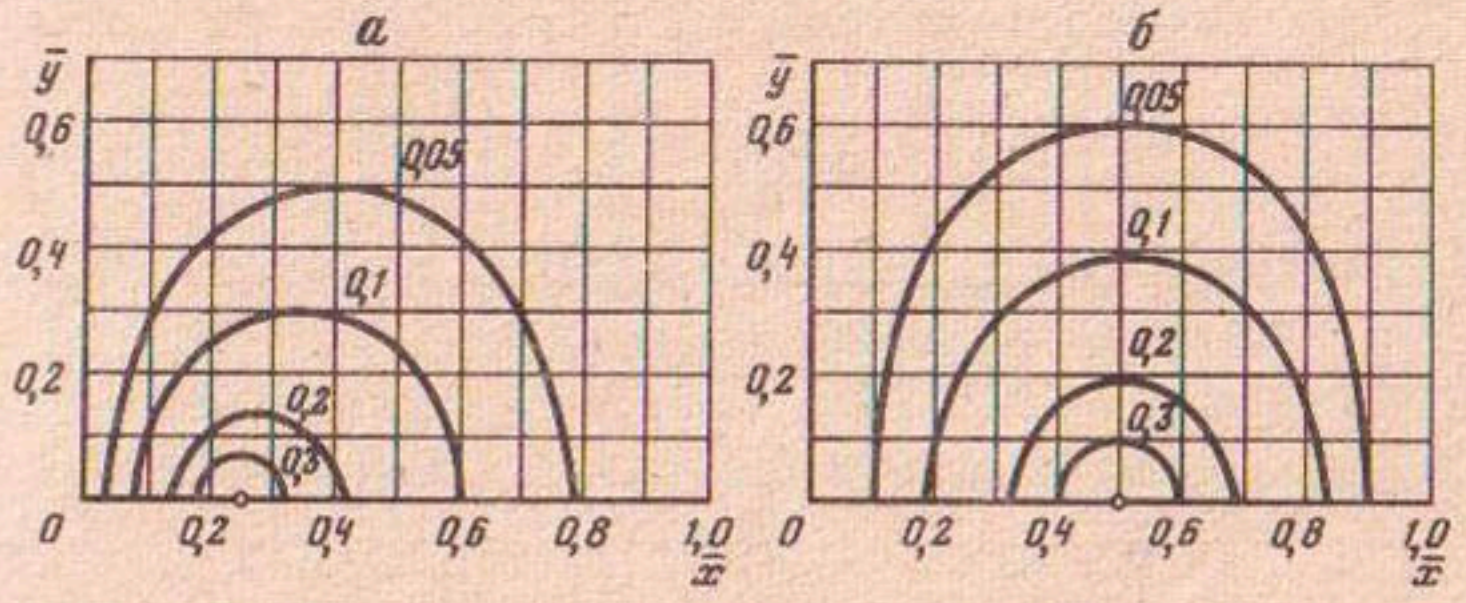
где $\bar{t} = at/L^2$. Поскольку при $z \to 0$ $D^*(z, \alpha) = e^{-\alpha}$ предельное значение гид-

Р и с. 2.10. Схемы пластов-полос с двумя границами питания (*а*) и с разнородными границами (*б*)

1 – граница постоянного напора; *2* – граница постоянного расхода



Р и с. 2.11. Изолинии гидравлического сопротивления при отборе подземных вод одиночным водозабором в пласте-полосе с двумя границами питания при расстоянии водозабора от границы 0,25 (*а*) и 0,5 (*б*) ширины пласта



равлического сопротивления, соответствующее $\bar{t} \to \infty$, имеет вид

$$R_0(M, \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\pi\bar{x}_0 n \cdot \sin\pi\bar{x} n}{\sqrt{\pi^2 n^2 + \chi^2}} e^{-|y|\sqrt{\pi^2 n^2 + \chi^2}}. \qquad (2.59)$$

При $\chi = 0$ ряд (2.59) суммируется в конечном виде:

$$R_0(M, \infty) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\mathrm{ch}\pi\bar{y} - \cos\pi(\bar{x} + \bar{x}_0)}{\mathrm{ch}\pi\bar{y} - \cos\pi(\bar{x} - \bar{x}_0)}. \qquad (2.60)$$

На рис. 2.11 приведены изолинии $R_0(M, \infty)$ при $\bar{x}_0 = 0{,}5$ и $\bar{x}_0 = 0{,}25$, которые показывают, что при больших значениях сопротивления соответствующие изолинии приближаются к окружности; это дает основание в выражениях (2.57), (2.58) для расчета понижений на скважине полагать $\bar{x} = \bar{x}_0$, $\bar{y} = \bar{r}_0$, где $\bar{r}_0 = r_0/L$, r_0 – радиус скважины. Таким образом, для точки M_0 на стенке скважины имеем

$$U_S(M_0, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi n \bar{x}_0}{\sqrt{\pi^2 n^2 + \chi^2 + \bar{p}}} e^{-\bar{r}_0\sqrt{\pi^2 n^2 + \chi^2 + \bar{p}}}, \qquad (2.61)$$

$$R_0(M_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi n \bar{x}_0}{\sqrt{\pi^2 n^2 + \chi^2}} \mathrm{D}^*\left(\frac{\bar{r}_0}{2\sqrt{\bar{t}}}; \bar{r}_0\sqrt{\pi^2 n^2 + \chi^2}\right), \qquad (2.62)$$

$$R_0(M_0, \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi n \bar{x}_0}{\sqrt{\pi^2 n^2 + \chi^2}} e^{-\bar{r}_0\sqrt{\pi^2 n^2 + \chi^2}}. \qquad (2.63)$$

В частности, при $\chi = 0$,

$$R_0(M_0, \infty) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\mathrm{ch}\pi\bar{r}_0 - \cos 2\pi\bar{x}_0}{\mathrm{ch}\pi\bar{r}_0 - 1}, \qquad (2.64)$$

или практически [6]

$$R_0(M_0, \infty) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2\sin\pi\bar{x}_0}{\pi\bar{r}_0}. \qquad (2.65)$$

В случае схемы с разнородными границами аналогично

$$U_S(M, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\bar{x}_0 \cdot \sin\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\bar{x}}{\sqrt{\pi^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 + \chi^2 + \bar{p}}} e^{-|\bar{y}|\sqrt{\pi^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+\chi^2+\bar{p}}}, \qquad (2.66)$$

$$R_0(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\bar{x}_0 \cdot \sin\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\bar{x}}{\sqrt{\pi^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 + \chi^2}} D^*\left(\frac{|\bar{y}|}{2\sqrt{t}}; |\bar{y}|\sqrt{\chi^2+\pi^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\right); \qquad (2.67)$$

при отсутствии компенсационного питания

$$R_0(M, \infty) = \frac{1}{4\pi} \ln \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\frac{\pi\bar{y}}{2} + \cos\frac{\pi}{2}(\bar{x}_0-\bar{x}) & \operatorname{ch}\frac{\pi\bar{y}}{2} - \cos\frac{\pi}{2}(\bar{x}_0+\bar{x}) \\ \operatorname{ch}\frac{\pi\bar{y}}{2} - \cos\frac{\pi}{2}(\bar{x}_0-\bar{x}) & \operatorname{ch}\frac{\pi\bar{y}}{2} + \cos\frac{\pi}{2}(\bar{x}_0+\bar{x}) \end{bmatrix}; \qquad (2.68)$$

при определении гидравлического сопротивления на стенке скважины

$$R_0(M_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\bar{x}_0}{\sqrt{\pi^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+\chi^2}} D^*\left(\frac{\bar{r}_0}{2\sqrt{t}}; \bar{r}_0\sqrt{\chi^2+\pi^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\right); \qquad (2.69)$$

в условиях отсутствия компенсационного питания

$$R_0(M_0, \infty) \approx \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1{,}27\operatorname{tg}\frac{\pi\bar{x}_0}{2}}{\bar{r}_0}. \qquad (2.70)$$

При отборе подземных вод линейными водозаборами, параллельными границам питания водоносных пластов, фильтрационный поток одномерен и ограничен; поэтому в этих условиях применимы методы, приведенные в 1.3.

Выбирая в качестве характерного размера потока L – ширину полосы, в случае схемы с двумя границами питания заключаем, что для определения собственных элементов оператора фильтрации необходимо решить задачу на собственные значения вида

$$-\frac{d^2u}{d\bar{x}^2} = \lambda u \qquad (2.71)$$

при граничных условиях $u(0) = u(1) = 0$. Аналогично, для схемы пласта-

полосы с разнородными границами (*б*) следует определить собственные элементы оператора, заданного дифференциальным равенством (2.71) и граничными условиями

$$u(0) = u'(1) = 0.$$

Искомые собственные элементы имеют вид

$$\lambda_k = \pi^2 k^2 + \chi^2, \quad e_k(M') = \sqrt{2}\sin k\pi\bar{x}, \; k = 1, 2, \ldots \tag{2.72}$$

для условий схемы с двумя границами питания и

$$\lambda_k = \pi^2\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \chi^2,$$

$$e_k(M') = \sqrt{2}\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi\bar{x}, \; k = 1, 2, \ldots, \tag{2.73}$$

где $\bar{x} = x/L$; $\chi = gL$; x – расстояние от левой границы на схеме. Таким образом, при линейном водозаборе, когда функция $f(\bar{x})$ равна $\delta(\bar{x} - \bar{x}_0)$, коэффициенты χ_k в формуле (1.94) равны $\sqrt{2}\sin k\pi\bar{x}_0$ и выражение передаточной функции понижения в произвольной точке M приобретает вид

$$U_S(M, p) = 2\frac{L}{B}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi\bar{x}_0 \cdot \sin k\pi\bar{x}}{\pi^2 k^2 + \chi^2 + \bar{p}} \tag{2.74}$$

при схеме с двумя границами питания и

$$U_S(\mathrm{M}, \mathrm{p}) = 2\frac{L}{B}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi\bar{x}_0 \cdot \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi\bar{x}}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2\pi^2 + \chi^2 + \bar{p}} \tag{2.75}$$

в схеме с однородными границами.

Соответствующие выражения для гидравлических сопротивлений имеют вид

$$R_0(M, t) = 2\frac{L}{B}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi\bar{x} \cdot \sin k\pi\bar{x}_0}{k^2\pi^2 + \gamma^2}\left[1 - e^{-(k^2\pi^2 + \chi^2)\bar{t}}\right] \tag{2.76}$$

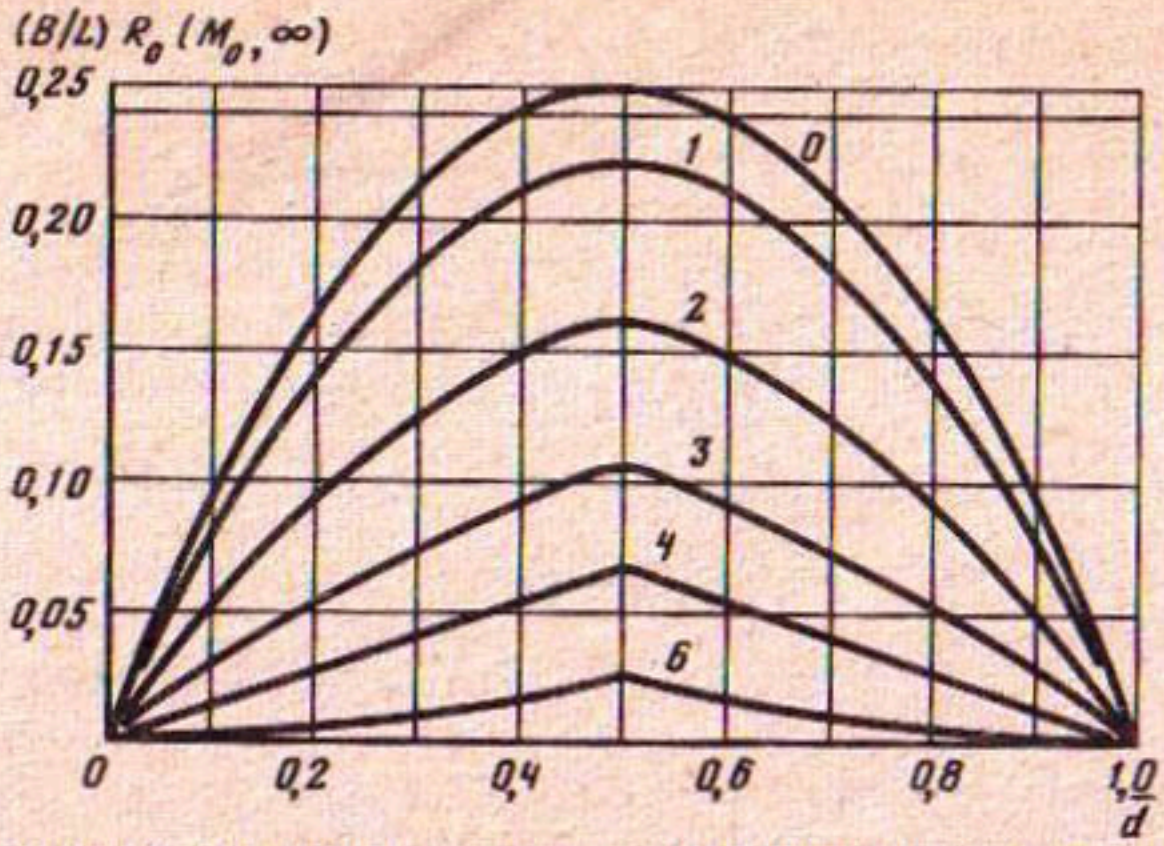
для схемы с двумя границами питания и

$$R_0(M, t) = 2\frac{L}{B}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi\bar{x} \cdot \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi\bar{x}_0}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2\pi^2 + \chi^2}\left[1 - e^{-\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)^2\pi^2 + \chi^2\right)\bar{t}}\right] \tag{2.77}$$

для схемы с разнородными границами.

При $t \to \infty$ гидравлические сопротивления стабилизируются, стремясь к соответствующим стационарным значениям. Для точки M_0 на линии водозабора

$$R_0(M_0, \infty) = \frac{L}{B}\frac{\mathrm{sh}\chi\bar{d} \cdot \mathrm{sh}\chi(1 - \bar{d})}{\chi\,\mathrm{sh}\chi} \tag{2.78}$$



Р и с. 2.12. Зависимости предельного значения гидравлического сопротивления на линии водозабора при отборе подземных вод линейным рядом скважин в пласте-полосе с двумя границами питания от относительного значения расстояния от левой границы

Цифры у кривых – значения $\chi = gL$

Р и с. 2.13. Зависимости предельного значения гидравлического сопротивления по линии водозабора подземных вод линейным рядом скважин в пласте-полосе с разнородными границами от относительного расстояния водозабора до границы питания

Цифры у кривых – значения $\chi = gL$

для первой из рассматриваемых схем и

$$R_0(M_0, \infty) = \frac{L}{B} \frac{\operatorname{sh}\chi\bar{d} \cdot \operatorname{ch}\chi(1-\bar{d})}{\chi \cdot \operatorname{ch}\chi} \qquad (2.79)$$

для второй. На рис. 2.12 и 2.13 показаны графики зависимостей, построенных по выражениям (2.78), (2.79).

Ряды в формулах (2.76), (2.77) обладают быстрой сходимостью; для практических расчетов достаточно несколько первых их членов. Для удобства вычислений в табл. 11 и 12 приведены величины гидравлических сопротивлений, соответствующих точке M_0 на линии водозабора, в зависимости от времени соответственно в двух рассматриваемых схемах при $\chi = 0$.

Последними в настоящем параграфе рассматриваются условия отбора подземных вод в пластах-полосах, создающиеся при эксплуатации пло-

Таблица 11

Значения функции $f(\bar{x}_0, \bar{t}) = \frac{2}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi\bar{x}_0}{\pi^2} (1-e^{-n^2\pi^2\bar{t}})$

$\bar{t}$	$\bar{x}_0 = 0{,}1$	0,2	0,3	0,4	0,5
0,001	0,0180	0,0180	0,0180	0,0180	0,0180
0,002	0,0254	0,0254	0,0254	0,0254	0,0254
0,004	0,0352	0,0352	0,0352	0,0352	0,0352
0,006	0,0422	0,0438	0,0438	0,0438	0,0438
0,008	0,0474	0,0504	0,0504	0,0504	0,0504
0,010	0,0514	0,0564	0,0564	0,0564	0,0564
0,020	0,0632	0,0780	0,0798	0,0798	0,0798
0,040	0,0730	0,1028	0,1112	0,1126	0,1128
0,060	0,0776	0,1168	0,1324	0,1370	0,1378
0,080	0,0804	0,1262	0,1480	0,1560	0,1580
0,100	0,0824	0,1330	0,1596	0,1714	0,1744
0,200	0,0874	0,1502	0,1916	0,2146	0,2218
0,300	0,0890	0,1564	0,2032	0,2306	0,2396
0,400	0,0896	0,1586	0,2074	0,2364	0,2460
0,600	0,0900	0,1598	0,2096	0,2395	0,2494
∞	0,0900	0,1600	0,2100	0,2400	0,2500

щадных водозаборов полосовой формы. Если полоса отбора заключена между абсциссами x_1 и x_2, функция $f(\bar{x}, \bar{y})$ равна единице внутри этой полосы и нулю – вне ее; значения коэффициентов χ_k согласно формуле (1.94) определяются выражением $\chi_k = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} e_k(\bar{x})\,d\bar{x}$, т.е., учитывая формулы (2.72), (2.73),

$$\chi_k = \frac{\sqrt{2}}{k\pi}(\cos k\pi\bar{x}_1 - \cos k\pi\bar{x}_2) \tag{2.80}$$

для схемы пласта-полосы с двумя границами питания и

$$\chi_k = \frac{\sqrt{2}}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\bar{x}_1 - \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\bar{x}_2\right] \tag{2.81}$$

для схемы с разнородными границами. Выражения для передаточных функций понижения запишутся соответственно в виде

$$U_S(M, p) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi\bar{x}}{k} \frac{\cos k\pi\bar{x}_1 - \cos k\pi\bar{x}_2}{\bar{p} + k^2\pi^2 + \chi^2}, \tag{2.82}$$

$$U_S(M, p) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\bar{x}}{k-\frac{1}{2}} \frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\bar{x}_1 - \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\bar{x}_2}{\bar{p} + \left(k-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 + \chi^2} \tag{2.83}$$

Таблица 12

Значения функции $f(\bar{x}_0, \bar{t}) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \left(n - \frac{1}{2}\right) \bar{x}_0}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \left(1 - e^{-\pi^2 (n - ½)^2 \bar{t}}\right)$

$\bar{t}$	$\bar{x}_0 = 0{,}2$	0,4	0,6	0,8	1,0
0,001	0,0179	0,0179	0,0179	0,0179	0,0179
0,002	0,0253	0,0253	0,0253	0,0253	0,0253
0,004	0,0357	0,0357	0,0357	0,0357	0,0714
0,006	0,0437	0,0437	0,0437	0,0437	0,0874
0,008	0,0504	0,0505	0,0505	0,0505	0,1009
0,010	0,0563	0,0564	0,0564	0,0565	0,1129
0,020	0,0781	0,0798	0,0798	0,0815	0,1596
0,040	0,1028	0,1126	0,1130	0,1229	0,2257
0,060	0,1169	0,1370	0,1394	0,1595	0,2764
0,080	0,1263	0,1563	0,1628	0,1929	0,3192
0,100	0,1331	0,1724	0,1845	0,2238	0,3568
0,200	0,1521	0,2281	0,2760	0,3600	0,5041
0,300	0,1630	0,2663	0,3469	0,4502	0,6132
0,400	0,1711	0,2956	0,4023	0,5267	0,6979
0,500	0,1775	0,3184	0,4455	0,5865	0,7640
0,600	0,1824	0,3363	0,4793	0,6332	0,8116
0,800	0,1892	0,3611	0,5263	0,6982	0,8874
1,000	0,1934	0,3763	0,5550	0,7378	0,9313
1,200	0,1960	0,3855	0,5725	0,7620	0,9580
1,400	0,1976	0,3911	0,5832	0,7768	0,9744
1,600	0,1985	0,3946	0,5898	0,7859	0,9844
1,800	0,1991	0,3967	0,5938	0,7914	0,9905
2,000	0,1994	0,3980	0,5962	0,7947	0,9942
∞	0,2000	0,4000	0,6000	0,8000	1,0000

В частности, если полоса отбора занимает все пространство между границами, т.е. если $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 1$, выражения передаточных функций понижения упрощаются соответственно до вида

$$U_S(M, p) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (2k-1)\, \pi \bar{x}}{2k-1} \frac{1}{\bar{p} + \chi^2 + (2k-1)^2 \pi^2} \quad \text{в 1-м случае} \qquad (2.84)$$

и

$$U_S(M, p) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (2k-1) \frac{\pi \bar{x}}{2}}{2k-1} \frac{1}{\bar{p} + \chi^2 + \pi^2 \left(k - \frac{1}{2}\right)^2} \quad \text{– во 2-м.} \qquad (2.85)$$

В условиях отсутствия компенсационного питания при этом зависимости гидравлических сопротивлений могут быть выражены в виде

$$R_0(M, t) = G(\bar{x}, \bar{t}) \qquad (2.86)$$

Таблица 13

Значения функции $G(\bar{x}, \bar{t})$

$\bar{t}$	$\bar{x}_0 = 0{,}1$	0,2	0,3	0,4	0,5
0,0001	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
0,0002	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004
0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006
0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
0,001	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010
0,002	0,0019	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020
0,004	0,0035	0,0040	0,0040	0,0040	0,0040
0,006	0,0049	0,0059	0,0060	0,0060	0,0060
0,008	0,0061	0,0077	0,0080	0,0080	0,0080
0,01	0,0072	0,0094	0,0099	0,0100	0,0100
0,02	0,0116	0,0170	0,0190	0,0198	0,0199
0,04	0,0180	0,0288	0,0346	0,0374	0,0382
0,06	0,0229	0,0380	0,0473	0,0521	0,0537
0,08	0,0269	0,0456	0,0576	0,0643	0,0664
0,10	0,0301	0,0517	0,0661	0,0743	0,0769
0,15	0,0359	0,0627	0,0813	0,0921	0,0956
0,20	0,0395	0,0695	0,0905	0,1030	0,1071
0,25	0,0416	0,0736	0,0961	0,1096	0,1141
0,30	0,0429	0,0761	0,0996	0,1136	0,1183
0,40	0,0442	0,0785	0,1030	0,1176	0,1225
0,50	0,0447	0,0795	0,1042	0,1191	0,1241
0,60	0,0449	0,0798	0,1047	0,1197	0,1247
0,70	0,0450	0,0799	0,1046	0,1199	0,1249
0,80	0,0450	0,0800	0,1050	0,1200	0,1250
∞	0,0450	0,0800	0,1050	0,1200	0,1250

для схемы пласта-полосы с двумя границами питания, где

$$G(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\bar{x}}{2}(1-\bar{x}) - \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi\bar{x}}{(2n-1)^3}\,e^{-(2n-1)^2\pi^2\bar{t}} \qquad (2.87)$$

и

$$R_0(M, t) = 2\,G\left(\frac{\bar{x}}{2}, \frac{\bar{t}}{4}\right) \qquad (2.88)$$

для схемы пласта-полосы с разнородными границами.

Значения функции $G(\bar{x}, \bar{t})$ приведены в табл. 13.

В условиях компенсационного питания в формулах (2.82)–(2.87) все ряды сходятся очень быстро, и для получения соответствующих числовых значений достаточно просуммировать несколько первых их членов.

Глава 3

ОЦЕНКА РЕДУКЦИИ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА ПРИ ПОСТОЯННОМ ВО ВРЕМЕНИ ОТБОРЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Впервые вопросы изменения поверхностного стока под влиянием отбора подземных вод были изучены С. Тэйсом [75], который рассмотрел случай работы одиночной скважины с постоянным дебитом вблизи совершенной реки в предположении однородности пласта и бесконечного его простирания в направлении от реки. Сама река в плане была схематизирована в виде прямой линии. Позже решение этой задачи, проведенное Р. Главером и Дж. Балмером [63], отличалось более широкой трактовкой изучаемых вопросов и более совершенным математическим аппаратом. Многие вопросы взаимосвязи подземных и поверхностных вод были впервые теоретически обоснованы М.С. Хантушем, опубликовавшим серию работ, посвященных оценке сокращения поверхностного стока под влиянием эксплуатации подземных вод [64–66 и др.]. В этих работах учитывались влияние границ пластов, эффект компенсационного питания (перетекания из соседнего водоносного горизонта), определенным образом учитывалось несовершенство гидравлической связи водоносных горизонтов с водотоками. Для всех рассмотренных случаев им были определены расчетные зависимости, в большинстве своем удобные для непосредственного использования. Во Франции велись работы по разработке методики и оценки изменения поверхностного стока при эксплуатации подземных вод рядом гидрогеологов, например А. Удай и Ж. де Марсили [67].

Вопросы учета таких факторов, как изменение модуля эвапотранспирации грунтовых вод, дренажного стока и родниковой разгрузки при эксплуатации подземных вод, а также периодического характера их отбора при ирригационном назначении отбираемых вод, учет несовершенства гидравлической связи водоносных горизонтов с водотоками и пространственного размещения водозаборов, были разработаны Е.Л. Минкиным [32–37], впервые убедительно показавшим, что без надежной оценки редукции поверхностного стока правильный учет ресурсов подземных вод в водохозяйственных балансах невозможен.

Вопросы методики оценки величины редукции поверхностного стока стали особенно актуальны в 70-х годах, когда перед гидрогеологами и специалистами по водному хозяйству разных стран была поставлена задача о необходимости учета ресурсов подземных вод в водохозяйственных балансах. Поэтому в 70-е годы появилось большое число работ по этому вопросу, включая уже упоминавшиеся [32–37], а также статьи Р.-Ф. Лельевра, П. Подсерфа, П. Прюдома [69], В.Д. Бабушкина, Н.Н. Ваньковой и др. [3], Р. Саксены и Чандра [73]. Учету полосовой фильтрационной неоднородности водоносных пластов при оценке редукции поверхностного стока посвящены работы Е.Л. Минкина и С.Я. Концебовского [38, 39, 40].

Внедрение средств аналогового и цифрового моделирования в мето-

дику гидрогеологических расчетов обусловило развитие способов оценки редукции поверхностного стока с помощью ЭЦВМ и АВМ. Так, в работе Р. Янга и Дж. Бридхефта [77] описана цифровая модель бассейна р. Саут-Платт в пределах штата Колорадо, предназначенная для исследования различных путей повышения водообеспеченности этого района с привлечением ресурсов подземных вод, гидравлически связанных с рекой. Расчет динамики подземных вод производится с учетом неоднородности фильтрационных параметров. Аналогичное исследование бассейна р. Труки (штат Невада) проведено А. Каннингхэмом [61]. При этом движение воды в русле реки моделировалось с помощью уравнений Сен-Венана, а движение подземных вод – с помощью двумерных уравнений фильтрации.

Ориентированные на применение ЭЦВМ способы гидрогеологических расчетов береговых водозаборов с оценкой из влияния на водный режим водотоков и водоемов исследованы в работах [1, 7, 20, 21, 22]. В работах [18, 19] предложен алгоритм для расчета динамики подземных вод с учетом их гидравлической связи с руслами водотоков. Численная модель движения подземных вод во взаимодействии с поверхностными водами, составленная на основе метода конечных элементов, приведена в работе [72].

Методика исследования изменения поверхностного стока при эксплуатации подземных вод, основанная на применении аналоговой вычислительной техники, разрабатывалась в работах [5, 27, 57, 60, 68].

3.1. РЕДУКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА В УСЛОВИЯХ ОДНОРОДНОГО ВОДОНОСНОГО ГОРИЗОНТА С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ КОНТУРОМ ПИТАНИЯ В ПЛАНЕ

Выражение для передаточной функции редукции при работе одиночного или параллельного реке (граница питания) линейного водозабора известно [64] и имеет вид

$$U_W(p) = \exp\left(-d\sqrt{\frac{p}{a} + g^2}\right). \tag{3.1}$$

Здесь приводится его краткий вывод. При однородности фильтрационных параметров (μ и T) по всему полю уравнение (1.31) может быть представлено в виде

$$\frac{p}{a}\hat{S} = \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial y^2} - g^2\hat{S} + \frac{\hat{\Upsilon}}{T}, \tag{3.2}$$

где $\hat{S}(x, y)$ – изображение по Лапласу временной зависимости понижения уровня (напора) подземных вод в точке $M(x, y)$; T – коэффициент водопроводимости; $\hat{\Upsilon}(x, y, p)$ – изображение по Лапласу модуля водоотбора. Уравнение (3.2) получено из (1.31) делением всех членов последнего на T;

$$g^2 = b/T, \tag{3.3}$$

где g – компенсационный эффект.

Преобразуем уравнение (3.2) по Фурье по переменной y, полагая

$$S^*(x, \omega, p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y} \hat{S}(x, y, p)\, dy. \tag{3.4}$$

Двукратное дифференцирование по y (при условии, что значения производной убывают по модулю при $\bar{y} \to \infty$) эквивалентно умножению на $(-\omega^2)$. Тогда обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $S^*(x, \omega, p)$ примет вид

$$\frac{d^2 S^*}{dx^2} - \sigma^2 S^* = -\frac{q^*}{T} \delta(x - d), \tag{3.5}$$

где

$$\sigma = \sqrt{\frac{p}{a} + g^2 + \omega^2}, \tag{3.6}$$

$g^* = g^*(\omega, p)$

– изображение по Фурье зависимости $\hat{g}(y, p)$. Решение уравнения (3.5), удовлетворяющее условиям $S^*(0) = 0$ и $S^*(x) \to 0$ при $x \to \infty$, имеет вид

$$S^*(x) = \frac{q^*}{\sigma T} e^{-\sigma d} \operatorname{sh} \sigma x \tag{3.7}$$

(при $x < d$). Для определения величины редукции необходимо вычислить значение градиента понижения вблизи границы питания, т.е. функцию $\left.\frac{dS^*(x)}{dx}\right|_{x=0}$. Согласно формуле (3.7) она равна

$$(q^*/T) e^{-\sigma d}. \tag{3.8}$$

Вместо того, чтобы переходить на основании последнего равенства к определению зависимости градиента понижения вблизи границы от y, осуществляя обратное преобразование Фурье, заметим, что согласно выражению преобразования Фурье, например, (3.4), интеграл от какой-либо функции в пределах от $-\infty$ до ∞ равен значению преобразования Фурье от нее при $\omega = 0$. Поэтому преобразование Лапласа временной зависимости редукции получаем, подставляя $\omega = 0$ в полученное выше равенство (3.8) для изображения по Фурье распределения градиента понижения вблизи границы питания и, умножая на T,

$$\hat{W}(p) = q^*(0, p) e^{-d\sqrt{p/a + g^2}}. \tag{3.9}$$

Поскольку $q^*(0, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}(y, p)\, dy = \hat{Q}(p)$ – изображение по Лапласу суммарного дебита водоотбора,

$$\hat{W}(p) = U_W(p)\, \hat{Q}(p),$$

где передаточная функция редукции $U_W(p)$ выражается искомой фор-

мулой (3.1)

$$U_W(p) = e^{-d\sqrt{\frac{p}{a} + g^2}}. \qquad (3.10)$$

Полученный результат означает, что временная зависимость редукции поверхностного стока не зависит от распределения отбора в направлении, параллельном границе питания. Этот вывод остается справедливым и в более общих условиях, например при плановой (полосовой) фильтрационной неоднородности. В частности, одинаково влияют на поверхностный сток скважинный (одиночный) водозабор и линейный ряд, удаленные от реки на одно и то же расстояние. Конечно, все сказанное верно только в том случае, когда границу питания и границы полосовой фильтрационной неоднородности можно считать прямолинейными и достаточно протяженными (теоретически – бесконечными).

Функция относительной редукции, соответствующая передаточной функции (3.1), имеет вид

$$w_0(t) = \mathrm{D}\left(\frac{d}{2\sqrt{at}}, \chi\right), \qquad (3.11)$$

где $\chi = gd$, функция $\mathrm{D}(z, a)$ определена выражением (2.15), а ее значения приведены в Приложении 2. При $t \to \infty$ устанавливается предельное значение относительной редукции, равное, как это легко вывести из формулы (3.2), применяя к ней предельную теорему операционного исчисления,

$$\gamma = e^{-\chi}. \qquad (3.12)$$

Это означает, что в условиях компенсационного питания величина редукции в принципе не может стать равной величине водоотбора. Это утверждение представляется вполне очевидным; более важным является вопрос о количественной оценке величины предельного значения относительной редукции γ в различных условиях. Характерные значения коэффициента перетекания b_L составляют 10^{-3} ... 10^{-5} сут$^{-1}$ [6, 53, 59]. При характерном значении коэффициента водопроводимости $T = 10^3$ м^2/сут и при отсутствии испарения величина компенсационного эффекта при перетекании составит

$$g = \sqrt{b_L/T},$$

т.е. от 10^{-3} до 10^{-4} м$^{-1}$. При расстоянии водозабора от реки, равном 2000 м, величина γ будет составлять соответственно 0,14 и 0,81. В условиях эвапотранспирации грунтовых вод характерное значение модуля эвапотранспирации при понижении уровня на 1 м составляет 1 мм/сут, что дает величину b_E в размере 10^{-3} сут$^{-1}$, что при $T = 10^3$ и при отсутствии перетекания приводит к значению g, равному 10^{-3} м$^{-1}$. При d = = 2000 м $\chi = 2{,}0$ и $\gamma = 0{,}14$. Отметим, что даже сравнительно малые значения коэффициента эвапотранспирации b_E приводят к заметному уменьшению величины γ по сравнению с единицей. Так, величину $b_E = 10^{-4}$ м/сут можно считать незначительной (она соответствует изменению модуля эвапотранспирации на 0,1 мм/сут при изменении уровня залегания грун-

товых вод на 1 м; при $T = 10^3$ м^2/сут величина компенсационного эффекта составит $0{,}632 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$, и при d = 1000 м величина предельной относительной редукции окажется равной $e^{-0{,}632} = 0{,}53$, т.е. значительно отличающейся от единицы.

При отсутствии компенсационного питания, т.е. при $\chi = 0$, формула (3.11) приобретает более привычный вид [35]:

$$w_0(t) = \operatorname{erfc} \frac{d}{2\sqrt{at}} . \qquad (3.13)$$

Функция интегральной относительной редукции в рассматриваемых условиях определена М.С. Хантушем [64] и выражается формулой

$$\upsilon(t) = \mathrm{D}\left(\frac{d}{2\sqrt{at}}, \chi\right) - \frac{2}{\chi} \frac{d^2}{4at} \mathrm{D}^*\left(\frac{d}{2\sqrt{at}}, \chi\right), \qquad (3.14)$$

где функция $\mathrm{D}(z, \alpha)$ определена выражением (2.15), а функция $\mathrm{D}^*(Z, \alpha)$ – выражением (2.9). При отсутствии компенсационного питания формула (3.14) переходит в более известную формулу, соответствующую условиям при $\chi = 0$ [12]:

$$\upsilon(t) = 4\, \mathrm{i}^2 \operatorname{erfc} \frac{d}{2\sqrt{at}} . \qquad (3.15)$$

Рассмотрим условия однородного пласта-полуплоскости при отборе подземных вод полосовым площадным водозабором (рис. 3.1). Передаточная функция редукции для этих условий может быть получена исходя из выражения (3.1), если проинтегрировать его по переменной d в пределах от x_1 до x_2 и разделить на $(x_2 - x_1)$. В результате получаем

$$U_W(p) = \frac{e^{-\beta x_1} - e^{-\beta x_2}}{\beta (x_2 - x_1)} , \qquad (3.16)$$

где $\beta = \sqrt{\frac{p}{a} + g^2}$.

Передаточной функции (3.16) соответствует функция относительной редукции следующего вида:

$$w_0(t) = \frac{1}{\chi_2 - \chi_1} \left[\mathrm{D}^*\left(\frac{x_1}{2\sqrt{at}}, \chi_1\right) - \mathrm{D}^*\left(\frac{x_2}{2\sqrt{at}}, \chi_2\right) \right], \qquad (3.17)$$

где $\chi_j = g x_j$, j = 1,2. Предельное значение этой функции равно

$$\gamma = \frac{e^{-\chi_1} - e^{-\chi_2}}{\chi_2 - \chi_1} . \qquad (3.18)$$

Функция относительной интегральной редукции имеет более сложное

выражение:

$$\upsilon(t) = \frac{1}{\chi_2 - \chi_1}\left[\Lambda^*\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a\,t}};\ \chi_1\right) - \Lambda^*\left(\frac{x_2}{2\sqrt{a\,t}};\ \chi_2\right)\right], \qquad (3.19)$$

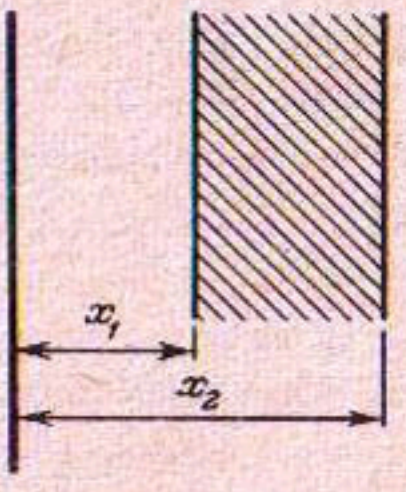
где

$$\Lambda^*(z,\ \alpha) = \mathrm{D}^*(z,\ \alpha)\left(1 - \frac{2z^2}{\alpha^2}\right) - \frac{2z^2}{\alpha}\mathrm{D}(z,\ \alpha) + \frac{2z}{\alpha}e^{-\left(z^2 + \frac{\alpha^2}{4z^2}\right)}. \qquad (3.20)$$

В условиях отсутствия компенсационного питания формула (3.17) преобретает более простой вид:

$$w_0(t) = \frac{2\sqrt{a\,t}}{x_2 - x_1}\left(\mathrm{ierfc}\,\frac{x_1}{2\sqrt{a\,t}} - \mathrm{ierfc}\,\frac{x_2}{2\sqrt{a\,t}}\right). \qquad (3.21)$$

В этих же условиях представляется возможным выразить и функцию



Р и с. 3.1. Схема площадного водозабора полосовой формы в полуограниченном однородном пласте

Область водоотбора заштрихована

относительной интегральной редукции, которая характеризуется выражением вида

$$\upsilon(t) = \frac{8\sqrt{at}}{x_2 - x_1}\left(\mathrm{i}^3\mathrm{erfc}\,\frac{x_1}{2\sqrt{at}} - \mathrm{i}^3\mathrm{erfc}\,\frac{x_2}{2\sqrt{at}}\right), \qquad (3.22)$$

где $\mathrm{i}^3\mathrm{erfc}z$ – третий повторный интеграл вероятностей [52], значения которого протабулированы в Приложении 1.

Если полоса водоотбора начинается непосредственно у уреза реки, т. е. при $x_1 = 0, x_2 = d$, формулы (3.17), (3.19)–(3.21) не определены. В результате предельного перехода получаем, что при таком расположении водозабора функция относительной редукции в условиях компенсационного питания имеет вид

$$w_0(t) = \frac{1}{\chi}\left[\mathrm{erf}\ (g\sqrt{a\,t}) - \mathrm{D}^*\left(\frac{d}{2\sqrt{at}};\ \chi\right)\right], \qquad (3.23)$$

$\chi = gd$, а в условиях его отсутствия

$$w_0(t) = \frac{2\sqrt{at}}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \mathrm{ierfc}\,\frac{d}{2\sqrt{at}}\right). \qquad (3.24)$$

Функция интегральной относительной редукции в условиях компенсацион-

ного питания имеет при этом выражение

$$v\,(t) = \frac{1}{\chi}\left[\operatorname{erf}(g\sqrt{at}) - \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(g\sqrt{at}) - (g\sqrt{at})\,e^{-g^2 at}}{ag^2 t} - \right.$$

$$\left. - \Lambda^*\left(\frac{d}{2\sqrt{at}},\ \chi\right)\right], \qquad (3.25)$$

а в условиях отсутствия компенсационного питания

$$v\,(t) = \frac{8\sqrt{at}}{d}\left(\frac{1}{6\sqrt{\pi}} - \mathrm{i}^3\operatorname{erfc}\frac{d}{2\sqrt{at}}\right). \qquad (3.26)$$

Для иллюстрации применения выведенных формул и выражений рассмотрен пример.

Пример. Отбор подземных вод полуограниченного в плане пласта ведется полосовой площадной системой скважин, ближний и дальний по отношению к реке края которой удалены от нее на расстояния соответственно $x_1 = 1600$ м и $\bar{x}_2 = 4000$ м. Требуется определить значения редукции расхода реки и объема ее стока, если коэффициент уравнепроводности эксплуатируемого аллювиального водоносного горизонта (a) составляет 2500 м^2/сут, а величина компенсационного эффекта $g = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$. Оценку редукции требуется провести для значения времени $t = 10\,000$ сут; расход водоотбора составляет 6,00 м^3/с = 518400 м^3/сут.

Решение. Сначала оценим величину относительной редукции расхода, пользуясь формулой (3.17). Для этого находим значения

$$\frac{x_1}{2\sqrt{at}} = \frac{1600}{2\sqrt{2500 \cdot 10\,000}} = 0{,}16;\ \frac{x_2}{2\sqrt{at}} = \frac{4000}{2\sqrt{2500 \cdot 10\,000}} = 0{,}4;$$

$$\chi_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 1600 = 0{,}8;\ \chi_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 4000 = 2{,}0.$$

Подставив полученные значения в формулу (3.17), получим

$$w_0\,(t) = \frac{1}{2{,}0 - 0{,}8}\left[\mathrm{D}^*(0{,}16;\ 0{,}8) - \mathrm{D}^*(0{,}4;\ 2{,}0)\right] =$$

$$= (1/1{,}2) \cdot (0{,}4489 - 0{,}1350) = 0{,}262.$$

Умножая на величину расхода водоотбора, находим величину редукции расхода реки: $W = 0{,}262 \cdot 6{,}00 = 1{,}57$ м^3/с.

Значение функции интегральной относительной редукции определяем по формуле (3.19). Для этого вычислим значения входящих в нее функций Λ^* от найденных выше аргументов, используя приложения 2, 3. Имеем

$$\Lambda^*(0{,}16;\ 0{,}8) = (1 - 2 \cdot 0{,}16^2/0{,}8^2)\,\mathrm{D}^*(0{,}16;\ 0{,}8) - 2 \cdot 0{,}16^2/0{,}8 \times$$
$$\mathrm{D}(0{,}16;\ 0{,}8) + 2 \cdot 0{,}16/0{,}8 \cdot e^{-(0{,}16^2 + 0{,}8^2/4 \cdot 0{,}16^2)} = 0{,}3850;$$

аналогично определяем, что Λ^* (0,4; 2,0) =0,1032; по формуле (3.19) находим, что $\upsilon\ (t) = (1/1{,}2) \cdot (0{,}3850 - 0{,}1032) = 0{,}2348$. Умножая на выраженный в $м^3$/сут расход водоотбора и на число суток, в течение которых происходит водоотбор, находим, что суммарное сокращение объема стока в нижний створ за счет эксплуатации подземных вод составит $0{,}2348 \times 518\,400 \cdot 10\,000 = 1{,}22 \cdot 10^9$ $м^3 = 1{,}22$ $км^3$. Суммарный же отбор подземных вод составил за это время 5,18 $км^3$.

3.2. РЕДУКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА В УСЛОВИЯХ ПЛАНОВОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Методика оценки редукции поверхностного стока для условий пласта-полуплоскости с параллельными реке границами фильтрационной неоднородности описывалась в работах [39, 40], причем в них рассматривались условия, когда в схеме присутствует только одна такая граница. Эти условия хотя и являются наиболее простыми, тем не менее отражают достаточно широкий круг встречающихся природных условий. Так, в виде пласта-полуплоскости с параллельной реке границей неоднородности представляются условия аллювиальных отложений речных террас, врезанных в более древний аллювий как в коренные отложения берегов; условия крупных конусов выноса и предгорных шлейфов, характеризующихся выраженной границей смены фаций, и т. д.

Рассмотрим схему пласта-полуплоскости с параллельной границе питания границей неоднородности (рис. 3.2, *а, б*). Как видно из рисунка, при этом возможны два варианта размещения водозабора: в первой, ближней к реке области неоднородности и во второй области, более удаленной от реки.

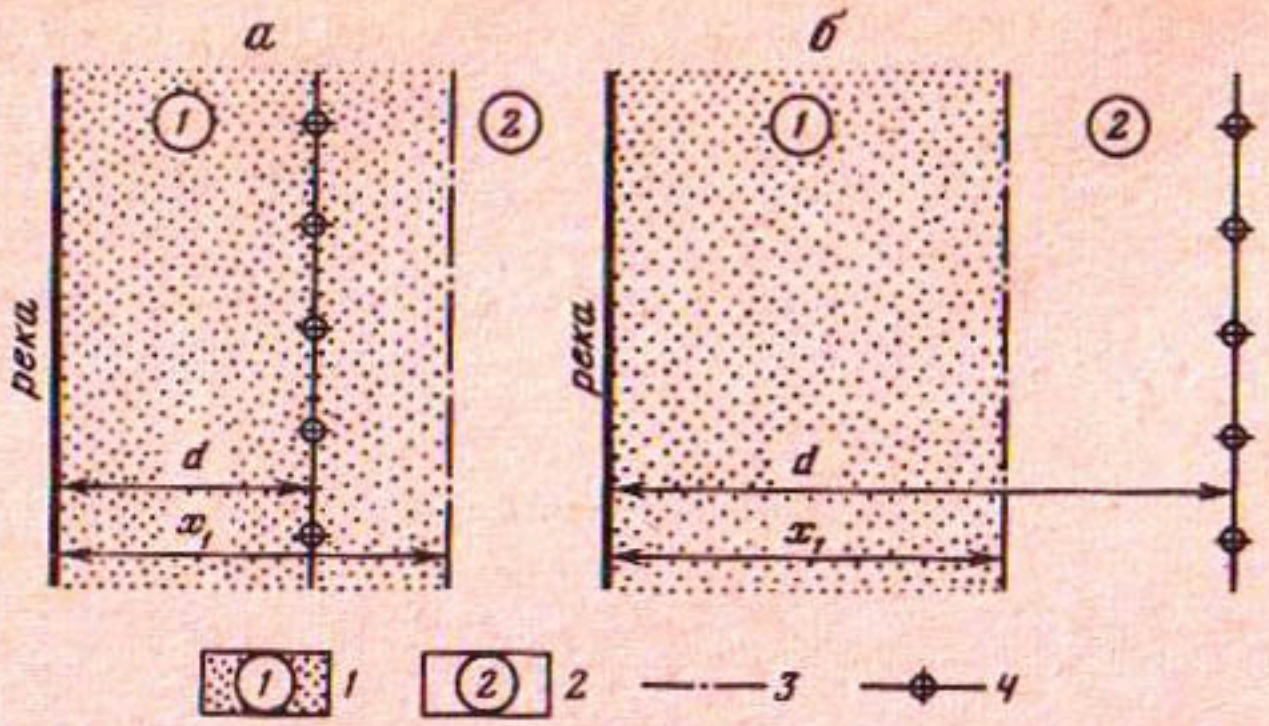
Рассмотрим сначала решение задачи для условий размещения водозабора во второй области. Если отбор подземных вод сосредоточен вдоль прямой, параллельной реке, то, как было показано в предыдущем параграфе, размещение и производительность скважин вдоль этой прямой для решения задачи оценки редукции несущественны: можно полагать, что отбор подземных вод ведется бесконечным по протяженности линейным рядом равнодебетных скважин. В этих условиях поток становится плоскопараллельным, а соответствующие уравнения —одномерными:

$$\frac{1}{a_1}\frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - g_1^2 S_1,$$

$$\frac{1}{a_2}\frac{\partial S_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} - g_2^2 S_2 - \frac{q}{T_2}\delta(x-d), \qquad (3.27)$$

где $S_j(x,\ t)$ — понижение уровня (напора) подземных вод в точке M области j, причем абсцисса этой точки x отсчитывается от уреза реки; a_j — величина коэффициента уровнепроводности j-й области; T_j — величина коэффициента водопроводимости j-й области; g_j — компенсационный эффект j-й области; q — величина линейной плотности отбора. На урезе реки ставится граничное условие совершенного питания

$$S_1(0, t) = 0; \qquad (3.28)$$



Р и с. 3.2. Схема пласта-полосы с границей неоднородности в плане, когда линейный ряд скважин располагается в ближней от реки полосе фильтрационной неоднородности (*а*) и в отдаленной от реки области неоднородности (*б*)

1 – полоса постоянства фильтрационных параметров, ближняя к реке; *2* – удаленная от реки область неоднородности; *3* – граница неоднородности; *4* – линейный ряд скважин

при $x \to \infty$ должно выполняться условие ограниченности решения

$$S_2(x, t) \to 0, \; x \to \infty. \tag{3.29}$$

Наконец, на линии $x = x_1$ (граница неоднородности) должны выполняться условия четвертого рода, выражающие непрерывность напора и расхода:

$$S_1(x_1, t) = S_2(x_1, t); \tag{3.30}$$

$$S_1'(x_1, t) = \nu S_2'(x_2, t), \tag{3.31}$$

где штрих означает дифференцирование по координате, а

$$\nu = T_2/T_1. \tag{3.32}$$

Преобразованные по Лапласу во временно́й области уравнения приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} \hat{S}_1'' - \beta^2_1 \hat{S}_1 &= 0, \\ \hat{S}_2'' - \beta^2_2 \hat{S}_2 &= -(\hat{q}/T_2)\delta(x-d), \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

где $\hat{q}(p)$ – изображение временно́й зависимости линейной плотности отбора; $\beta_j = \sqrt{p/a_j + g_j^2}$ – операционный компенсационный эффект j-й области.

Общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.33) может быть записано в виде

$$\hat{S}_1 = A_1 \operatorname{sh}\beta_1 x + B_1 \operatorname{ch}\beta_1 x,$$

$$\hat{S}_2 = A_2 \operatorname{sh}\beta_2 (x - x_1) + B_2 \operatorname{ch}\beta_2 (x - x_1) - \frac{\hat{q}}{\beta_2 T_2} \operatorname{sh}\beta_2 (x-d)\theta(x-d), \tag{3.34}$$

где константы интегрирования A_j, B_j определяются исходя из граничных условий. Так, из условия (3.28) следует, что $B_1 = 0$; из условия (3.29)

следует, что

$$A_2 + B_2 = \frac{\hat{q}}{\beta_2 T_2} e_0^{-\beta_2 (d - x_1)} \tag{3.35}$$

Условие (3.30) приводит к соотношению

$$\beta_1 A_1 \mathrm{ch}\beta_1 x_1 = \nu \beta_2 A_2. \tag{3.36}$$

условие (3.31) – к соотношению

$$A_1 \mathrm{sh}\beta_1 x_1 = B_2. \tag{3.37}$$

Равенства (3.35)–(3.37) представляют собой систему трех алгебраических уравнений относительно трех неизвестных: A_1, A_2, B_2. Решая ее, определяем выражение для константы A_1:

$$A_1 = \frac{\hat{q}}{T_1} \frac{e^{-\beta_2 (d - x_1)}}{\beta_1 \mathrm{ch}\beta_1 x_1 + \nu \beta_2 \mathrm{ch}\beta_1 x_1}. \tag{3.38}$$

Согласно первому из уравнений (3.34), изображение по Лапласу градиента понижения вблизи реки будет иметь вид

$$\hat{S}_1' = \beta_1 A_1. \tag{3.39}$$

Умножая его на T_1 и принимая во внимание выражение (3.38), получим выражение для изображения редукции расхода реки в виде

$$W = \hat{q} \frac{e^{-\beta_2 (d - x_1)}}{\mathrm{ch}\beta_1 x_1 + \nu (\beta_2 / \beta_1) \mathrm{sh}\beta_1 x_1}, \tag{3.40}$$

откуда следует выражение для передаточной функции редукции в виде

$$U_W(p) = \frac{e^{-\beta_2 (d - x_1)}}{\mathrm{ch}\beta_1 x_1 + (\nu \beta_2 / \beta_1) \mathrm{sh}\beta_1 x_1}. \tag{3.41}$$

Нахождение оригинала от изображения (3.41), т. е. функции относительной редукции, в общем случае представляет собой очень сложную задачу. Поэтому для условий рассматриваемой схемы, если компенсационное питание имеет место, для определения временны́х характеристик редукции можно порекомендовать использование численных методов обращения, например способа Л.К. Гохберга.

В условиях отсутствия компенсационного питания функции относительной редукции и относительной интегральной редукции могут быть получены в явном виде. Для этого следует представить гиперболические функции в знаменателе (3.41) в виде комбинаций экспонент, привести подобные члены и выразить (3.41) в виде суммы членов бесконечной геометрической прогрессии, а именно

$$U_W(p) = e^{-(d - x_1)\sqrt{p/a_2}} \left\{ e^{-x_1 \sqrt{p/a_2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \epsilon^n \times \right. \tag{3.42}$$

$$\left. \times \left[e^{-(2n-1) x_1 \sqrt{p/a_1}} - e^{-(2n+1) x_1 \sqrt{p/a_1}} \right] \right\}, \tag{3.42}$$

где положено

$$\epsilon = \frac{1-\eta}{1+\eta}, \tag{3.43}$$

$$\eta = \nu\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}. \tag{3.44}$$

После этого обратное преобразование Карсона для изображения находится почленным преобразованием формулы (3.42):

$$w_0(t) = \Phi_2^*\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}};\ \epsilon;\ \rho\right), \tag{3.45}$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\left(\frac{d}{x_1} - 1\right),$$

$$\Phi_2^*(z;\ \epsilon;\ \rho) = \operatorname{erfc}(1+\rho)z + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\epsilon^n[\operatorname{erfc}(2n+\rho-1)z -$$

$$-\operatorname{erfc}(2n+\rho+1)z]. \tag{3.46}$$

Значения функции $\Phi_2^*(z;\ \epsilon;\ \rho)$ приведены в табл. 14.

Выражение для функции интегральной относительной редукции очевидным образом вытекает из выражения (3.45)

$$v(t) = \Phi_2^{**}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}};\ \epsilon;\ \rho\right), \tag{3.47}$$

где

$$\Phi_2^{**}(z;\epsilon;\ \rho) = 4\mathrm{i}^2\operatorname{erfc}(1+\rho)z + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\epsilon^n[\mathrm{i}^2\operatorname{erfc}(2n+\rho-1)z -$$

$$-\mathrm{i}^2\operatorname{erfc}(2n+\rho+1)z]. \tag{3.48}$$

Аналогично решается задача по определению характеристик редукции и в случае размещения линейного водозабора в первой области неоднородности (рис. 3.2, *а*). Действуя в той же последовательности, что и в рассмотренном выше случае, получим выражение для передаточной функции редукции в виде

$$U_W(p) = \frac{(\nu\beta_2/\beta_1)\operatorname{sh}\beta_1(x_1-d) + \operatorname{ch}\beta_1(x_1-d)}{(\nu\beta_2/\beta_2)\operatorname{sh}\beta_1 x_1 + \operatorname{ch}\beta_1 x_1}. \tag{3.49}$$

В отличие от рассмотренного выше случая, когда водозабор размещался в пределах второй области неоднородности (схема на рис. 3.2, *а*), явное выражение для функции относительной редукции может быть получено при несколько более общих условиях, а именно необходимо выполнение

$$a_1 g_1^2 = a_2 g_2^2. \tag{3.50}$$

При этом

$$w_0(t) = \mathrm{D}\left(\frac{d}{2\sqrt{a_1 t}}; \chi\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \epsilon^n \left[\mathrm{D}\left(\frac{2nx_1 - d}{2\sqrt{a_1 t}}; 2n\chi_1 - \chi\right) - \right.$$

$$\left. - \mathrm{D}\left(\frac{2nx_1 + d}{2\sqrt{a_1 t}}; 2n\chi_1 + \chi\right)\right] \tag{3.51}$$

и

$$v(t) = \Lambda\left(\frac{d}{2\sqrt{a_1 t}}; \chi\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \epsilon^{n+1} \left[\Lambda\left(\frac{2nx_1 - d}{2\sqrt{a_1 t}}; 2n\chi_1 - \chi\right) - \right.$$

$$\left. - \Lambda\left(\frac{2nx_1 + d}{2\sqrt{a_1 t}}; 2n\chi_1 + \chi\right)\right], \tag{3.52}$$

где $\chi = g_1 d; \chi_1 = g_1 x_1$, функция $\Lambda(z, \alpha)$ определяется выражением (3.14).

При отсутствии компенсационного питания выражения (3.51) и (3.52) упрощаются до вида соответственно

$$w_0(t) = \Phi_1^*\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \epsilon; \frac{d}{x_1}\right) \tag{3.53}$$

и

$$v(t) = \Phi_1^{**}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \epsilon; \frac{d}{x_1}\right), \tag{3.54}$$

где

$$\Phi_1^*(z; \epsilon; \alpha) = \mathrm{erfc}\,\alpha z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \epsilon^n \left[\mathrm{erfc}\,(2n - \alpha)z - \mathrm{erfc}\,(2n + \alpha)z\right], \tag{3.55}$$

$$\Phi_1^{**}(z; \epsilon; \alpha) = 4i^2\,\mathrm{erfc}\,\alpha z + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \epsilon^n \left[i^2\,\mathrm{erfc}\,(2n - \alpha)z - \right.$$

$$\left. - i^2\,\mathrm{erfc}\,(2n + \alpha)z\right]. \tag{3.56}$$

Значения функции $\Phi_1^*(z; \epsilon; \alpha)$ приведены в табл. 15.

При отборе подземных вод площадными системами скважин передаточные функции редукции вида (3.41) и (3.49) необходимо проинтегрировать по переменной d по области водоотбора и разделить на ее площадь. Так, при отборе подземных вод полосовым площадным водозабором, целиком расположенным в пределах первой области неоднородности (рис. 3.3, *а*), передаточная функция редукции будет иметь вид

$$U_W(p) = \frac{\mathrm{sh}\,\beta_1(x_1 - \xi_1) + \eta\,\mathrm{ch}\,\beta_1(x_1 - \xi_1) - [\mathrm{sh}\beta_1(x_1 - \xi_2) + \eta\mathrm{ch}\,\beta_1(x_1 - \xi_2)]}{(\xi_2 - \xi_1)\beta_1(\eta\,\mathrm{sh}\beta_1 x_1 + \mathrm{ch}\beta_1 x_1)} \tag{3.57}$$

Соответствующая функция относительной редукции записывается в виде

$$w_0(t) = \frac{2\sqrt{a_1 t}}{\epsilon_2 - \epsilon_1}\left[C_1\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \epsilon; \frac{\epsilon_1}{x_1}\right) - C_1\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \epsilon; \frac{\epsilon_2}{x_1}\right)\right], \tag{3.58}$$

$$C_1(z; \epsilon; \alpha) = \mathrm{i}\,\mathrm{erfc}\,\alpha z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \epsilon^n \left[\mathrm{i}\,\mathrm{erfc}\,(2n - \alpha)z - \mathrm{i}\,\mathrm{erfc}\,(2n + \right. \tag{3.59}$$

$$\left. + \alpha)z\right].$$

Таблица 14

Значения функции $\Phi^*(z, \epsilon, \rho)$

$\rho = 4{,}0$						
z	$\epsilon = 0{,}2$	0,5	0,8	−0,4	−0,6	−0,8
0,10	0,8950	0,9024	0,9074	0,8582	0,8224	0,7240
0,15	0,8430	0,8540	0,8614	0,7892	0,7386	0,6103
0,20	0,7916	0,8061	0,8158	0,7224	0,6599	0,5146
0,25	0,7410	0,7587	0,7707	0,6584	0,5872	0,4350
0,30	0,6915	0,7122	0,7262	0,5975	0,5207	0,3687
0,35	0,6431	0,6665	0,6825	0,5402	0,4604	0,3133
0,40	0,5961	0,6219	0,6397	0,4865	0,4060	0,2669
0,50	0,5068	0,5362	0,5570	0,3904	0,3136	0,1946
0,60	0,4245	0,4561	0,4789	0,3091	0,2403	0,1426
0,70	0,3502	0,3823	0,4062	0,2416	0,1826	0,1046
0,80	0,2842	0,3155	0,3395	0,1865	0,1376	0,0767
0,90	0,2268	0,2559	0,2791	0,1421	0,1028	0,0560
1,00	0,1778	0,2039	0,2254	0,1070	0,0761	0,0407
1,20	0,1035	0,1222	0,1387	0,0582	0,0404	0,0210
1,40	0,0559	0,0675	0,0783	0,0300	0,0205	0,0105
1,60	0,0280	0,0343	0,0404	0,0146	0,0098	0,0050
1,80	0,0130	0,0161	0,0191	0,0066	0,0045	0,0022
2,00	0,0056	0,0070	0,0083	0,0028	0,0019	0,0009
$\rho = 0{,}429$						
0,05	0,9567	0,9699	0,9787	0,8922	0,8311	0,6772
0,10	0,9133	0,9395	0,9572	0,7908	0,6883	0,4842
0,15	0,8697	0,9087	0,9353	0,6996	0,5756	0,3685
0,20	0,8257	0,8773	0,9129	0,6194	0,4873	0,2928
0,25	0,7813	0,8448	0,8898	0,5493	0,4172	0,2398
0,30	0,765	0,8110	0,8655	0,4883	0,3607	0,2006
0,35	0,6912	0,7755	0,8395	0,4349	0,3142	0,1705
0,40	0,6455	0,7377	0,8110	0,3880	0,2754	0,1466
0,50	0,5542	0,6546	0,7420	0,3099	0,2144	0,1112
0,60	0,4654	0,5634	0,6545	0,2478	0,1686	0,0861
0,70	0,3824	0,4702	0,5549	0,1975	0,1331	0,0673
0,80	0,3079	0,3819	0,4547	0,1563	0,1048	0,0526
0,90	0,2432	0,3029	0,3623	0,1224	0,0818	0,0410
1,00	0,1886	0,2354	0,2821	0,0945	0,0631	0,0316
1,20	0,1076	0,1345	0,1614	0,0538	0,0359	0,0176
1,40	0,0573	0,0716	0,0859	0,0286	0,0191	0,0095
1,60	0,0284	0,0355	0,0426	0,0142	0,0095	0,0047
1,80	0,0131	0,0164	0,0196	0,0065	0,0044	0,0022
2,00	0,0056	0,0070	0,0084	0,0028	0,0019	0,0009

Значения функции $C_1(z, \epsilon, \alpha)$ приведены в табл. 16. Соответствующая функция интегрального относительного изменения стока будет иметь вид

$$v(t) = \frac{8\sqrt{a_1 t}}{\xi_2 - \xi_1}\left[C_1^*\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \epsilon; \frac{\xi_1}{x_1}\right) - C_1^*\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \epsilon; \frac{\xi_1}{x_1}\right)\right], \qquad (3.60)$$

$\rho = 1{,}0$					
0,2	0,5	0,8	−0,4	−0,6	−0,8
0,9060	0,9247	0,9372	0,8165	0,7362	0,5566
0,8591	0,8869	0,9056	0,7320	0,6292	0,4330
0,8124	0,8489	0,8738	0,6546	0,5396	0,3468
0,7658	0,8106	0,8416	0,5845	0,4651	0,2840
0,7195	0,7720	0,8091	0,5214	0,4028	0,2365
0,6736	0,7330	0,7759	0,4650	0,3503	0,1995
0,6281	0,6936	0,7421	0,4145	0,3058	0,1699
0,5392	0,6131	0,6716	0,3289	0,2349	0,1259
0,4544	0,5309	0,5959	0,2603	0,1816	0,0950
0,3753	0,4486	0,5146	0,2051	0,1408	0,0725
0,3038	0,3694	0,4309	0,1605	0,1089	0,0555
0,2411	0,2965	0,3500	0,1245	0,0839	0,0424
0,1876	0,2324	0,2764	0,0955	0,0640	0,0322
0,1075	0,1340	0,1604	0,0540	0,0360	0,0180
0,0572	0,0715	0,0858	0,0286	0,0191	0,0096
0,0284	0,0355	0,0426	0,0142	0,0095	0,0047
0,0131	0,0164	0,0196	0,0065	0,0044	0,0022
0,0056	0,0070	0,0084	0,0028	0,0019	0,0009
$\rho = 0$					
0,9623	0,9811	0,9937	0,8712	0,7885	0,6003
0,9242	0,9618	0,9873	0,7561	0,6291	0,4095
0,8852	0,9416	0,9804	0,6591	0,5158	0,3077
0,8448	0,9198	0,9730	0,5786	0,4334	0,2449
0,8027	0,8954	0,9642	0,5115	0,3711	0,2023
0,7585	0,8669	0,9524	0,4549	0,3224	0,1714
0,7124	0,8327	0,9339	0,4067	0,2832	0,1479
0,6646	0,7919	0,9051	0,3649	0,2508	0,1293
0,5673	0,6940	0,8148	0,2959	0,2000	0,1014
0,4728	0,5860	0,6974	0,2403	0,1611	0,0810
0,3859	0,4811	0,5757	0,1940	0,1296	0,0649
0,3093	0,3863	0,4632	0,1549	0,1033	0,0517
0,2437	0,3045	0,3654	0,1219	0,0813	0,0406
0,1888	0,2359	0,2831	0,0944	0,0629	0,0315
0,1076	0,1345	0,1614	0,0538	0,0359	0,0179
0,0573	0,0716	0,0859	0,0286	0,0191	0,0095
0,0284	0,0355	0,0426	0,0142	0,0095	0,0047
0,0131	0,0164	0,0196	0,0065	0,0044	0,0022
0,0056	0,0070	0,0084	0,0028	0,0019	0,0009

где

$$C_1^*(z;\epsilon;\alpha) = i^3\operatorname{erfc}\alpha z + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\epsilon^n\left[i^3\operatorname{erfc}(2n-\alpha)z - i^3\operatorname{erfc}(2n+\alpha)z\right]. \quad (3.61)$$

При расположении полосы отбора за границей фильтрационной неодно-

Таблица 15

Значения функции $\Phi_1^*(z;\epsilon;\alpha)$

$\alpha = 0{,}2$						
z	$\epsilon = 0{,}2$	0,5	0,8	−0,4	−0,8	−1,0
0,10	0,9848	0,9924	0,9974	0,9511	0,8817	0,8000
0,20	0,9685	0,9837	0,9945	0,9149	0,8485	0,8000
0,30	0,9500	0,9722	0,9899	0,8891	0,8333	0,8000
0,40	0,9284	0,9541	0,9774	0,8695	0,8244	0,8000
0,50	0,9040	0,9281	0,9515	0,8535	0,8182	0,8000
0,60	0,8782	0,8974	0,9165	0,8392	0,8129	0,7996
0,70	0,8521	0,8657	0,8792	0,8249	0,8067	0,7976
0,80	0,8268	0,8354	0,8441	0,8094	0,7979	0,7921
0,90	0,8024	0,8075	0,8125	0,7923	0,7856	0,7822
1,00	0,7791	0,7818	0,7845	0,7737	0,7701	0,7682
1,20	0,7347	0,7353	0,7360	0,7335	0,7326	0,7322
1,40	0,6922	0,6923	0,6924	0,6920	0,6918	0,6918
1,60	0,6509	0,6509	0,6509	0,6509	0,6508	0,6508
1,80	0,6107	0,6107	0,6107	0,6107	0,6107	0,6107

$\alpha = 0{,}7$						
z	$\epsilon = 0{,}2$	0,5	0,8	−0,4	−0,8	−1,0
0,10	0,9468	0,9732	0,9910	0,8290	0,5863	0,3000
0,20	0,8906	0,9434	0,3809	0,7036	0,4704	0,3000
0,30	0,8279	0,9047	0,9657	0,6150	0,4182	0,3000
0,40	0,7571	0,8466	0,9271	0,5491	0,3878	0,3000
0,50	0,6802	0,7668	0,8501	0,4969	0,3672	0,3000
0,60	0,6019	0,6753	0,7477	0,4525	0,3509	0,2995
0,70	0,5264	0,5834	0,6401	0,4119	0,3352	0,2966
0,80	0,4562	0,4979	0,5395	0,3727	0,3170	0,2891
0,90	0,3924	0,4217	0,4509	0,3340	0,2950	0,2755
1,00	0,3354	0,3551	0,3749	0,2959	0,2693	0,2563
1,20	0,2403	0,2485	0,2567	0,2239	0,2130	0,2075
1,40	0,1678	0,1708	0,1738	0,1617	0,1577	0,1557
1,60	0,1139	0,1148	0,1158	0,1119	0,1106	0,1099
1,80	0,0750	0,0752	0,0755	0,0744	0,0740	0,0738
2,00	0,0478	0,0478	0,0479	0,0476	0,0475	0,0475
2,50	0,0133	0,0133	0,0133	0,0133	0,0133	0,0133

родности (см. схему на рис. 3.3, *б*) выражение для передаточной функции редукции легко получается:

$$U_W(p) = \frac{e^{-\beta_2(\xi_1 - x_1)} - e^{-\beta_2(\xi_2 - x_1)}}{\beta_2(\xi_2 - \xi_1)(\eta \operatorname{sh}\beta_1 x_1 + \operatorname{ch}\beta_1 x_1)}. \qquad (3.62)$$

При этом функция относительной редукции имеет выражение

$$W_0(t) = \frac{2\sqrt{a_2 t}}{\xi_2 - \xi_1}\left[C_2\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}};\ \epsilon;\ \rho_1\right) - C_2\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}};\ \epsilon;\ \rho_2\right)\right], \qquad (3.63)$$

$\alpha = 0{,}5$					
0,2	0,5	0,8	−0,4	−0,8	−1,0
0,9620	0,9809	0,9936	0,8778	0,7044	0,5000
0,9216	0,9594	0,9863	0,7878	0,6214	0,5000
0,8760	0,9312	0,9751	0,7238	0,5839	0,5000
0,8236	0,8877	0,9456	0,6758	0,5618	0,5000
0,7655	0,8266	0,8855	0,6371	0,5466	0,5000
0,7051	0,7553	0,8049	0,6032	0,5342	0,4993
0,6454	0,6826	0,7197	0,5708	0,5209	0,4959
0,5886	0,6141	0,6396	0,5376	0,5036	0,4865
0,5355	0,5519	0,5683	0,5026	0,4807	0,4697
0,4862	0,4962	0,5063	0,4661	0,4527	0,4460
0,3983	0,4016	0,4049	0,3918	0,3874	0,3853
0,8228	0,3237	0,3246	0,3210	0,3198	0,3192
0,2580	0,2582	0,2584	0,2576	0,2573	0,2572
0,2031	0,2032	0,2032	0,2030	0,2030	0,2030

$\alpha = 1{,}0$					
0,2	0,5	0,8	−0,4	−0,8	−1,0
0,9242	0,9618	0,9873	0,7561	0,4095	0,0000
0,8448	0,9198	0,9730	0,5786	0,2449	0,0000
0,7585	0,8669	0,9524	0,4549	0,1714	0,0000
0,6646	0,7919	0,9051	0,3649	0,1293	0,0000
0,5673	0,6920	0,8148	0,2959	0,1014	0,0000
0,4728	0,5860	0,6974	0,2403	0,0810	0,0000
0,3859	0,4811	0,5757	0,1940	0,0649	0,0000
0,3093	0,3863	0,4632	0,1549	0,0517	0,0000
0,2437	0,3045	0,3654	0,1219	0,0406	0,0000
0,1888	0,2359	0,2831	0,0944	0,0315	0,0000
0,1076	0,1345	0,1614	0,0538	0,0179	0,0000
0,0573	0,0716	0,0859	0,0286	0,0095	0,0000
0,0284	0,0355	0,0426	0,0142	0,0047	0,0000
0,0131	0,0164	0,0196	0,0065	0,0022	0,0000
0,0056	0,0070	0,0084	0,0028	0,0009	0,0000
0,0005	0,0006	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000

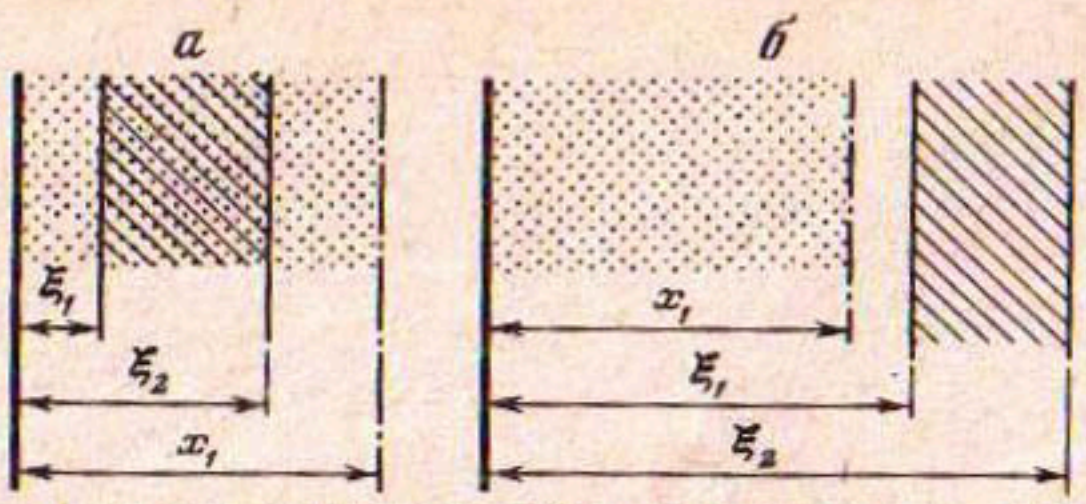
где

$$\rho_j = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\left(\frac{\xi_j}{x_1} - 1\right), \quad j = 1, 2;$$

$$C_2(z;\ \epsilon;\ \rho) = \mathrm{ierfc}\,(1+\rho)z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\epsilon^n\,[\mathrm{ierfc}\,(2n+\rho-1)z -$$

$$- \mathrm{ierfc}\,(2n+\rho+1)z]\,. \qquad (3.64)$$

Значения функции $C_2(z;\ \epsilon;\ \rho)$ приведены в табл. 17. Функция относитель-



Р и с. 3.3. Схема пласта-полосы с границей неоднородности в плане, эксплуатируемой полосовым площадным водозабором, размещенным в пределах ближней к реке полосы неоднородности (*а*) и удаленной от реки области неоднородности (*б*)

Обозначения те же, что и на рис. 3.2

Таблица 16

Значения функции C_1 $(z; \epsilon; \alpha)$

$\alpha = 0{,}1$						
z	$\epsilon = 0{,}1$	0,5	1,0	−0,2	−0,5	−1,0
0,10	0,5528	0,5486	0,5454	0,5579	0,5663	0,6010
0,15	0,5474	0,5416	0,5369	0,5539	0,5633	0,5916
0,20	0,5422	0,5352	0,5291	0,5494	0,5589	0,5823
0,25	0,5372	0,5293	0,5220	0,5447	0,5537	0,5733
0,30	0,5324	0,5241	0,5157	0,5397	0,5480	0,5646
0,35	0,5277	0,5194	0,5105	0,5345	0,5420	0,5502
0,40	0,5230	0,5152	0,5063	0,5293	0,5359	0,5477
0,50	0,5140	0,5078	0,5003	0,5188	0,5236	0,5318
0,60	0,5051	0,5008	0,4955	0,5084	0,5116	0,5157
0,70	0,4963	0,4936	0,4902	0,4983	0,5003	0,5037
0,80	0,4874	0,4859	0,4840	0,4886	0,4897	0,4916

П р и м е ч а н и е. При $z > 0{,}8$ значения функции C_1 $(z; \epsilon; \alpha)$ могут быть приняты равными значениям функции ierfc αz.

$\alpha = 0{,}3$						
z	$\epsilon = 0{,}1$	0,5	1,0	−0,2	−0,5	−1,0
0,10	0,5304	0,5177	0,5081	0,5456	0,5709	0,6751
0,15	0,5146	0,4972	0,4831	0,5340	0,5624	0,6473
0,20	0,4997	0,4785	0,4601	0,5213	0,5498	0,6202
0,25	0,4854	0,4617	0,4395	0,5078	0,5350	0,5940
0,30	0,4718	0,4468	0,4216	0,4937	0,5189	0,5687
0,35	0,4587	0,4339	0,4069	0,4794	0,5020	0,5443
0,40	0,4461	0,4225	0,3955	0,4650	0,4850	0,5208
0,50	0,4220	0,4031	0,3802	0,4365	0,4513	0,4765
0,60	0,3990	0,3857	0,3691	0,4091	0,4192	0,4362
0,70	0,3767	0,3682	0,3575	0,3832	0,3896	0,4003
0,80	0,3551	0,3501	0,3437	0,3589	0,3627	0,3690
0,90	0,3341	0,3313	0,3279	0,3362	0,3383	0,3418
1,00	0,3139	0,3124	0,3106	0,3149	0,3160	0,3178
1,20	0,2757	0,2754	0,2750	0,2759	0,2762	0,2766

П р и м е ч а н и е. При $z > 1{,}20$ значения функции C_1 $(z; \epsilon; \alpha)$ могут быть приняты равными значениям функции ierfc αz.

ной интегральной редукции для этих условий может быть записана в виде

$$v(t) = \frac{8\sqrt{a_2 t}}{\xi_2 - \xi_1}\left[C_2^*\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}};\ \epsilon;\ \rho_1\right) - C_2^*\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}};\ \epsilon;\ \rho_2\right)\right], \qquad (3.65)$$

где

$$C_2^*(z;\ \epsilon;\ \rho) = \mathrm{i}^3\operatorname{erfc}(1+\rho)z + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\epsilon^n[\mathrm{i}^3\operatorname{erfc}(2n+\rho-1)z - \mathrm{i}^3\operatorname{erfc}(2n+\rho+1)z]. \qquad (3.66)$$

Если область водоотбора захватывает обе области неоднородности, согласно принципу суперпозиции следует разбить ее на две части, лежа-

α = 0,2					
0,1	0,5	1,0	−0,2	−0,5	−1,0
0,5415	0,5331	0,5267	0,5517	0,5686	0,6380
0,5309	0,5193	0,5099	0,5438	0,5627	0,6193
0,5207	0,5066	0,4944	0,5351	0,5542	0,6193
0,5110	0,4951	0,4804	0,5259	0,5440	0,5833
0,5016	0,4849	0,4682	0,5162	0,5329	0,5660
0,4925	0,4760	0,4581	0,5063	0,5213	0,5493
0,4837	0,4680	0,4501	0,4962	0,5095	0,5332
0,4667	0,4542	0,4390	0,4762	0,4859	0,5025
0,4501	0,4414	0,4306	0,4567	0,4633	0,4744
0,4338	0,4283	0,4215	0,4380	0,4421	0,4490
0,4178	0,4146	0,4106	0,4202	0,4225	0,4265

α = 0,5					
0,1	0,5	1,0	−0,2	−0,5	−1,0
0,5084	0,4873	0,4713	0,5338	0,5760	0,7498
0,4828	0,4537	0,4302	0,5152	0,5625	0,7042
0,4589	0,4235	0,3930	0,4950	0,5427	0,6604
0,4363	0,3967	0,3598	0,4737	0,5193	0,6183
0,4151	0,3734	0,3313	0,4520	0,4941	0,5781
0,3951	0,3354	0,3083	0,4300	0,4681	0,5395
0,3761	0,3363	0,2908	0,4082	0,4420	0,5028
0,3408	0,3083	0,2689	0,3658	0,3913	0,4348
0,3083	0,2846	0,2552	0,3262	0,3442	0,3744
0,2779	0,2620	0,2422	0,2899	0,3019	0,3218
0,2496	0,2396	0,2271	0,2571	0,2647	0,2772
0,2232	0,2172	0,2098	0,2277	0,2322	0,2397
0,1988	0,1954	0,1911	0,2014	0,2039	0,2082
0,1556	0,1547	0,1535	0,1564	0,1572	0,1584

Таблица 16 (окончание)

$\alpha = 0{,}8$						
z	$\epsilon = 0{,}1$	0,5	1,0	−0,2	−0,5	−1,0
0,10	0,4762	0,4425	0,4169	0,5169	0,5845	0,8631
0,15	0,4371	0,3904	0,3528	0,4888	0,5648	0,7926
0,20	0,4010	0,3443	0,2954	0,4590	0,5358	0,7258
0,25	0,3678	0,3041	0,2450	0,4282	0,5019	0,6627
0,30	0,3374	0,2690	0,2024	0,3972	0,4659	0,6032
0,35	0,8094	0,2414	0,1684	0,3666	0,4293	0,5474
0,40	0,2837	0,2178	0,1433	0,3367	0,3933	0,4952
0,50	0,2379	0,1819	0,1145	0,2810	0,3252	0,4011
0,60	0,1985	0,1579	0,1012	0,2314	0,2646	0,3205
0,70	0,1644	0,1324	0,0926	0,1885	0,2126	0,2529
0,80	0,1351	0,1124	0,0842	0,1520	0,1690	0,1974
0,90	0,1099	0,0944	0,0749	0,1216	0,1332	0,1527
1,00	0,0886	0,0782	0,0651	0,0964	0,1042	0,1172
1,20	0,0558	0,0515	0,0460	0,0591	0,0623	0,0678
1,40	0,0337	0,0321	0,0300	0,0350	0,0362	0,0383
1,60	0,0195	0,0190	0,0183	0,0200	0,0204	0,0211
1,80	0,0108	0,0107	0,0104	0,0110	0,0111	0,0113
2,00	0,0058	0,0057	0,0056	0,0058	0,0058	0,0059

Примечание. При $z > 1{,}80$ значения функции совпадают со значениями функции erfc αz с точностью до четвертого знака включительно.

Таблица 17

Значения функции $C_2(z, \epsilon, \rho)$

$\rho = 0{,}0$						
z	$\epsilon = 0{,}1$	0,5	1,0	−0,1	−0,5	−0,8
0,02	0,5477	0,5568	0,5631	0,5404	0,5098	0,4253
0,04	0,5311	0,5478	0,5697	0,5179	0,4660	0,3493
0,06	0,5144	0,5373	0,5541	0,4966	0,4315	0,3090
0,08	0,4975	0,5254	0,5464	0,4765	0,4045	0,2880
0,10	0,4805	0,5122	0,5368	0,4575	0,3834	0,2776
0,15	0,4382	0,4742	0,5045	0,4142	0,3472	0,2714
0,20	0,3968	0,4312	0,4631	0,3757	0,3230	0,2718
0,25	0,3572	0,3862	0,4157	0,3406	0,3025	0,2691
0,30	0,3201	0,3421	0,3663	0,3082	0,2824	0,2611
0,35	0,2859	0,3011	0,3189	0,2779	0,2613	0,2481
0,40	0,2546	0,2644	0,2762	0,2496	0,2393	0,2314
0,50	0,2005	0,2039	0,2081	0,1988	0,1953	0,1928
0,60	0,1562	0,1572	0,1584	0,1557	0,1547	0,1540
0,70	0,1201	0,1204	0,1207	0,1200	0,1198	0,1196

Примечание. При значениях $z > 0{,}70$ значение функции совпадает со значениями функции ierfc $(\rho + 1)z$.

$\alpha = 1{,}0$					
0,1	0,5	1,0	−0,2	−0,5	−1,0
0,4553	0,4132	0,3812	0,5063	0,5908	0,9396
0,4078	0,3495	0,3024	0,4726	0,5677	0,8537
0,3646	0,2936	0,2324	0,4373	0,5338	0,7732
0,3255	0,2455	0,1715	0,4014	0,4945	0,6982
0,2902	0,2051	0,1203	0,3659	0,4532	0,6284
0,2584	0,1720	0,0798	0,3313	0,4118	0,5639
0,2298	0,1452	0,0502	0,2984	0,3716	0,5043
0,1806	0,1063	0,0171	0,2382	0,2973	0,3993
0,1406	0,0798	0,0049	0,1867	0,2333	0,3119
0,1082	0,0605	0,0012	0,1440	0,1800	0,2402
0,0821	0,0457	0,0003	0,1094	0,1367	0,1823
0,0614	0,0341	0,0001	0,0818	0,1023	0,1364
0,0452	0,0251	0,0000	0,0603	0,0754	0,1005
0,0234	0,0130	0,0000	0,0313	0,0391	0,0521
0,0114	0,0063	0,0000	0,0152	0,0190	0,0253
0,0052	0,0029	0,0000	0,0069	0,0087	0,0115
0,0022	0,0012	0,0000	0,0030	0,0037	0,0049
0,0009	0,0005	0,0000	0,0012	0,0015	0,0020

$p = 0{,}25$					
0,1	0,5	1,0	−0,1	−0,5	−0,8
0,5428	0,5518	0,5581	0,5355	0,5051	0,4821
0,5215	0,5380	0,5498	0,5085	0,4574	0,3426
0,5003	0,5228	0,5393	0,4830	0,4194	0,3003
0,4792	0,5063	0,5268	0,4589	0,3894	0,2774
0,4583	0,4887	0,5123	0,4362	0,3655	0,2652
0,4070	0,4405	0,4690	0,3847	0,3229	0,2536
0,3582	0,3891	0,4179	0,3393	0,2927	0,2478
0,3128	0,3376	0,3632	0,2987	0,2666	0,2386
0,2715	0,2892	0,3090	0,2619	0,2312	0,2243
0,2344	0,2459	0,2595	0,2283	0,2158	0,2059
0,2014	0,2083	0,2168	0,1979	0,1906	0,1851
0,1468	0,1489	0,1514	0,1458	0,1437	0,1421
0,1050	0,1055	0,1061	0,1047	0,1042	0,1038
0,0735	0,0736	0,0737	0,0734	0,0733	0,0732

Таблица 17 (продолжение)

$\rho = 1{,}0$						
z	$\epsilon = 0{,}1$	0,5	1,0	−0,1	−0,5	−0,8
0,01	0,5463	0,5508	0,5540	0,5423	0,5260	0,4760
0,02	0,5283	0,5371	0,5432	0,5212	0,4914	0,4093
0,03	0,5108	0,5233	0,5322	0,5007	0,4601	0,3580
0,04	0,4935	0,5093	0,5206	0,4810	0,4321	0,3231
0,05	0,4765	0,4951	0,5086	0,4619	0,4070	0,2957
0,06	0,4597	0,4808	0,4963	0,4435	0,3845	0,2751
0,07	0,4433	0,4633	0,4836	0,4258	0,3643	0,2595
0,08	0,4271	0,4518	0,4705	0,4087	0,3462	0,2473
0,09	0,4112	0,4371	0,4572	0,3922	0,3299	0,2378
0,10	0,3956	0,4244	0,4435	0,3763	0,3151	0,2301
0,15	0,3286	0,3494	0,3725	0,3050	0,2572	0,2048
0,20	0,2584	0,2802	0,3010	0,2454	0,2138	0,1842
0,25	0,2037	0,2187	0,2345	0,1954	0,1768	0,1609
0,30	0,1583	0,1672	0,1773	0,1536	0,1435	0,1355
0,35	0,1213	0,1260	0,1316	0,1189	0,1139	0,1100
0,40	0,0917	0,0940	0,0967	0,0906	0,0883	0,0866

Примечание. При значениях $z > 0{,}40$ значение функции совпадает со значениями функции $\mathrm{ierfc}\,(1+\rho)z$.

$\rho = 0{,}4$						
z	$\epsilon = 0{,}1$	0,5	1,0	−0,1	−0,5	−0,8
0,01	0,5173	0,5217	0,5248	0,5136	0,4979	0,4498
0,02	0,4728	0,4810	0,4867	0,4662	0,4387	0,3638
0,03	0,4309	0,4420	0,4498	0,4220	0,3864	0,3001
0,04	0,3914	0,4047	0,4143	0,3809	0,3404	0,2528
0,05	0,3544	0,3692	0,3801	0,3428	0,3002	0,2171
0,06	0,3198	0,3355	0,3473	0,3077	0,2650	0,1896
0,07	0,2875	0,3037	0,3160	0,2754	0,2343	0,1678
0,08	0,2576	0,2737	0,2862	0,2458	0,2073	0,1500
0,90	0,2300	0,2456	0,2581	0,2188	0,1886	0,1350
0,10	0,2045	0,2194	0,2315	0,1941	0,1627	0,1221
0,15	0,1075	0,1164	0,1246	0,1020	0,0879	0,0737
0,20	0,0513	0,0549	0,0587	0,0492	0,0446	0,0406
0,25	0,0222	0,0232	0,0244	0,0216	0,0204	0,0195
0,30	0,0087	0,0089	0,0092	0,0086	0,0083	0,0082

щие соответственно в каждой из областей неоднородности, и сложить частичные величины редукции, обусловливаемые работой каждой из частей водозабора.

При оценке характеристик редукции в условиях компенсационного питания полезными оказываются оценки значений предельных величин функций относительной редукции. Часто оказывается, что соответствующие предельные значения настолько незначительны, что расчет временных зависимостей изменения поверхностного стока в таких условиях не пред-

$\rho = 2{,}33$					
0,1	0,5	1,0	−0,1	−0,5	−0,8
0,5332	0,5377	0,5409	0,5294	0,5134	0,4662
0,5032	0,5117	0,5176	0,4962	0,4675	0,3886
0,4742	0,4860	0,4944	0,4646	0,4263	0,3323
0,4462	0,4608	0,4713	0,4345	0,3895	0,2903
0,4192	0,4361	0,4484	0,4060	0,3567	0,2586
0,3932	0,4118	0,4256	0,3789	0,3275	0,2342
0,3682	0,3781	0,4030	0,3532	0,3014	0,2151
0,3442	0,3649	0,3807	0,3290	0,2781	0,1997
0,3213	0,3423	0,3588	0,3061	0,2571	0,1869
0,2994	0,3111	0,3372	0,2845	0,2382	0,1760
0,2049	0,2220	0,2372	0,1939	0,1650	0,1346
0,1342	0,1448	0,1554	0,1281	0,1136	0,1005
0,0843	0,0895	0,0952	0,0815	0,0753	0,0703
0,0508	0,0529	0,0553	0,0497	0,0475	0,0457
0,0294	0,0301	0,0308	0,0290	0,0283	0,0274
0,0163	0,0163	0,0167	0,0162	0,0160	0,0158

$\rho = 9{,}0$					
0,1	0,5	1,0	−0,1	−0,5	−0,8
0,4714	0,4756	0,4785	0,4679	0,4532	0,4084
0,3892	0,3963	0,4013	0,3835	0,3597	0,2961
0,3174	0,3262	0,3225	0,3104	0,2826	0,2172
0,2555	0,2651	0,2720	0,2481	0,2199	0,1618
0,2030	0,2124	0,2194	0,1957	0,1698	0,1223
0,1590	0,1677	0,1744	0,1524	0,1301	0,0936
0,1227	0,1304	0,1364	0,1171	0,0990	0,0720
0,0933	0,0998	0,1050	0,0888	0,0747	0,0556
0,0699	0,0751	0,0794	0,0693	0,0558	0,0427
0,0515	0,0556	0,0590	0,0488	0,0413	0,0326
0,0088	0,0094	0,0101	0,0084	0,0076	0,0068
0,0010	0,0010	0,0011	0,0010	0,0009	0,0009
0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

ставляет никакого интереса. Для условий отбора подземных вод линейным рядом скважин в пределах первой области неоднородности (см. схему на рис. 3.2, *а*)

$$\gamma = \frac{(\nu g_2/g_1)\mathrm{sh}g_1(x_1 - d) + \mathrm{ch}g_1(x_1 - d)}{(\nu g_2/g_1)\mathrm{sh}g_1 x_1 + \mathrm{ch}g_1 x_1}. \qquad (3.67)$$

Для условий отбора подземных вод линейным или одиночным водозабо-

ром в пределах второй области неоднородности (см. схему на рис. 3.2, *б*)

$$\gamma = \frac{e^{-g_2(d-x_1)}}{\mathrm{ch}g_1x_1 + (\nu g_2/g_1)\mathrm{sh}g_1x_1}. \tag{3.68}$$

При отборе подземных вод полосовым площадным водозабором, целиком расположенным в первой области неоднородности (см. схему на рис. 3.3, *а*),

$$\gamma = \frac{\mathrm{sh}g_1(x_1-\xi_1) + \frac{\nu g_2}{g_1}\mathrm{ch}g_1(x_1-\xi_1) - \left[\mathrm{sh}g_1(x_1-\xi_2) + \frac{\nu g_2}{g_1}\mathrm{ch}g_1(x_1-\xi_2)\right]}{(\xi_2-\xi_1)g_1\left(\frac{\nu g_2}{g_1}\mathrm{sh}g_1x_1 + \mathrm{ch}g_1x_1\right)}, \tag{3.69}$$

при условиях схемы на рис. 3.3, *б*

$$\gamma = \frac{e^{-g_2(\xi_1-x_1)} - e^{-g_2(\xi_2-x_1)}}{g_2(\xi_2-\xi)_1\left(\frac{\nu g_2}{g_1}\mathrm{sh}g_1x_1 + \mathrm{ch}g_1x_1\right)}. \tag{3.70}$$

3.3. СХЕМЫ ПЛАСТОВ-ПОЛОС

Ниже рассматриваются характеристики редукции поверхностного стока в условиях схем пластов-полос (см. рис. 2.10): пласта-полосы с двумя границами питания (*а*) и пласта-полосы с разнородными границами (*б*). Как отмечалось выше, характеристики редукции в условиях однородных пластов с параллельными прямолинейными границами одинаковы для условий отбора подземных вод одиночными водозаборами и линейными водозаборами, параллельными границам. Поэтому для исследования соответствующих зависимостей, отвечающих условиям одиночного водозабора, отстоящего от реки на расстоянии d, или условиям параллельного реке линейного водозабора, находящегося на таком же от нее расстоянии, достаточно исследовать одномерную схему фильтрации.

Рассмотрим одномерную схему фильтрации, соответствующую условиям пласта-полосы с двумя границами питания. Поскольку область фильтрации является ограниченной, для исследования характеристик редукции можно воспользоваться результатами, приведенными в 1.1. При водоотборе, сосредоточенном на расстоянии $\bar{d}$ от левой границы питания, функция $f(\bar{x})$ имеет вид $\delta(\bar{x}-\bar{d})$; поэтому по формуле (1.94) коэффициенты χ_k имеют выражение $\chi_k = e_k(\bar{d})$. В условиях настоящей схемы, уже рассматривавшейся в 2.3, выражения для собственных элементов были получены в виде (2.72); в соответствии с этими равенствами находим коэффициент α_k в виде (1.130)

$$\alpha_k = \sqrt{2}\cdot\pi k,$$

а коэффициент C_k – в виде (1.133)

$$C_k = \frac{2\pi k \cdot \sin k\pi \bar{d}}{\pi^2 k^2 + \chi^2}. \tag{3.71}$$

Сумма коэффициентов C_k согласно формуле (1.132), даст величину предельной относительной редукции по отношению к левой границе γ_1. Соответствующий ряд в рассматриваемых условиях суммируется, причем [48]

$$\gamma_1 = \frac{\mathrm{sh}(\chi - \chi_1)}{\mathrm{sh}\,\chi}, \tag{3.72}$$

где $\chi = gL$, $\chi_1 = gd$. Аналогично предельная относительная редукция по отношению к правой границе имеет вид

$$\gamma_2 = \frac{\mathrm{sh}\,\chi_1}{\mathrm{sh}\,\chi}. \tag{3.73}$$

Их сумма равна общей величине предельной относительной редукции, а именно

$$\gamma = \frac{\mathrm{ch}\left(\chi_1 - \frac{\chi}{2}\right)}{\mathrm{ch}\,\frac{\chi}{2}}. \tag{3.74}$$

На рис. 3.4 приведены графики суммарной предельной относительной редукции. При отстутствии компенсационного питания величина предельной относительной редукции γ_1 по отношению к левой границе питания равна $1 - \bar{d}$; по отношению к правой она равна $\bar{d}$; суммарная величина, очевидно, будет равна единице. Функция относительной редукции в общем случае зависит от трех безразмерных параметров: времени $\bar{t}$, расстояния $\bar{d}$ и параметра компенсационного питания, что делает табулирование этой зависимости затруднительным; значения функции $w_0(t)$ для частного случая $g = 0$ приведены в табл. 18.

Значения функции относительной интегральной редукции (по отношению к правой границе питания), определенные по формуле (1.138) для условий отсутствия компенсационного питания, приведены в табл. 19. Величина асимптотического коэффициента v_0 (1.139) в общем случае оказывается равной

$$v_0 = \frac{\bar{d}\,\mathrm{sh}\,\chi \cdot \mathrm{ch}(\chi - \chi_1) - \mathrm{sh}\,\chi_1}{2\chi\,\mathrm{sh}^2\chi}, \tag{3.75}$$

а при отсутствии компенсационного питания

$$v_0 = \frac{\bar{d}}{6}(1 - \bar{d})(2 - \bar{d}). \tag{3.76}$$

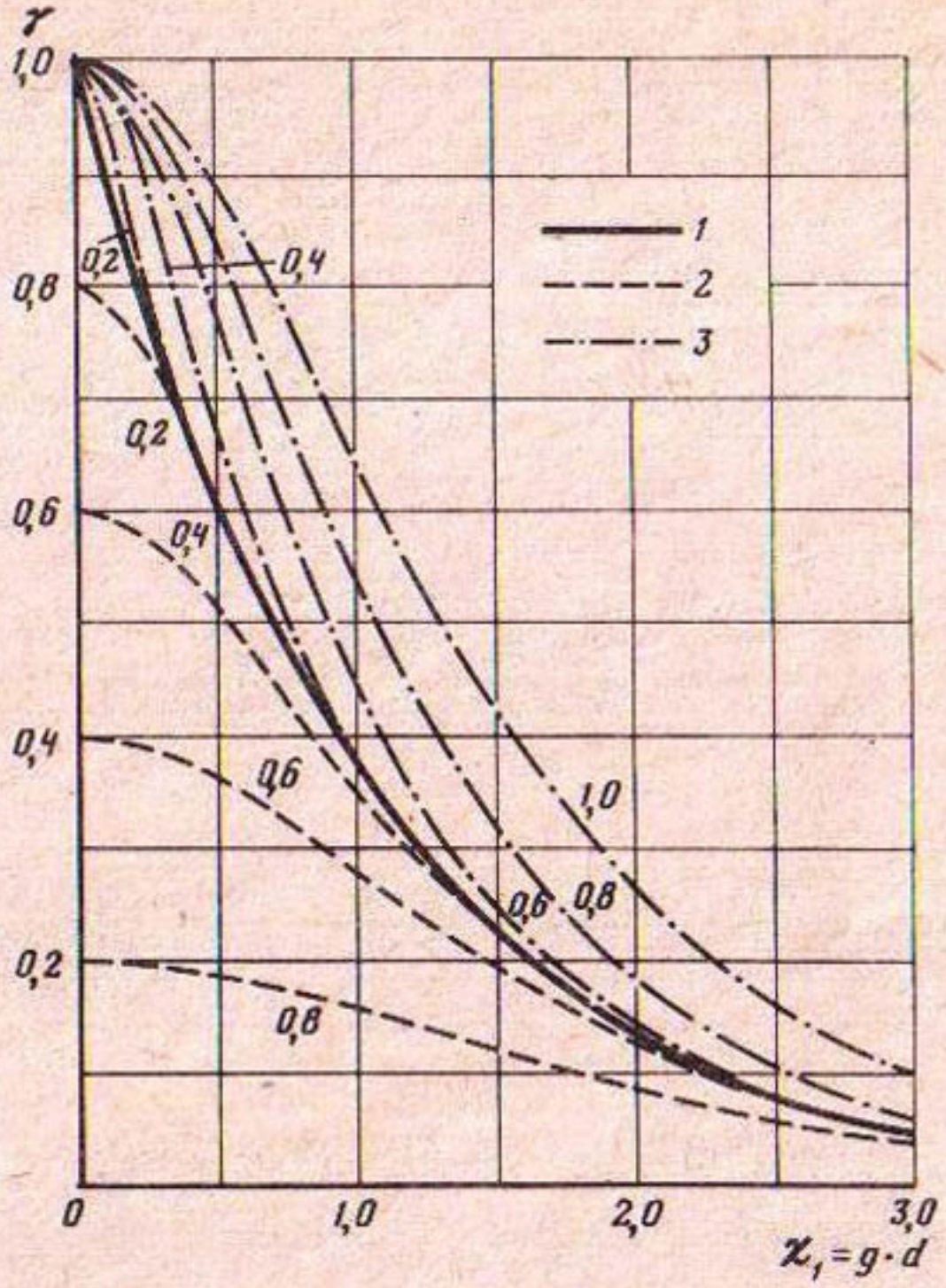
Аналогично рассматривается и схема пласта-полосы с разнородными границами; выражения для собственных элементов оператора фильтра-

Таблица 18

Значения функции относительной редукции для условий пласта-полосы с границами питания

$\bar{t}$	$\bar{d}=0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,10	0,8321	0,6547	0,5022	0,3707	0,2628	0,1779	0,1139	0,0663	0,0303
0,12	0,8382	0,6829	0,5398	0,4131	0,3052	0,2164	0,1451	0,0882	0,0415
0,14	0,8499	0,7048	0,5695	0,4472	0,3401	0,2487	0,1719	0,1072	0,0513
0,16	0,8591	0,7223	0,5933	0,4748	0,3688	0,2755	0,1944	0,1234	0,0598
0,18	0,8666	0,7364	0,6126	0,4974	0,3923	0,2977	0,2131	0,1369	0,0669
0,20	0,8726	0,7479	0,6283	0,5158	0,4116	0,3160	0,2286	0,1481	0,0727
0,25	0,8833	0,7683	0,6563	0,5487	0,4460	0,3487	0,2563	0,1683	0,0833
0,30	0,8898	0,7806	0,6733	0,5687	0,4670	0,3687	0,2733	0,1806	0,0898
0,35	0,8938	0,7882	0,6837	0,5809	0,4799	0,3809	0,2837	0,1882	0,0938
0,40	0,8962	0,7928	0,6901	0,5883	0,4887	0,3883	0,2901	0,1928	0,0962
0,45	0,8977	0,7956	0,6939	0,5929	0,4925	0,3929	0,2939	0,1956	0,0986
0,50	0,8986	0,7973	0,6963	0,5956	0,4954	0,3956	0,2963	0,1973	0,0986
∞	0,9000	0,8000	0,7000	0,6000	0,5000	0,4000	0,3000	0,2000	0,1000

Примечание. При $t \leqslant 0,10$ значения w_0 могут быть определены по формуле $w_0 = \operatorname{erfc} \bar{d}/2\sqrt{\bar{t}}$.



Р и с. 3.4. Графики зависимости величины предельного относительного сокращения расхода реки от параметра компенсационного питания в условиях однородного полуограниченного пласта (*1*), пласта-полосы с двумя границами питания (*2*) и пласта-полосы с разнородными границами (*3*)

Цифры у кривых – значения $\bar{d} = d/L$

ции для этого случая определяются формулами (2.73), величины коэффициентов C_k

$$C_k = \pi\cdot(2k-1)\frac{\cos\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\bar{d}}{\pi^2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\chi^2}; \qquad (3.77)$$

выражение для предельной относительной редукции в условиях компенсационного питания имеет вид

$$\gamma = \frac{\mathrm{ch}(\chi-\chi_1)}{\mathrm{ch}\chi}. \qquad (3.78)$$

График зависимости γ от параметра компенсационного питания приведен на рис. 3.4. Значения функции предельной относительной редукции в условиях отсутствия компенсационного питания сведены в табл. 20. Функция относительной интегральной редукции, как и в предыдущем случае, описывается формулой (1.138), причем коэффициент υ_0 имеет в

Таблица 19

Значения функции относительной редукции для условий пласта-полосы с разнородными границами

$\bar{t}$	$\bar{d}=0{,}1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,10	0,8231	0,6547	0,5025	0,3714	0,2646	0,1816	0,1132	0,0810	0,0508
0,12	0,8383	0,6834	0,5409	0,4153	0,3099	0,2250	0,1610	0,1168	0,0825
0,14	0,8504	0,7061	0,5721	0,4522	0,3495	0,2650	0,1990	0,1539	0,1176
0,16	0,8602	0,7250	0,5986	0,4842	0,3936	0,3022	0,2375	0,1912	0,1543
0,18	0,8687	0,7413	0,6218	0,5126	0,4172	0,3369	0,2736	0,2279	0,1912
0,20	0,8761	0,7557	0,6422	0,5383	0,4470	0,3696	0,3082	0,2637	0,2277
0,25	0,8918	0,7863	0,6865	0,5946	0,5132	0,4437	0,3881	0,3476	0,3146
0,30	0,9050	0,8119	0,7237	0,6425	0,5703	0,5085	0,4589	0,4227	0,3932
0,35	0,9159	0,8339	0,7561	0,6843	0,6204	0,5657	0,5217	0,4896	0,4634
0,40	0,9258	0,8532	0,7845	0,7210	0,6646	0,6161	0,5772	0,5487	0,5255
0,45	0,9344	0,8703	0,8095	0,7534	0,7034	0,6606	0,6262	0,6010	0,5805
0,50	0,9420	0,8854	0,8317	0,7821	0,7378	0,7001	0,6696	0,6474	0,6292
0,60	0,9547	0,9105	0,8685	0,8297	0,7952	0,7656	0,7419	0,7245	0,7103
0,70	0,9646	0,9300	0,8972	0,8669	0,8399	0,8169	0,7983	0,7847	0,7736
0,80	0,9723	0,9453	0,9197	0,8960	0,8749	0,8569	0,8424	0,8318	0,8232
0,90	0,9784	0,9573	0,9373	0,9188	0,9023	0,8882	0,8769	0,8686	0,8619
1,00	0,9831	0,9666	0,9510	0,9365	0,9237	0,9127	0,9038	0,8973	0,8920
1,20	0,9897	0,9796	0,9701	0,9612	0,9534	0,9466	0,9412	0,9372	0,9340
1,40	0,9937	0,9876	0,9817	0,9764	0,9716	0,9675	0,9641	0,9617	0,9598
1,60	0,9962	0,9924	0,9888	0,9856	0,9826	0,9801	0,9781	0,9766	0,9754
1,80	0,9976	0,9954	0,9932	0,9912	0,9894	0,9878	0,9866	0,9857	0,9850
2,00	0,9986	0,9972	0,9958	0,9946	0,9935	0,9926	0,9918	0,9913	0,9908

Примечание. При $t \leqslant 0{,}10$ значение w_0 может быть определено по формуле $w_0(t) \approx \operatorname{erfc}(d/2\sqrt{t})$.

Таблица 20

Значения функции интегральной относительной редукции для условий пласта-полосы с границами питания

$\bar{t}$	$\bar{d}$ = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,10	0,6902	0,4627	0,3010	0,1894	0,1154	0,0676	0,0381	0,0198	0,0083
0,12	0,7137	0,4972	0,3378	0,2233	0,1436	0,0889	0,0536	0,0294	0,0132
0,14	0,7323	0,5251	0,3686	0,2528	0,1693	0,1100	0,0686	0,0394	0,0178
0,16	0,7476	0,5488	0,3954	0,2790	0,1925	0,1290	0,0829	0,0488	0,0225
0,18	0,7604	0,5690	0,4185	0,3021	0,2134	0,1465	0,0963	0,0579	0,0270
0,20	0,7713	0,5863	0,4388	0,3226	0,2323	0,1626	0,1088	0,0663	0,0313
0,25	0,7927	0,6209	0,4797	0,3648	0,2719	0,1968	0,1357	0,0849	0,0408
0,30	0,8084	0,6465	0,5107	0,3972	0,2961	0,2239	0,1573	0,0999	0,0484
0,35	0,8204	0,6663	0,5347	0,4227	0,3273	0,2434	0,1747	0,1120	0,0547
0,40	0,8297	0,6818	0,5538	0,4430	0,3469	0,2630	0,1888	0,1218	0,0597
0,45	0,8372	0,6943	0,5691	0,4594	0,3628	0,2772	0,2003	0,1299	0,0639
0,50	0,8433	0,7045	0,5818	0,4729	0,3759	0,2889	0,2098	0,1365	0,0673
∞	0,9000	0,8000	0,7000	0,6000	0,5000	0,4000	0,3000	0,2000	0,1000

Примечание. При $t \leqslant 0{,}10$ значения функции $v(t)$ могут быть вычислены по формуле $v(t) = 4i^2\mathrm{erfc}\,\frac{\bar{d}}{2\sqrt{\bar{t}}}$; при $\bar{t} \geqslant 0.5$ справедлива асимптотическая формула $v(t) \approx 1-\bar{d} - \frac{\bar{d}}{6\,\bar{t}}(1-\bar{d})\,(2-\bar{d})$.

Таблица 21

Значения функции интегральной относительной редукции для условий пласта-полосы с разнородными границами

$\bar{t}$	$\bar{d}$ = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,10	0,6900	0,4631	0,3012	0,1894	0,1156	0,0675	0,0424	0,0225	0,0109
0,12	0,7135	0,4975	0,3380	0,2236	0,1443	0,0903	0,0562	0,0352	0,0202
0,14	0,7323	0,5257	0,3693	0,2537	0,1708	0,1106	0,0740	0,0496	0,0316
0,16	0,7477	0,5495	0,3963	0,2805	0,1953	0,1338	0,0920	0,0669	0,0446
0,18	0,7607	0,5699	0,4202	0,3048	0,2183	0,1546	0,1103	0,0811	0,0590
0,20	0,7713	0,5869	0,4413	0,3269	0,2397	0,1745	0,1284	0,0975	0,0740
0,25	0,7942	0,6243	0,4860	0,3749	0,2878	0,2210	0,1724	0,1392	0,1134
0,30	0,8116	0,6536	0,5226	0,4157	0,3302	0,2637	0,2144	0,1804	0,1537
0,35	0,8258	0,6778	0,5537	0,4511	0,3681	0,3028	0,2539	0,2198	0,1930
0,40	0,8377	0,6986	0,5808	0,4826	0,4025	0,3389	0,2909	0,2573	0,2308
0,45	0,8479	0,7168	0,6049	0,5110	0,4339	0,3723	0,3256	0,2927	0,2667
0,50	0,8570	0,7329	0,6265	0,5366	0,4625	0,4031	0,3578	0,3258	0,3005
0,60	0,8723	0,7605	0,6638	0,5817	0,5134	0,4583	0,4160	0,3861	0,3523
0,70	0,8848	0,7834	0,6952	0,6199	0,5570	0,5060	0,4668	0,4389	0,4168
0,80	0,8953	0,8027	0,7219	0,6527	0,5946	0,5475	0,5111	0,4852	0,4646
0,90	0,9042	0,8192	0,7449	0,6810	0,6273	0,5837	0,5499	0,5258	0,5067
1,00	0,9118	0,8335	0,7649	0,7057	0,6559	0,6154	0,5840	0,5616	0,5438
1,20	0,9243	0,8569	0,7976	0,7464	0,7033	0,6680	0,6407	0,6212	0,6056
1,40	0,9340	0,8750	0,8231	0,7782	0,7404	0,7094	0,6854	0,6682	0,6545
1,60	0,9416	0,8894	0,8435	0,8037	0,7700	0,7425	0,7112	0,7059	0,6937
1,80	0,9478	0,9010	0,8599	0,8242	0,7941	0,7694	0,7502	0,7366	0,7256
2,00	0,9528	09106	0,8733	0,8411	0,8138	0,7915	0,7742	0,7618	0,7519

Примечание. При $\bar{t} \leqslant 0{,}1$ значения функции $v(t)$ могут быть вычислены по формуле $v(t) \approx 4i^2\mathrm{erfc}\,\dfrac{\bar{d}}{2\sqrt{\bar{t}}}$; при $\bar{t} \geqslant 2{,}0$ – по формуле $v(t) \approx 1 - \dfrac{\bar{d}}{2t}(2-\bar{d})$.

общих условиях выражение

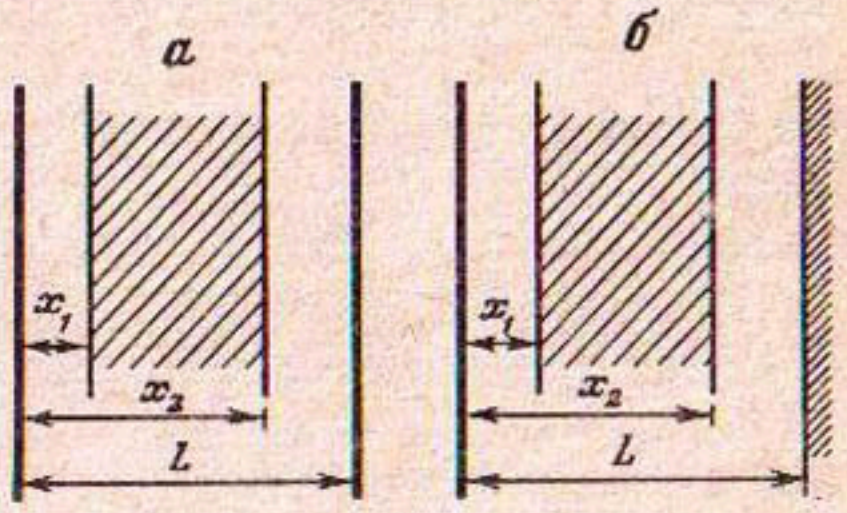
$$v_0 = \frac{\mathrm{sh}\chi_1 + \bar{d}\,\mathrm{sh}(\chi - \chi_1)\mathrm{ch}\chi}{2\chi\,\mathrm{ch}^2\chi}, \tag{3.79}$$

а при отсутствии компенсационного питания

$$v_0 = \frac{\bar{d}}{2}(2 - \bar{d}). \tag{3.80}$$

Значения функции относительной интегральной редукции при отсутствии компенсационного питания приведены в табл. 21.

Если отбор подземных вод ведется площадным водозабором, имеющим форму полосы с границами, параллельными границам питания



Р и с. 3.5. Схемы площадного водоотбора в условиях пластов-полос с двумя границами питания (*а*) и с разнородными границами (*б*)
Полоса водоотбора заштрихована

(рис. 3.5, *а, б*), то в случае пласта-полосы с границами питания функция относительной редукции по отношению к левой границе может быть представлена в виде

$$w_0(t) = \gamma_1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi^2 + \chi^2} \frac{\cos k\pi\bar{x}_1 - \cos k\pi\bar{x}_2}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} e^{-\lambda_k \bar{t}}, \tag{3.81}$$

где

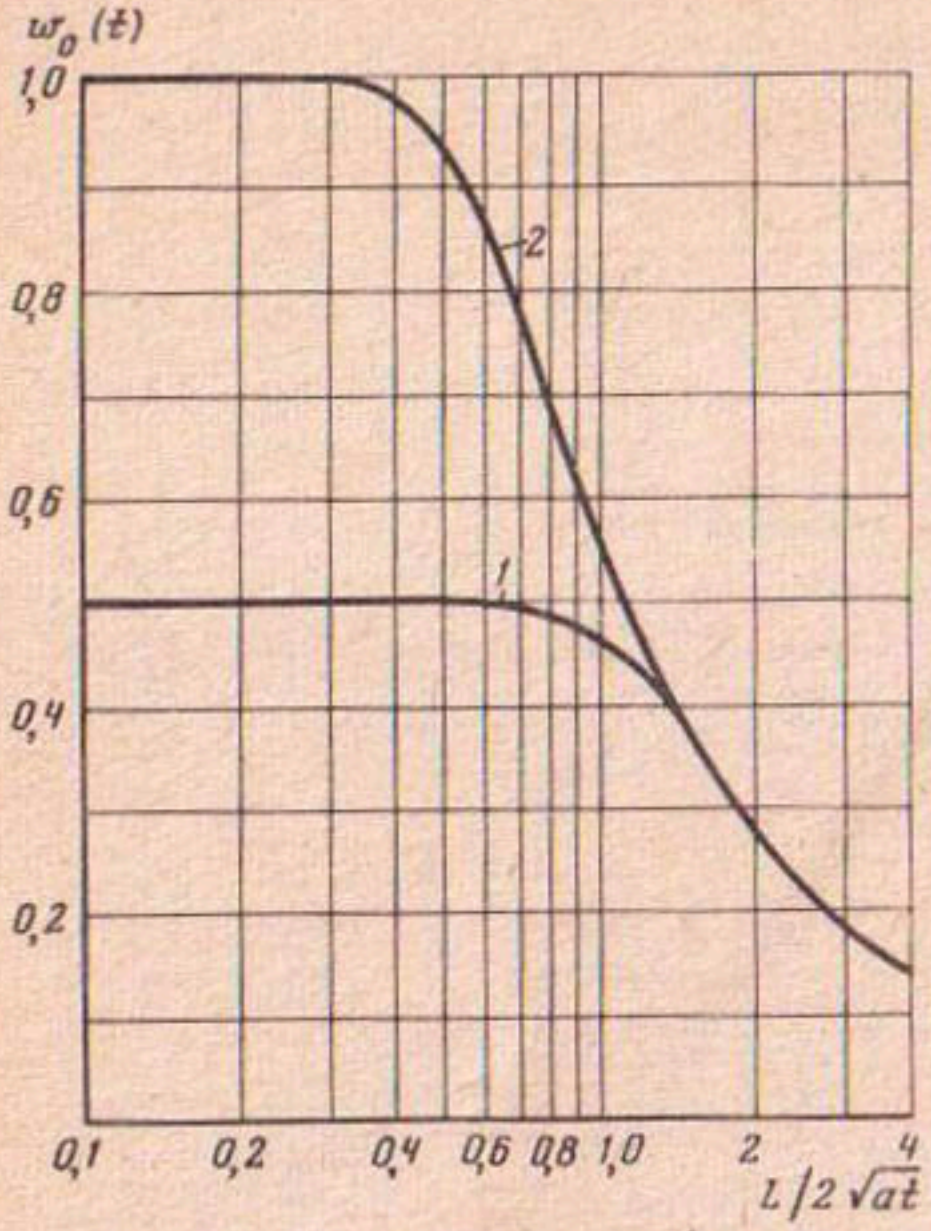
$$\gamma_1 = \frac{2\mathrm{sh}\chi \dfrac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{2} \mathrm{sh}\chi\left(1 - \dfrac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2}\right)}{\chi\,\mathrm{sh}\chi(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}. \tag{3.82}$$

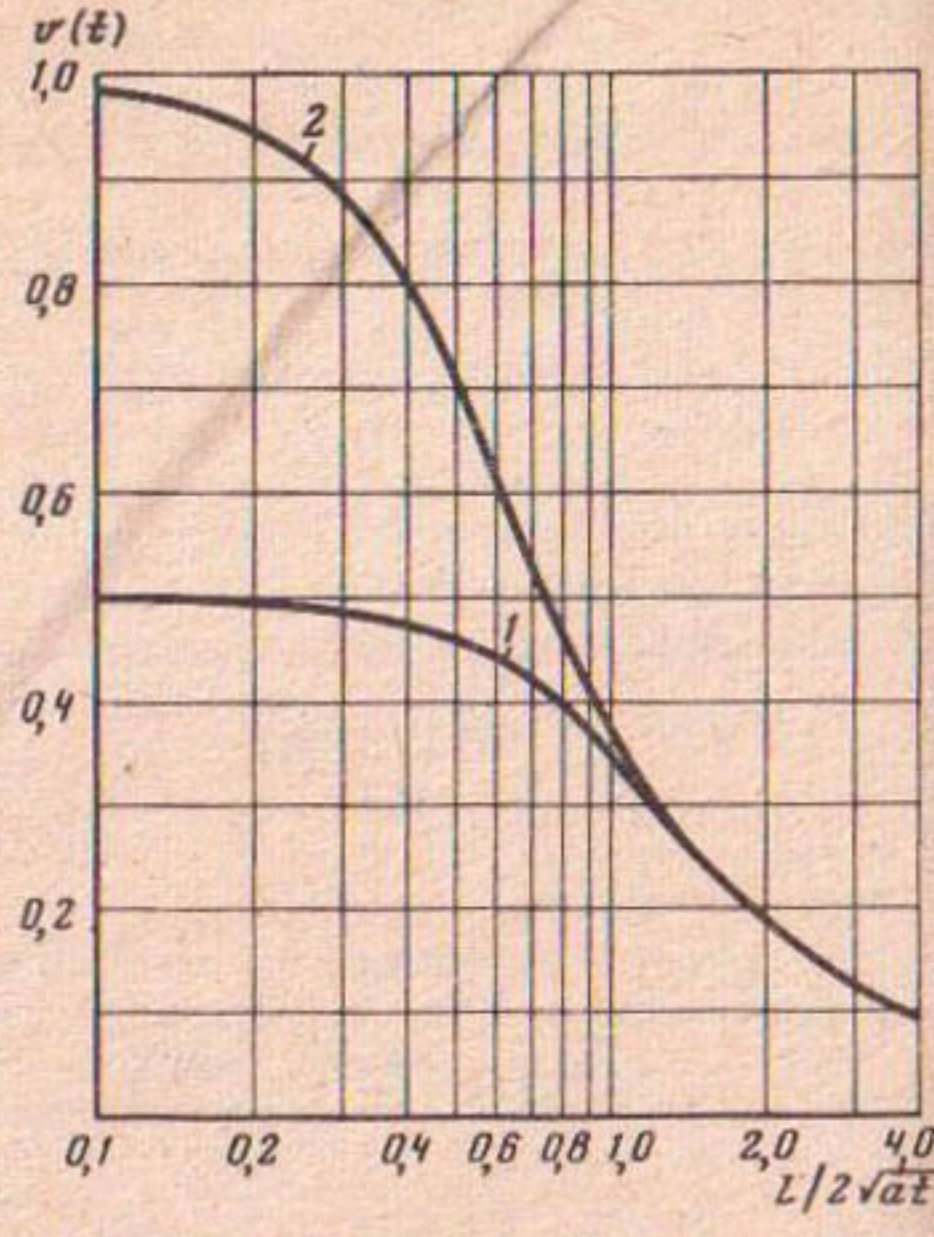
В частном случае, когда компенсационное питание отсутствует, предельная относительная редукция по отношению к левой границе становится равной

$$\gamma_1 = 1 - \frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2}. \tag{3.83}$$

Если полоса водоотбора занимает всю область фильтрации, то $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $\gamma_1 = 0{,}5$. Графики функции относительной редукции для этого случая приведены на рис. 3.6, *а*. На рис. 3.7 приведены графики функций относительной интегральной редукции для тех же условий (т.е. когда компенсационное питание отсутствует, а площадной водоотбор занимает всю полосу, составляющую область фильтрации).

Аналогично рассматриваются условия площадного отбора в условиях пласта-полосы с разнородными границами (рис. 3.5, *б*). При этом, как легко убедиться, проведя необходимые выкладки, предельная относительная





Р и с. 3.6. Графики временны́х зависимостей функции относительной редукции в условиях, когда площадной водозабор занимает всю полосу

1 – случай пласта-полосы с двумя границами питания; *2* – случай пласта-полосы с разнородными границами

Р и с. 3.7. Графики временны́х зависимостей функции относительной интегральной редукции в условиях площадного водозабора, занимающего всю территорию пласта-полосы

1 – с двумя границами питания; *2* – с разнородными границами

редукция имеет выражение вида (3.84)

$$\gamma = \frac{1}{2\chi \operatorname{ch} \chi(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)} \left[\operatorname{sh} 2\chi(1-\bar{x}_1) - \operatorname{sh} 2\chi(1-\bar{x}_2)\right]; \qquad (3.84)$$

при отсутствии компенсационного питания это выражение упрощается, как и должно быть, до вида

$$\gamma = 1. \qquad (3.85)$$

На рис. 3.6 приведен график временно́й зависимости функции относительной редукции для условий, когда компенсационное питание отсутствует, а область водоотбора занимает всю область фильтрации; на рис. 3.7 приведен соответствующий этим же условиям график временно́й зависимости относительной интегральной редукции.

Глава 4

ОЦЕНКА ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ ИХ ОТБОРА

Периодический режим отбора подземных вод характерен для условий их использования в орошении. При гидрогеологических расчетах водозаборов подземных вод ирригационного назначения традиционно использовались способы, связанные с представлением расчетного графика водоотбора в ступенчатом виде [6, 31, 41, 59], причем реакция геофильтрационной системы на возмущение такого вида находится с помощью принципа суперпозиции, сложением реакций от влияния каждой из ступеней в отдельности.

Очевидно, ступенчатый график водоотбора идеализирован и служит исключительно для удобства проведения расчетов с использованием гидравлических сопротивлений. Известны модификации, упрощающие применение указанного способа [30, 31]. Можно представить себе, что в каждом отдельно взятом году форма графика водоотбора действительно может приближаться к ступенчатой, однако от года к году как величины, так и сроки начала и конца каждой ступени подвержены в любых природно-хозяйственных условиях случайным колебаниям, обусловленным многочисленными естественными и эксплуатационными факторами. Поэтому в отличие от существующей практики расчетов производительности водозаборов на основе детерминированного графика дебита, соответствующего характерному режиму отбора подземных вод в многолетнем разрезе, раздельный учет усредненного гидрографа их отбора и его случайных колебаний в отдельные годы должен приводить к более обоснованной оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод.

Усредненный график отбора подземных вод, понимаемый как средний по ряду конкретных лет, т.е. как математическое ожидание, имеет при этом сглаженный характер, что связано со случайными вариациями начал и концов каждой ступени. Как известно, эффективным средством описания гладких временных периодических зависимостей служат разложения в тригонометрические ряды Фурье [29]. Методы такого анализа периодических природных и технических процессов широко применяются [2, 29, 51]. Использование рядов Фурье по сравнению с методом ступенчатых гидрографов дает ряд преимуществ:

1) сокращается объем необходимых вычислений, особенно если требуется только расчет характерных (экстремальных) величин реакций геофильтрационных систем на периодическое возмущение;

2) облегчается теоретический анализ получаемых зависимостей от отдельных факторов и параметров;

3) малозначимые локальные особенности и случайные помехи, содержащиеся в получаемых на практике гидрографах водоотбора, в существенной степени локализуются в обертонах разложения и при отбрасывании последних исключаются.

Разложение периодической временной зависимости водоотбора было

приведено в главе 1 в виде (1.56). Сходимость этого ряда, т.е. характер убывания величин коэффициентов Q_n при возрастании номера гармоники n, связана с характеристиками гладкости функции $Q(t)$ [29]. Вследствие того что, как указывалось выше, реальные среднемноголетние графики водоотбора характеризуются достаточно высокой гладкостью, основную информацию об изменении величины водоотбора во времени несут первые две–четыре гармоники разложения (1.56). Гармоники высших порядков вследствие сравнимости величин их амплитуд с величинами погрешностей информации о режиме водоотбора недостоверны, а их роль в формировании значений функции $Q(t)$ невелика, поэтому гармоники выше третьего–четвертого порядка могут быть исключены из рассмотрения.

Поскольку число дней в году практически совпадает с количеством градусов в периоде тригонометрических функций (360°), представляется удобной градусная мера углов; один градус угловой меры при этом практически эквивалентен одним суткам. С учетом этого замечания расчетная зависимость величины отбора подземных вод от времени может быть представлена в виде

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{n=1}^{N} Q_n \cos(nt - \varphi_n), \qquad (4.1)$$

где N – число учитываемых гармоник; время измеряется в сутках, а фазовые углы φ_n – в градусах.

При оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод в условиях периодического режима водоотбора встречаются задачи двух типов: 1) известен график водоотбора; требуется установить, будет ли максимальное значение понижения уровня (напора) подземных вод превышать предельно допустимое в последний год из расчетных лет; 2) задана форма графика водоотбора, т.е. график отношений его значений к среднегодовому; требуется определить величину среднегодового дебита водозаборов, при котором максимальное понижение в последний год из расчетных лет равно предельно допустимому.

В главе 1 (1.2) обосновывается представление временной зависимости понижения в виде суммы апериодической и периодической компонент. Рассмотрим периодическую компоненту понижения, определяемую формулой (1.57). Так как $S_p(M, t)$ – периодическая функция времени, существует такое значение $t = t_m$ ($0 \leqslant t_m \leqslant \tau = 365$ сут), при котором компонента $S_p(M, t)$ достигает своего наибольшего значения S_{pm}:

$$S_{pm} = \sum_{n=1}^{N} R_n(M) \frac{Q_n}{T} \cos(nt_m - \varphi_n - \Psi_n(M)). \qquad (4.2)$$

Апериодическая составляющая по сравнению с периодической изменяется медленно, поэтому можно считать, что наибольшее значение понижения каждый год приходится на одну и ту же дату, а именно соответствующую значению t_m. При этом сумма

$$S_m^{(v)} = S_0^{(v)} + S_{pm}$$

представляет собой оценку наибольшего понижения в ν-й год эксплуатации; $S_0^{(\nu)} = S_0((\nu-1)\tau + t_m)$ – значение апериодической составляющей понижения в ν-й год на дату, соответствующую времени t_m. Для решения первой из поставленных задач, таким образом, необходимо сравнить величины $S_m^{(\nu)}$ и $S_{доп}$ – предельно допустимое понижение уровня (напора) подземных вод.

Для решения второй из задач представим (4.2) в виде

$$S_{pm} = \frac{Q_0}{T} R_{pm}, \tag{4.3}$$

где

$$R_{pm} = \sum_{n=1}^{N} R_n(M)\,\bar{Q}_n \cos(n t_m - \varphi_n - \Psi_n(M)), \quad \bar{Q}_n = Q_n/Q_0. \tag{4.4}$$

В соответствии с формулой (1.55) суммарная величина максимального понижения в ν-й год может быть

$$S_m^{(\nu)} = \frac{Q_0}{T} R_m^{(\nu)}, \tag{4.5}$$

где

$$R_m^{(\nu)} = R_0((\nu-1)\tau + t_m) + R_{pm}. \tag{4.6}$$

Для решения второй из сформулированных задач, таким образом, получаем формулу

$$Q_0 = \frac{T S_{доп}}{R_m^{(\nu)}}. \tag{4.7}$$

Ниже рассматриваются методы гармонического анализа графиков водоотбора (т.е. методы вычисления параметров Q_n и φ_n) и особенности формирования периодического эксплуатационного режима подземных вод в некоторых конкретных гидрогеологических условиях.

4.1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГИДРОГРАФА ВОДООТБОРА

Вычисление характеристик разложения (4.1) – величин Q_n и φ_n – для конкретных графиков водоотбора может основываться на многочисленных методах практического гармонического анализа [29, 51]. Поскольку в большинстве случаев задание среднемесячных значений величины водоотбора представляет собой достаточно детальную характеристику режима водопотребления, предлагается способ определения величин Q_n и φ_n, аналогичный известным схемам К. Рунге [29, 51] и получивший название "схемы среднемесячных значений". При расчетах по этой схеме значения среднемесячных величин водоотбора $Q_j^*(1 \leqslant j \leqslant 12)$ выписываются в порядке, показанном в табл. 22. После этого над образовавшимися парами значений производят сложения и вычитания, результаты которых – соответственно величины u_j и v_j – выписываются в последующие графы

Таблица 22

Схема среднемесячных значений для определения коэффициентов Фурье

Определение первичных сумм и разности

	Q_1^*	Q_2^*	Q_3^*	Q_4^*	Q_5^*	Q_6^*
	Q_{12}^*	Q_{11}^*	Q_{10}^*	Q_9^*	Q_8^*	Q_7^*
Суммы	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
Разности	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6

Определение вторичных сумм и разностей

	u_1	u_2	u_3
	u_6	u_5	u_4
Суммы	Σ_1	Σ_2	Σ_3
Разности	Δ_1	Δ_2	Δ_3

	v_1	v_2	v_3
	v_6	v_5	v_4
Суммы	σ_1	σ_2	σ_3
Разности	δ_1	δ_2	δ_3

расчетной таблицы. После выполнения над ними последовательных сложений и вычитаний находят величины $\Sigma_j, \Delta_j, \sigma_j, \delta_j$, на основании которых вычисляются коэффициенты разложения (4.1) Фурье Q_0, Q'_n, Q''_n:

$$Q_0 = \frac{1}{12}(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3),$$

$$\begin{aligned}
Q'_1 &= 0{,}1592\,\Delta_1 + 0{,}1165\,\Delta_2 + 0{,}0427\,\Delta_3;\\
Q'_2 &= 0{,}1378\,(\Sigma_1 - \Sigma_3);\\
Q'_3 &= 0{,}1061\,(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3);\\
Q'_4 &= 0{,}0689\,(\Sigma_1 - 2\,\Sigma_2 + \Sigma_3);\\
Q''_1 &= 0{,}0427\,\sigma_1 + 0{,}1165\,\sigma_2 + 0{,}1592\,\sigma_3;\\
Q''_2 &= 0{,}0796\,(\delta_1 + 2\,\delta_2 + \delta_3);\\
Q''_3 &= 0{,}1061\,(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3);\\
Q''_4 &= 0{,}1194\,(\delta_1 - \delta_3).
\end{aligned} \qquad (4.8)$$

Амплитуды и фазовые углы разложения (4.1) определяются как модули и аргументы комплексов $Q'_n + iQ''_n$ (i – мнимая единица):

$$Q_n = \sqrt{Q_n'^2 + Q_n''^2},$$

$$\varphi_n = \begin{cases} \operatorname{arctg} Q''_n/Q'_n, & \text{если } Q'_n \geqslant 0 \\ 180^\circ + \operatorname{arctg} Q''_n/Q'_n, & \text{если } Q'_n < 0. \end{cases} \qquad (4.9)$$

Пример 1. Определение параметров разложения (4.1) по схеме среднемесячных значений. Величины Q_j^* в условиях примера приведены в

Таблица 23

Значения среднемесячных величин отбора подземных вод в условиях примера, м³/с

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1,20	0,00	1,11	4,81	8,11	9,52	9,69	9,14	8,15	6,88	5,23	3,29

Таблица 24

Схемы среднемесячных значений для условий примера

Первичные схемы и разности

1,20	0,00	1,11	4,81	8,11	9,52	
3,29	5,23	6,88	8,15	9,14	9,69	
4,49	5,23	7,99	12,96	17,25	19,21	Суммы (u_j)
−2,09	−5,23	−5,77	−3,34	−1,03	−0,17	Разности (v_j)

Вторичные суммы и разности

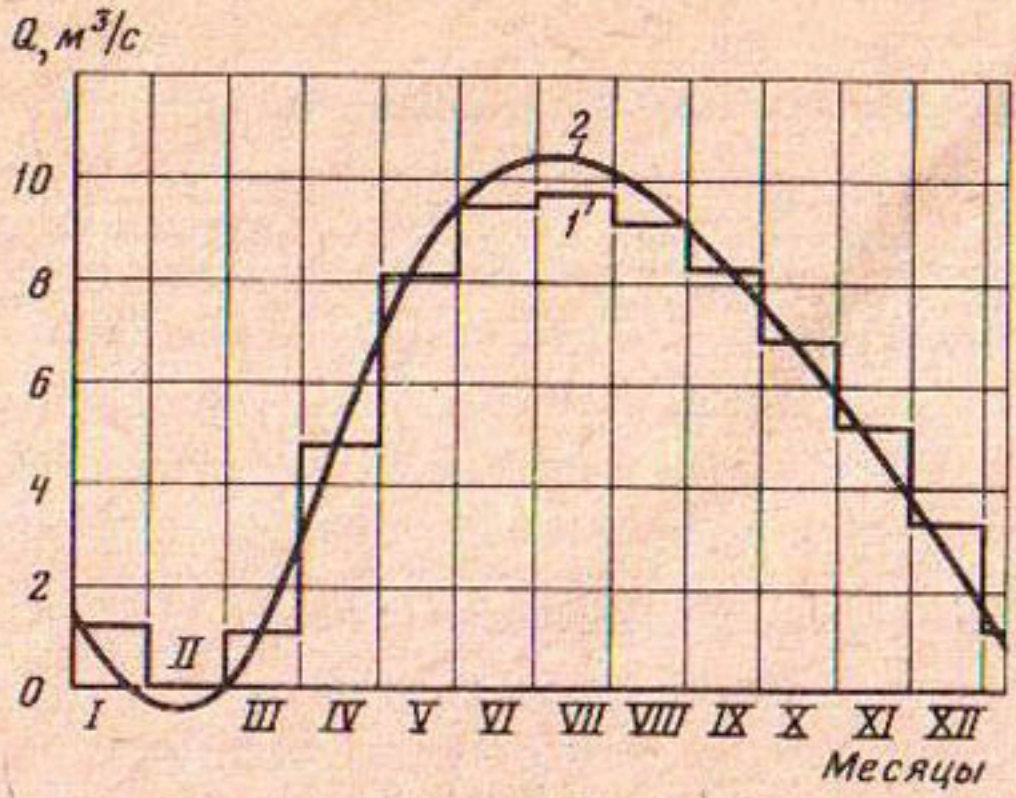
	4,49	5,23	7,99	−2,09	−5,23	−5,77	
	19,21	17,25	12,96	−0,17	−1,03	−3,37	
Суммы (Σ_j)	23,70	22,48	20,95	−2,26	−6,26	−9,11	Суммы (σ_j)
Разности (Δ_j)	−14,72	−12,02	−4,97	−1,92	−4,20	−2,43	Разности (δ_j)

Таблица 25

Значения коэффициентов Фурье, амплитуд и фазовых углов гармоник по условиям примера 1

n	0	1	2	3	4
Q'_n, м³/с	–	−4,64	0,38	0,24	0,002
Q''_n, м³/с	–	−2,28	−1,02	0,006	0,006
Q_n, м³/с	5,59	5,17	1,08	0,24	0,007
φ^0_n	–	206	290	1	71

табл. 23, а расчеты по схеме среднемесячных значений – в табл. 24. Значения коэффициентов Фурье, найденные с помощью подстановки величин Σ_j, Δ_j, σ_j, δ_j в формулы (4.2), приведены в табл. 25. В этой же таблице даны значения амплитуд гармоник и фазовых углов, вычисленные по формулам (4.3). На рис. 4.1 приведены графики среднемесячных значений водоотбора и его приближения разложением (4.1), в котором удержаны три гармоники. Степень приближения исходного ступенчатого графика вполне достаточная; увеличение расчетных значений водоотбо-



Р и с. 4.1. Графики среднемесячных значений величины водоотбора по данным примера 1 (кривая *1*) и его приближение разложением (4.1) с учетом трех первых гармоник (кривая *2*)

ра по второму графику отразится в небольшом увеличении расчетных значений понижения, что улучшает надежность расчета. Небольшие отрицательные значения расчетной величины водоотбора в феврале, как будет показано в последующих примерах с использованием этого графика, практически не отражаются на расчетных значениях понижения.

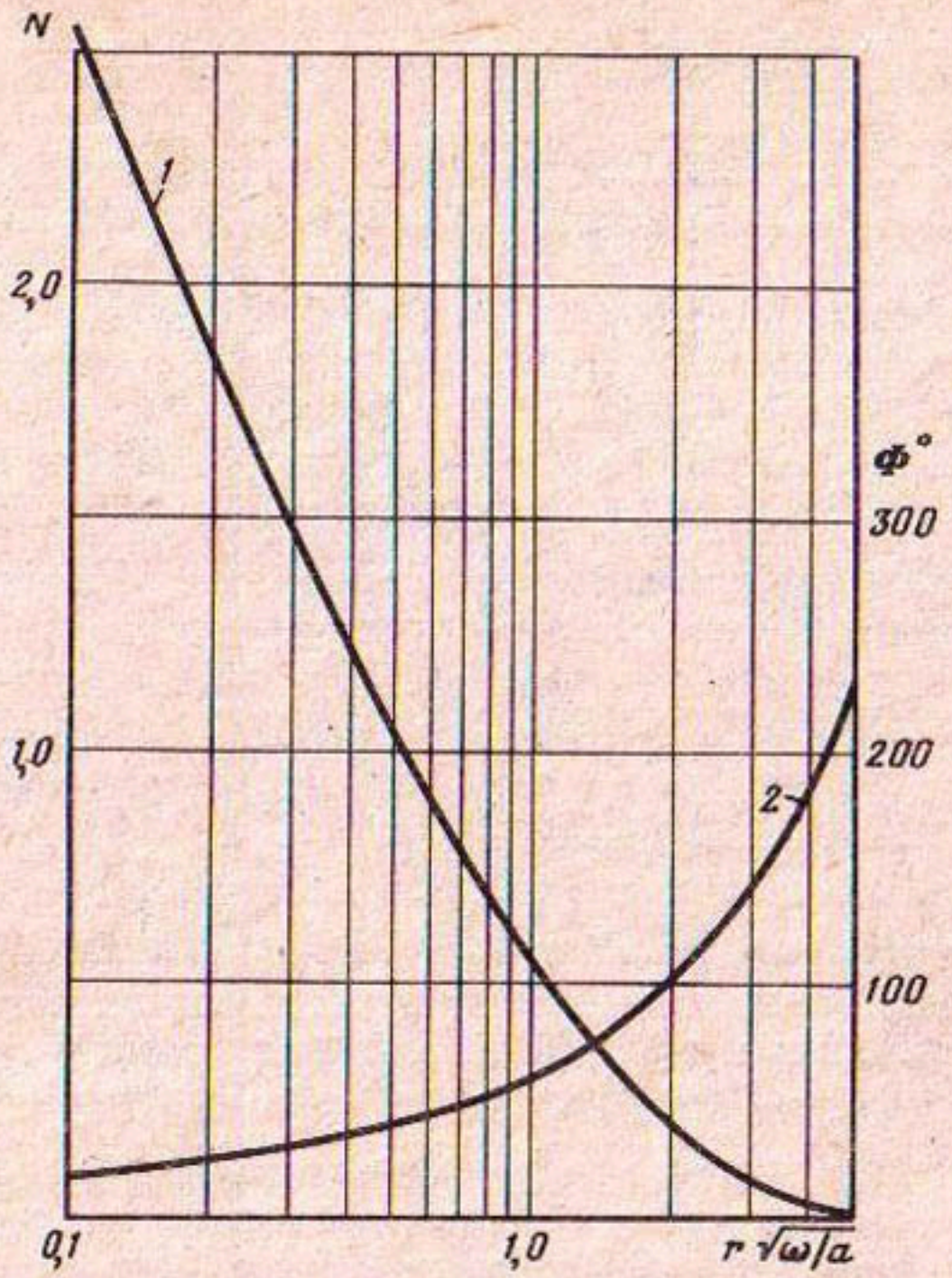
4.2. РАСЧЕТ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПОНИЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОГРАНИЧЕННОГО ОДНОРОДНОГО ПЛАСТА

Как указывалось в 1.4, реакция геофильтрационной системы водозабор–водоносный пласт может быть представлена в виде (1.54), где расчет апериодической составляющей $S_0(M, t)$ описан в главе 2 настоящей работы; переходная компонента, как показывает анализ, весьма быстро затухает (не позже, чем в первые один–три года эксплуатации), и, таким образом, основной задачей расчета эксплуатационных ресурсов подземных вод при периодическом режиме водоотбора является, помимо рассмотренной в главе 2 апериодической составляющей понижения, определение периодических компонент понижения. Как указывалось в 1.4, эта задача сводится к определению гармонических сопротивлений и фазовых сдвигов в выражении (1.57), что приводит, в свою очередь, к задаче по нахождению частотных характеристик геофильтрационных систем. Общее выражение для частотной характеристики представляет собой формула (1.57).

В наиболее простом случае эксплуатации подземных вод неограниченного однородного водоносного пласта одиночным водозабором при отсутствии компенсационного питания передаточная функция понижения определяется формулой (2.1). Подставляя $p = i\omega$ в это выражение, находим на основании определения функций Кельвина [52], что

$$R(M, \omega) = \frac{1}{2\pi} N\left(r\sqrt{\frac{\omega}{a}}\right); \quad \Psi(M, \omega) = \Phi\left(r\sqrt{\frac{\omega}{a}}\right), \tag{4.10}$$

где $N(z)$ и $\Phi(z)$ – модуль и взятый с противоположным знаком аргумент зависимостей $N(z)$ и $\Phi(z)$ – приводятся на рис. 4.2.



Р и с. 4.2. Графики зависимостей $N(z)$ (кривая *1*) и $\Phi(z)$ (кривая *2*), $z = r\sqrt{\omega/a}$

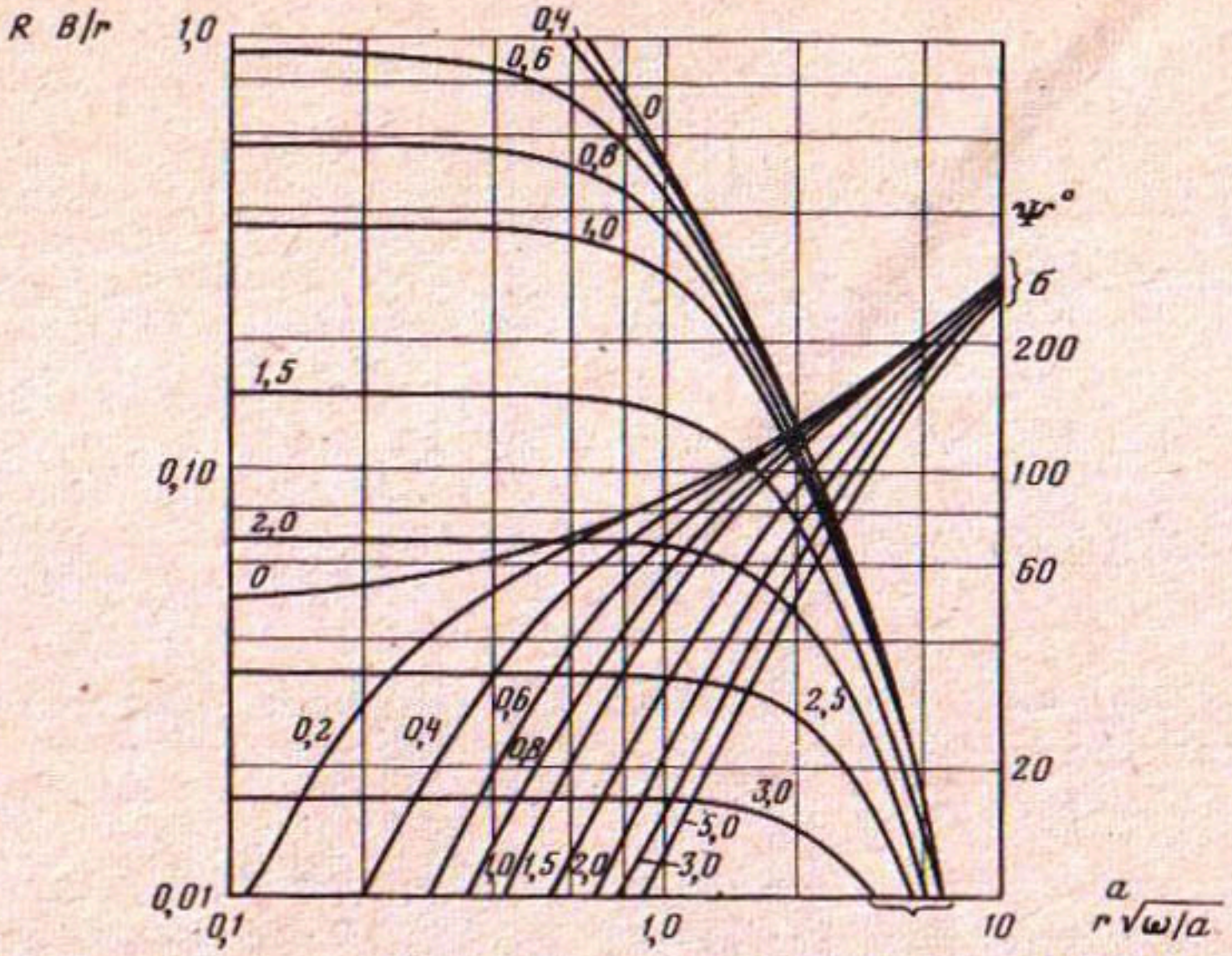
Крупный обзор подземных вод для целей орошения осуществляется, как правило, не одиночными водозаборами, а линейными или площадочными системами скважин. Рассмотрим случай отбора подземных вод однородного пласта линейной системы скважин неограниченной протяженности. При выводе расчетных соотношений учтем возможное влияние важного фактора, оказывающего стабилизирующее воздействие на изменения величины понижения подземных вод, а именно компенсационного питания эксплуатируемого горизонта.

Выражение передаточной функции понижения для этих условий имеет вид (2.6), а соответствующее гидравлическое сопротивление выражается формулой (2.8). Подставляя $p = i\omega$ в формулу (2.6) и производя алгебраические преобразования, находим частотные характеристики понижения в точке M, удаленной от линии водоотбора на расстояние r в виде

$$R(M, \omega) = \frac{r}{B} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\sqrt{z^4 + \chi^4} + \chi^2}{2}}}}{\sqrt[4]{z^4 + \chi^4}}, \tag{4.11}$$

$$\Psi(M, \omega) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{ag^2}, \tag{4.12}$$

где $z = r\sqrt{\frac{\omega}{a}}$; $\chi = gr$.



Р и с. 4.3. Графики частотных характеристик понижения в точке M неограниченного однородного водоносного пласта, эксплуатируемого протяженным линейным рядом скважины

а – амплитудные, *б* – фазовые. Числа у кривых – значения параметра $\chi = gr$

В частности, на самой линии водоотбора, т.е. при $r = 0$, предельный переход дает

$$R(M_0, \omega) = \frac{1}{2B \cdot \sqrt[4]{g^4 + \dfrac{\omega^2}{a^2}}} . \qquad (4.13)$$

$$\Psi(M_0, \omega) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\omega}{ag^2} . \qquad (4.14)$$

На рис. 4.3 изображены серии графиков зависимостей частотных характеристик рассматриваемой схемы от параметра $r\sqrt{\dfrac{\omega}{a}}$, характеризующего расстояние от точки M до линии водоотбора и частоту, и от параметра $\chi = gr$, характеризующего величину компенсационного эффекта. Графики амплитудно-частотных характеристик показывают, что при фиксированном значении компенсационного эффекта увеличение частоты первоначально влечет за собой лишь незначительное уменьшение амплитудно-частотной характеристики, и, таким образом, в этих условиях амплитуды первых гармоник не будут претерпевать уменьшения. В то же время фазы этих гармоник, как показывает анализ фазочастотных характеристик, значительно увеличиваются при увеличении частоты. Так, в характерных условиях, когда $g = 2 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$ и $a = 2 \cdot 10^4$ м^2/сут, для точки M, расположенной на расстоянии $r = 500$ м от водозабора, значения параметров

$r\sqrt{\frac{\omega}{a}}$ и χ равны соответственно 0,467 и 1,0. Значение амплитудно-частотной характеристики согласно формуле (2) равно $R = (500/20000)\,0{,}362 = 0{,}0036$ (принято, что $B = 20$ км). Значение фазовой характеристики составляет при этом $\Psi = 12^\circ, 4$; на частоте второй гармоники параметра $r\sqrt{\frac{\omega}{a}}$ становится равной 0,66; по формулам (4.11), (4.12) значения частотных характеристик равны: $R = 0{,}0034$ и $\Psi = 24^\circ$. На частоте третьей гармоники соответственно $R = 0{,}0032$ и $\Psi = 34^\circ, 5$. Таким образом, величина амплитуды второй гармоники уменьшится в 1,06 раза, третьей – в 1,12 раза по сравнению с амплитудой первой гармоники. Для точки, расположенной в полукилометре от водозабора, в условиях отсутствия компенсационного питания на частоте первой гармоники получим: $R = 0{,}0154$ и $\Psi = 63^\circ, 9$; на частоте второй гармоники $R = 0{,}0095$ и $\Psi = 71^\circ, 8$.

Другая важная особенность частотных характеристик рассматриваемой схемы, устанавливаемая с помощью анализа рис. 4.3 и формул (4.12) и (4.14), – наличие ненулевого фазового сдвига между водоотбором и понижением непосредственно в точках на линии водоотбора. Формула (4.14) указывает на уменьшение величины этого сдвига при увеличении компенсационного эффекта; в условиях отсутствия компенсационного питания эта величина максимальна и составляет 45°, что соответствует полуторамесячному сдвигу по времени. Физический смысл указанного явления, а также способы его оценки и практическое значение в различных условиях рассматриваются в п. 4.4.

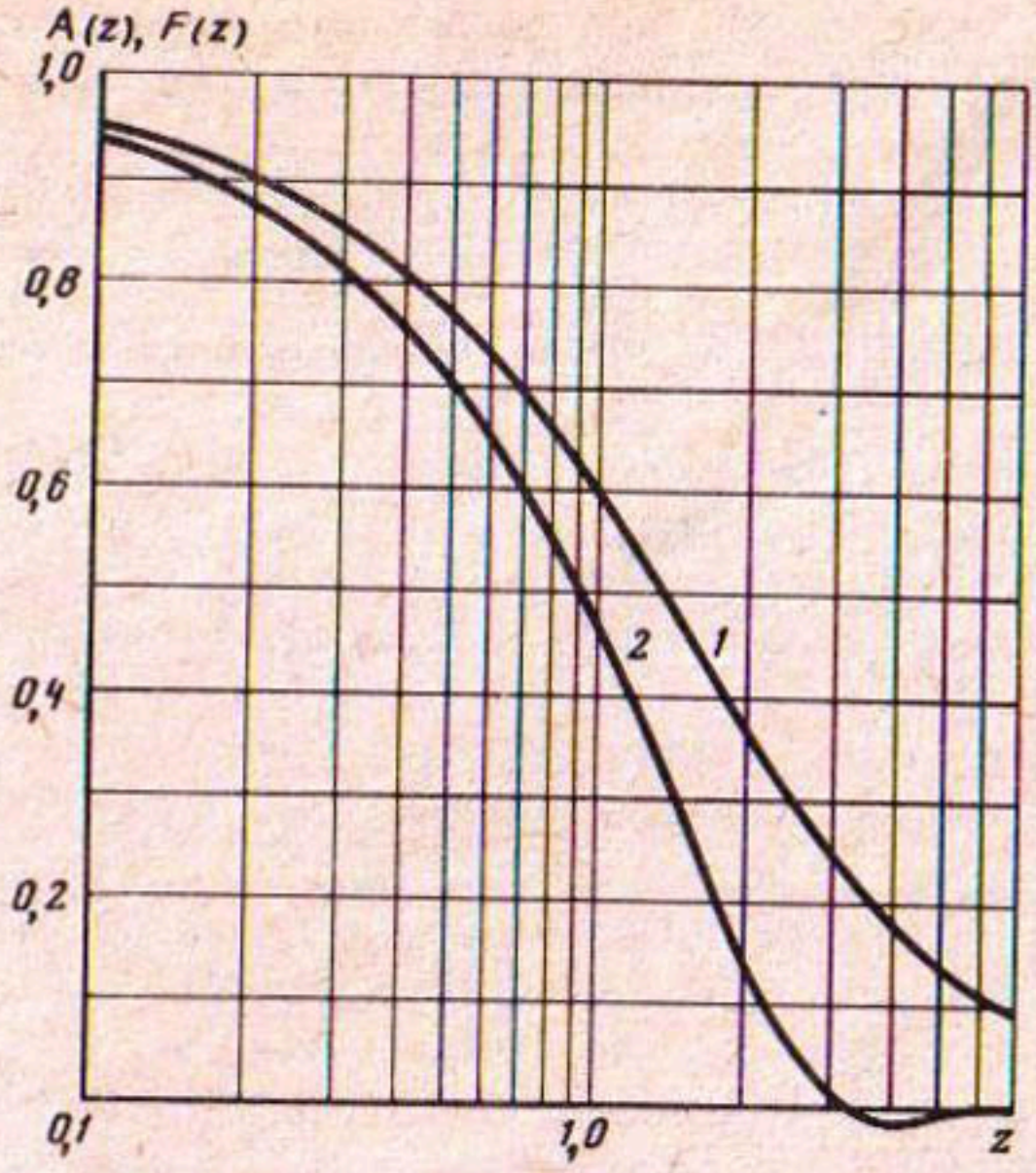
Рассмотрим условия отбора подземных вод неограниченного однородного водоносного горизонта площадной системой скважин, равномерно распределенной в полосе шириной $2d$ (и протяженностью B). Выражение для передаточной функции понижения в любой точке области фильтрации дается для этих условий формулой (2.11). Если подставить в нее $p = i\omega$, будут получены выражения для частотных характеристик понижения в любой точке области. Эти выражения, однако, отличаются значительной громоздкостью, поэтому представляется целесообразным ограничиться здесь исследованием только частотных характеристик при отсутствии компенсационного питания и для точки в центре водозабора, т.е. при $x = 0$. Подстановка $p = i\omega$ и выполнение алгебраических преобразований приводят при этом к следующим соотношениям:

$$R(M_0, \omega) = \frac{1}{4B\sqrt{\frac{\omega}{a}}} A\left(d\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right), \tag{4.15}$$

$$\Psi(M_0, \omega) = 45^\circ\left[2 - F\left(d\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)\right], \tag{4.16}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A(z) &= z^{-1}\sqrt{\frac{1}{2}(1 - 2e^{-z}\cos z + e^{-2z})}, \\ F(z) &= \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sin z}{e^z - \cos z}. \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$



Р и с. 4.4. Графики функций $A(z)$ (кривая *1*), $F(z)$ (кривая *2*)

Значения функций $A(z)$, $F(z)$ приведены в табл. 26. При $z < 0{,}1$ с точностью до третьего знака справедливы приближения

$$A(z) \approx \sqrt{1 - z};\quad F(z) \approx 1 - \frac{2z}{\pi}; \tag{4.18}$$

при $z > 5$

$$A(z) \approx \frac{1}{z\sqrt{2}};\quad F(z) \approx 0. \tag{4.19}$$

Графики зависимостей $A(z)$, $F(z)$ представлены на рис. 4.4.

Из формул (4.11) и (4.15) следует, что при $g = 0$ функция $A\left(d\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)$ представляет собой удвоенное отношение амплитудно-частотной характеристики понижения для точки, находящейся в центре площадного водозабора, к амплитудно-частотной характеристике понижения для точки, находящейся на линии линейного водозабора значительной протяженности. Поэтому анализ графика функции $A(z)$ на рис. 4.4 позволяет заключить, что условия прохождения колебательного возмущения через геофильтрационную систему с площадным водозабором, вообще говоря, худшие, чем при отборе подземных вод линейным рядом скважин. Так, при $d = 2000$ м и $a = 10^4$ м^2/сут на основной частоте колебаний параметр $d\sqrt{\frac{\omega}{2a}}$ равен 1,868, и по графику на рис. 4.4 заключаем, что амплитуда колебаний понижения в центре водозабора составит менее 40% амплитуды в схеме с линейным водозабором. Фазовая характеристика, начинающаяся

при малых α от значения 45°, при росте этого параметра увеличивается до 90°, что соответствует трехмесячному отставанию пиковых значений понижения от максимума расхода водоотбора (на частоте основных колебаний).

4.3. СХЕМА ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ПЛАСТА С КОНТУРОМ ПИТАНИЯ

Для того чтобы получить частотные характеристики схемы полуограниченного водоносного пласта при различных условиях водоотбора (одиночного, линейного, площадного), воспользуемся выражениями передаточных функций понижения (рис. 2.7, *а, б, в*), а именно формулами (2.42), (2.47), (2.52). Подставляя в них $p = i\omega$ и осуществляя алгебраические преобразования, находим частотные характеристики понижения при отборе подземных вод одиночным водозабором в виде

$$R(M, \omega) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\ker z - \ker\frac{z}{\alpha}\right)^2 + \left(\mathrm{kei}\, z - \mathrm{kei}\frac{z}{\alpha}\right)^2}, \tag{4.20}$$

$$\Psi(M, \omega) = \operatorname{arctg}\frac{\mathrm{kei}\,\frac{z}{\alpha} - \mathrm{kei}\, z}{\ker\frac{z}{\alpha} - \ker z}. \tag{4.21}$$

где $\ker z$, $\mathrm{kei}\, z$ – функция Кельвина [52]; $\alpha = r/\rho$; $z = r\sqrt{\frac{\omega}{a}}$, r – расстояние от точки M до центра водозабора; ρ – расстояние от точки M до его зеркального отражения относительно реки. При определении частотных характеристик понижения на самом водозаборе члены формул (4.20), (4.21), содержащие аргумент z и аргумент z/α, как правило, равноправны: значения функций Кельвина от (z/α) в этом случае будут значительно меньшими по абсолютной величине, чем значения этих функций от аргумента z. Физически это означает, что на частоте основных колебаний (с годовым периодом) влияние границы питания чувствуется точками в окрестности водозабора только в случае, если он весьма близок к границе питания, что случается сравнительно редко. Поэтому для определения частотных характеристик на самом водозаборе в большинстве случаев можно пользоваться формулами (4.10), относящимися к условиям неограниченного пласта.

Для условий отбора подземных вод линейным водозабором, параллельным границе и отстоящим от нее на расстоянии d, частотные характеристики понижения в точке M на водозаборе определяются выражениями

$$R(M_0, \omega) = \frac{d}{2B}\, A\left(d\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right),$$

$$\Psi(M_0, \omega) = 45^\circ\left[1 - F\left(d\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)\right], \tag{4.22}$$

где функции $A(z)$, $F(z)$ определены равенствами (4.17).

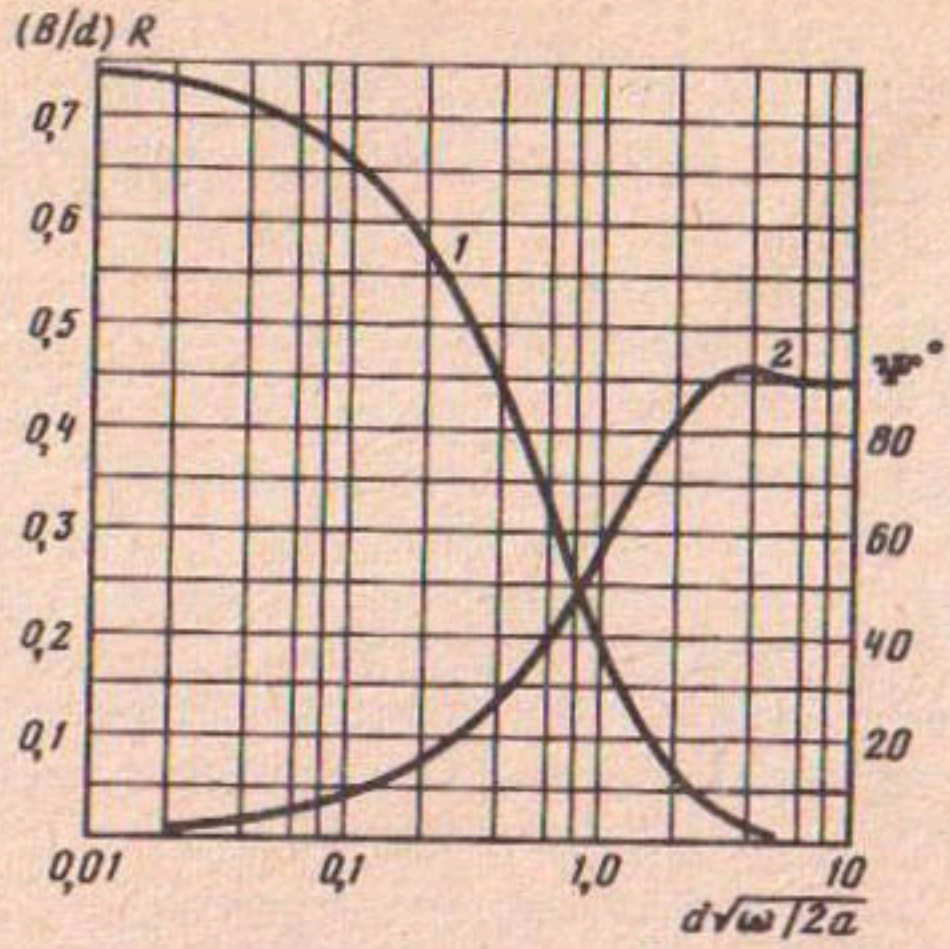


Рис. 4.5. Графики частотных характеристик понижения в середине полосы водоотбора при эксплуатации подземных вод полуограниченного однородного пласта полосовой площадной системой скважин

1 – амплитудная; *2* – фазовая

Для условий отбора подземных вод в полуограниченном пласте площадным водозабором, представляющим собой полосу, одна из сторон которой совпадает с границей питания, а другая параллельна ей и отстоит от нее на расстоянии $2d$, передаточная функция понижения в точке M полосы определена выражением (2.55). Как отмечалось в 2.2, точка максимального понижения при отборе подземных вод площадным водозабором в процессе эксплуатации перемещается от середины полосы отбора к дальнему от границы питания краю. Поскольку период основных колебаний равен одному году, что в большинстве случаев может считаться малым по сравнению с общим сроком эксплуатации, можно предположить, что использование в расчетах эксплуатационных ресурсов подземных вод частотных характеристик, соответствующих точке в середине полосы отбора, приве-

Таблица 26

Значения функций $A(z)$ и $F(z)$

z	$A(z)$	$F(z)$	z	$A(z)$	$F(z)$
0,1	0,9512	0,9374	1,1	0,5781	0,4280
0,2	0,9048	0,8769	1,2	0,5504	0,3887
0,3	0,8607	0,8186	1,3	0,5241	0,3514
0,4	0,8188	0,7623	1,4	0,4992	0,3163
0,5	0,7789	0,7082	1,5	0,4757	0,2832
0,6	0,7410	0,6562	1,6	0,4534	0,2521
0,7	0,7049	0,6064	1,7	0,4324	0,2230
0,8	0,6707	0,5586	1,8	0,4125	0,1960
0,9	0,6382	0,5130	1,9	0,3937	0,1709
1,0	0,6074	0,4694	2,0	0,3760	0,1477

дет к занижению расчетных ресурсов, т.е. послужит созданию запаса надежности расчета. Поэтому в настоящей работе приводятся только сведения о частотных характеристиках понижения в середине полосы водоотбора. Эти характеристики имеют выражения

$$R(M_0, \omega) = \frac{1}{2B\sqrt{\frac{\omega}{a}}} A\left(d\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right), \tag{4.23}$$

$$\Psi(M_0, \omega) = 45^\circ\left[2 - F\left(d\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)\right], \tag{4.24}$$

где $z = d\sqrt{\frac{\omega}{2a}}$.

Графики частотных характеристик понижения в середине полосы отбора изображены на рис. 4.5.

4.4. ОСОБЕННОСТИ РЕЖИМА ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ УРОВНЯ (НАПОРА) ПОДЗЕМНЫХ ВОД ПРИ ИХ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ОТБОРЕ

С точки зрения практических гидрогеологических расчетов при периодическом водоотборе, помимо определения общего понижения уровня, представляют интерес оценка выраженности внутригодового хода понижения в районе водозаборов и временной сдвиг между пиковыми значениями возмущения на выходе геофильтрационной системы периодического водоотбора и ее реакции – понижения.

В качестве характеристики внутригодового изменения понижения уровня подземных вод целесообразно принять отношение максимального значения понижения к среднегодовому. Поскольку роль второй и более высоких гармоник в формировании пика понижения относительно невелика, а амплитуда первой гармоники графика водоотбора близка к его сред-

z	$A(z)$	$F(z)$	z	$A(z)$	$F(z)$
2,1	0,3593	0,1263	3,2	0,2300	0,0029
2,2	0,3436	0,1068	3,4	0,2147	0,0105
2,3	0,3288	0,0891	3,6	0,2012	0,0150
2,4	0,3149	0,0730	3,8	0,1894	0,0171
2,5	0,3018	0,0586	4,0	0,1789	0,0174
2,6	0,2895	0,0458	4,2	0,1696	0,0165
2,7	0,2779	0,0345	4,4	0,1613	0,0148
2,8	0,2671	0,0245	4,6	0,1539	0,0127
2,9	0,2569	0,0159	4,8	0,1472	0,0104
3,0	0,2473	0,0085	5,0	0,1412	0,0082

негодовому значению, в качестве меры выраженности внутригодового изменения понижения может быть принят параметр $R_1(M)/R_0(M, t)$, где $R_0(M, t)$ – гидравлическое сопротивление схемы, характеризующее ее отклик на постоянный водотбор; $R_1(M)$ – гармоническое сопротивление на частоте первой гармоники.

На характеристику выраженности внутригодового хода понижения оказывают влияние практически все природные и хозяйственные факторы, определяющие движение подземных вод. Одни из них усиливают выраженность колебаний понижения, другие – сглаживают их.

Рассмотрим влияние границы постоянного напора и компенсационного питания на выраженность внутригодового хода понижения уровня подземных вод.

Графики зависимости величины отношения R_1/R_0 для условий схемы с границей постоянного уровня от параметров t/τ (времени эксплуатации, выраженного в годах) и $d/\sqrt{a\tau}$ изображены на рис. 4.6. Анализ этих графиков свидетельствует о том, что степень проявления внутригодовых колебаний понижения в рассматриваемых условиях оказывается существенной лишь при небольших значениях расстояния между рекой и водозабором. Так, для выполнения условия $R_1/R_0 > 0{,}25$ при $t = 50$ лет должно выдерживаться неравенство $d/\sqrt{a\tau} \leqslant 0{,}9$, которое при характерном значении $a = 10^4$ м^2/сут равнозначно неравенству $d \leqslant 1720$ м. При увеличении расстояния между водозабором и рекой величина отношения R_1/R_0 быстро уменьшается и при $d \geqslant 5$ км составляет не более 0,06.

Влияние границы постоянного напора на режим эксплуатационных колебаний уровня подземных вод можно проиллюстрировать приведенным ниже примером.

Пример 1. Однородный водоносный горизонт в долине реки эксплуатируется для целей орошения линейным водозабором протяженностью $B = 40\,000$ м; компенсационное питание отсутствует ($g = 0$), фильтрационные параметры горизонта следующие: $T = 500$ м^2/сут, $a = 4000$ м^2/сут. График водоотбора соответствует условиям, рассмотренным в примере в 4.1. Требуется определить влияние границы постоянного уровня (урез реки) на проявления внутригодового хода эксплуатационных колебаний понижения на линии водозабора в 50-й год его работы.

Зададимся каким-либо значением расстояния d между рекой и водозабором, например $d = 1000$ м. По формуле (2.28) определяем величину гидравлического сопротивления при $t = 50$ лет $= 18\,250$ сут:

$$R_0(M_0, t) = \frac{\sqrt{4000 \cdot 18\,250}}{40000}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \text{ierfc}\ \frac{1000}{\sqrt{4000 \cdot 18\,250}}\right) = 0{,}02335.$$

Значение апериодической составляющей понижения в 50-й год эксплуатации согласно формуле (1.55) будет равно

$$S_0(M_0, t) = \frac{5{,}59 \cdot 86\,400}{500}\ 0{,}02335 = 22{,}55\ \text{(м)}.$$

Задаваясь основной частотой колебаний $\omega_1 = 2\pi/360 = 0{,}01751$ сут$^{-1}$, вычисляем значение параметра $z = d\sqrt{\frac{\omega}{2a}}$, которое равно $z = 1000\sqrt{0{,}01721/2 \cdot 4000} =$

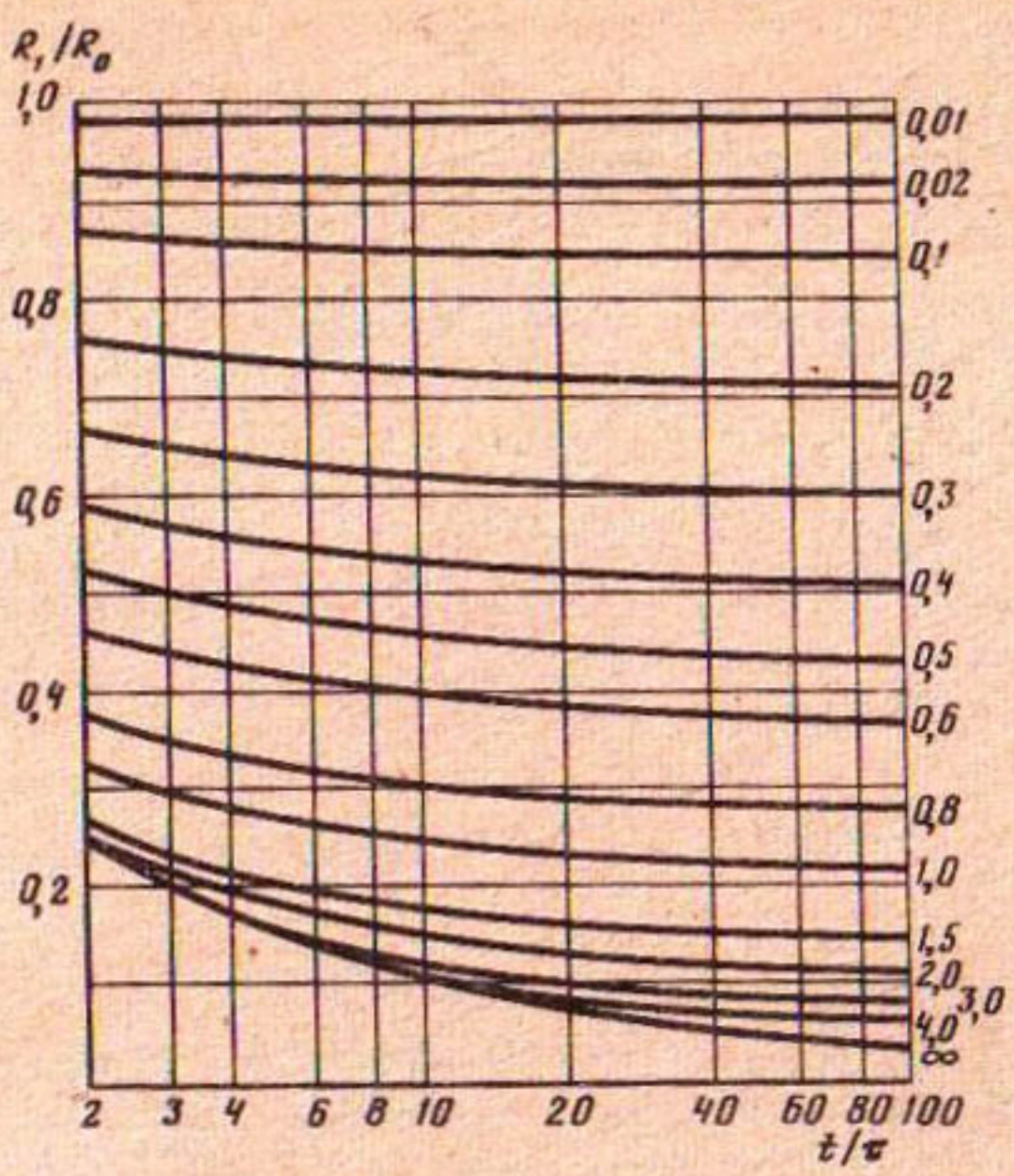


Рис. 4.6. Зависимость величины отношения R_1/R_0, характеризуещей степень выраженности колебаний понижения уровня подземных вод на линии водозабора в условиях влияния границы постоянного напора, от параметров t/τ (время эксплуатации в годах) и $d/\sqrt{a\tau}$

Числа у кривых – значения $d/\sqrt{a\tau}$

= 1,4667 и по формулам (4.22) с помощью табл. 27 находим значения частотных характеристик:

$$R(M_0, \omega_1) = R_1(M_0) = \frac{1000}{2 \cdot 40000} A(1{,}4667) = 0{,}00604,$$

$$\Psi(M_0, \omega_1) = \Psi_1(M_0) = 45^\circ [1 - F(1{,}4667)] = 32^\circ.$$

Согласно выражению (1.57) амплитуда первой гармоники понижения будет равна $(5.17 \cdot 86400/500)\,0{,}00604 = 5{,}40$ (м), а фазовый угол составит $206^\circ + 32^\circ = 238^\circ$. С помощью аналогичных расчетов на частотах последующих гармоник определяем соответствующие величины гармонических сопротивлений и фазовых сдвигов. Их значения приводятся в табл. 27. Определенное на основании формулы (1.57) выражение временной зависимости периодической составляющей понижения имеет вид (четвертая гармоника с амплитудой менее 1 см исключена):

$$S_p(M_0, t) = 5{,}40 \cos(t - 238^\circ) + 0{,}85 \cos(2t - 329^\circ) +$$

$$+ 0{,}15 \cos(3t - 44^\circ) \text{ (м)}.$$

На рис. 4.7 изображены графики временных зависимостей понижения на линии водозабора в 50-й год эксплуатации для четырех значений расстояния d. Если характеризовать степень выраженности проявления внутригодовых эксплуатационных колебаний понижения уровня подземных

Таблица 27

Значения гидравлического сопротивления, гармонических сопротивлений и фазовых сдвигов понижения в условиях примера

d, м	500	1000	1500	2000
R_0	0,01208	0,02335	0,03381	0,04346
R_1	0,00433	0,00604	0,00644	0,00640
R_2	0,00373	0,00454	0,00445	0,00430
R_3	0,00332	0,00371	0,00354	0,00347
R_4	0,00302	0,00317	0,00302	0,00300
Ψ_1^0	18	32	40	44
Ψ_2^0	25	39	45	46
Ψ_3^0	29	43	46	45
Ψ_4^0	32	44	46	45

вод величиной отношения максимального значения понижения к его среднегодовому значению S_{max}/S_0, то при $d = 500$ м эта величина составит 15,2/11,7 = 1,30. При $d = 2000$ м это отношение составляет 47,1/42,0 = 1,12, т.е. при отдалении линейного водозабора от контура совершенного питания степень выраженности внутригодовых колебаний понижения снижается.

Пример 2. Неограниченный однородный водоносный горизонт эксплуатируется для целей орошения линейным водозабором протяженностью $B = 40\,000$ м; фильтрационные параметры те же, что и в рассмотренном выше примере: $T = 500$ м^2/сут, $a = 4000$ м^2/сут. График водоотбора определен условиями примера п. 4.1 (параметры первых гармоник разложения в ряд Фурье в табл. 25). Требуется проследить влияние компенсационного питания (характеризуемого величиной компенсационного эффекта g) на проявления режима эксплуатационных колебаний понижения на линии водозабора в 50-й год работы.

Зададимся значением компенсационного эффекта: $g = 10^{-3}$ м$^{-1}$. По первой из формул (2.8) определяем величину гидравлического сопротивления при $t = 50$ лет = 18 250 сут:

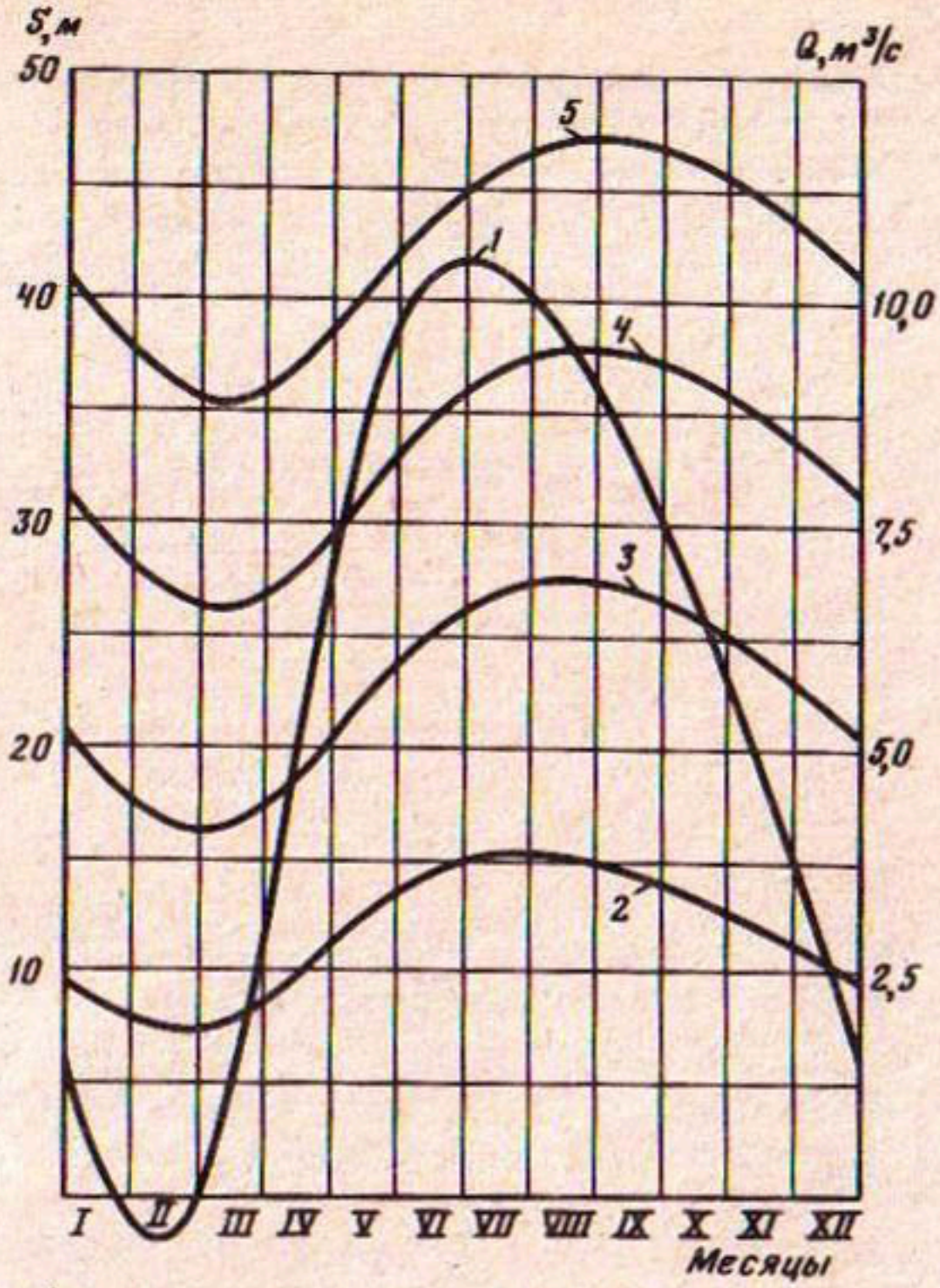
$$R_0(M_0, t) = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 40\,000} \operatorname{erf}(10^{-3}\sqrt{4000 \cdot 18250}) = 0{,}0124.$$

Значение апериодической составляющей понижения в 50-й год эксплуатации согласно формуле (1.55) составляет

$$S_0(M_0, t) = \frac{5{,}59 \cdot 86400}{500} 0{,}0125 = 12{,}07 \text{ (м)}.$$

На основной частоте колебаний $\omega = \omega_1$ значение параметра $\sigma = \omega/ag^2$ в формулах (4.23), (4.24) равно $\sigma = 0{,}01721/4000(10^{-3})^2 = 4{,}3025$; величина гармонического сопротивления на этой частоте составляет

$$R(M_0, \omega_1) = R_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 40\,000\sqrt[4]{1 + 4{,}3025^2}} = 0{,}00595,$$



Р и с. 4.7. Временны́е зависимости понижения на линии водозабора в условиях влияния границы постоянного уровня

1 – зависимость величины водоотбора от времени; *2–5* – зависимости понижения от времени при различных значениях расстояния между водозабором и урезом реки: *2* – d = 500 м, *3* – d = 1000 м, *4* – d = 1500 м, *5* – d = 2000 м

величина фазового сдвига –

$$\Psi(M_0, \omega_1) = \Psi_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 4{,}3025 = 38^\circ.$$

Амплитуда первой гармоники понижения согласно выражению (1.57) составит $(5{,}17 \cdot 86400/500)\,0{,}00595 = 5{,}32$ (м), фазовый угол – $206^\circ + 38^\circ = 244^\circ$.

Проводя аналогичные расчеты на частотах высших гармоник, определяем величины гармонических сопротивлений и фазовых сдвигов. Их значения приведены в табл. 28. Временны́е характеристики понижения в точке на линии водозабора в 50-й год эксплуатации, построенные по числовым параметрам табл. 28, изображены в виде графиков на рис. 4.8. Их анализ показывает, что с ростом величины компенсационного эффекта степень выраженности колебаний понижения возрастает. Так, если при $g = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$ отношение S_{max}/S_0 составляет 29,0/24,1 = 1,20, то при $g = 2 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$ величина этого отношения равна уже 10,2/6,0 = 1,69. Это позволяет сделать вывод о значительном влиянии компенсационного питания на внутригодовые колебания понижения уровня подземных вод.

Таблица 28

Значения гидравлического сопротивления, гармонических и фазовых сдвигов понижения в условиях примера

g, м$^{-1}$	$0{,}5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}
R_0	0,02500	0,01250	0,00625	0,00417	0,00313	0,00250	0,00125
R_1	0,00602	0,00595	0,00516	0,00396	0,00307	0,00248	0,00125
R_2	0,00426	0,00425	0,00406	0,00354	0,00293	0,00243	0,00125
R_3	0,00348	0,00347	0,00340	0,00315	0,00276	0,00236	0,00124
R_4	0,00301	0,00301	0,00297	0,00284	0,00258	0,00227	0,00124
Ψ_1^0	43	38	24	13	8	5	1
Ψ_2^0	44	42	33	22	14	9	2
Ψ_3^0	44	43	36	28	19	14	4
Ψ_4^0	45	43	38	31	24	17	5

Так же как и в случае схемы с границей питания, степень выраженности внутригодового хода понижения уровня подземных вод при наличии компенсационного питания может быть охарактеризована величиной отношения R_1/R_0. Графики зависимости отношения R_1/R_0 для рассматриваемых условий от параметров t/τ и $g\sqrt{a\tau} = \chi$ приведены в рис. 4.9. Анализ

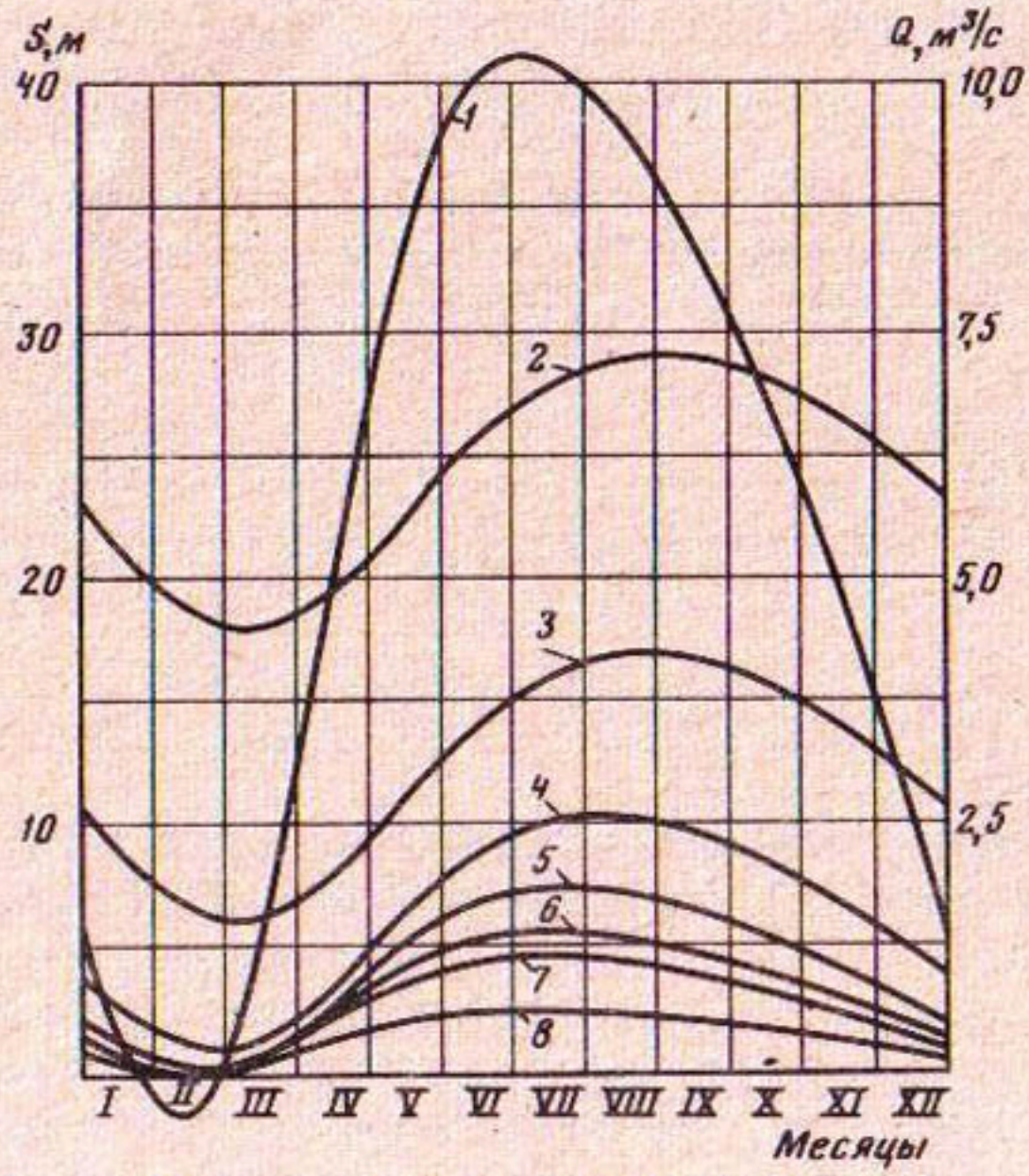


Рис. 4.8. Временные зависимости понижения на линии водозабора в условиях компенсационного питания

1 – зависимость $Q(t)$ величины водоотбора от времени; *2–8* – зависимости понижения от времени при различных значениях величины компенсационного эффекта: *2* – $g = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$, *3* – $g = 10^{-3}$ м$^{-1}$, *4* – $g = 2 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$, *5* – $g = 3 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$, *6* – $g = 4 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$, *7* – $g = 5 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$, *8* – $g = 10^{-2}$ м$^{-1}$

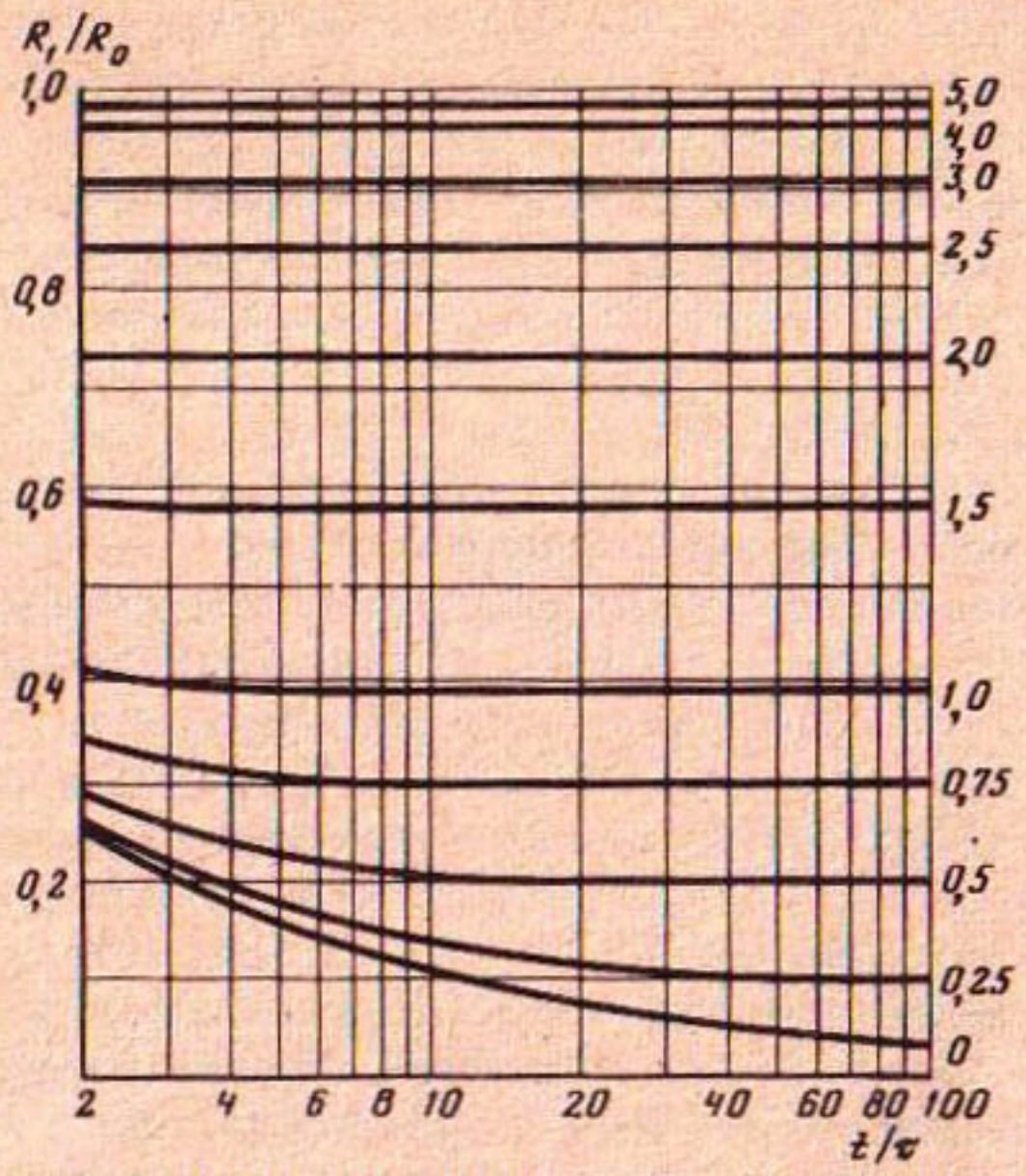


Рис. 4.9. Зависимость величины отношения R_1/R_0, характеризующего степень выраженности колебаний понижения уровня подземных вод на линии водозабора в условиях компенсационного питания от параметров t/τ (время эксплуатации в годах) и $\chi = g\sqrt{a\tau}$

Числа у кривых — значения параметра χ

этой зависимости свидетельствует о значительности фактора компенсационного питания для формирования режима эксплуатационных колебаний уровня подземных вод. Так, для соблюдения условия $R_1/R_0 \geqslant 0{,}25$ при $t = 50$ лет необходимо выполнение неравенства $\chi \geqslant 0{,}6$, которое при характерном значении $a = 10^4$ м^2/сут, эквивалентно неравенству $g \geqslant 0{,}3 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$; для достижения величин отношения R_1/R_0, превышающих 0,5 при тех же условиях, необходимо выполнение неравенства $g \geqslant 0{,}6 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$. Как при эксплуатации слоистых водоносных горизонтов в условиях перетекания, так и эксплуатации грунтовых вод, расходовавшихся до начала отбора на эвапотранспирацию, указанные неравенства выполняются во многих случаях.

Влияние стабилизирующих факторов (границы постоянного уровня, компенсационного питания) на колебания понижения уровня подземных вод, как было показано, выражается в увеличении степени проявления колебаний при усилении стабилизирующего воздействия, которое ведет к ослаблению инерционных свойств системы. Так, при постоянстве величин возмущения во времени реакция геофильтрационной системы, подверженной воздействию стабилизирующих факторов, спустя некоторое время после начала возмущения становится практически постоянной. Эта величина времени, которую уместно назвать сроком стабилизации, тем меньше, чем сильнее проявляется действие стабилизирующих факторов. Величина гармонического сопротивления на частоте первой гармоники определяется поведением системы при значениях времени порядка

основного периода колебаний, поэтому в тех случаях, когда этот период оказывается сравнимым по величине со сроком стабилизации, значение гармонического сопротивления первой гармоники будет приближаться к значению гидравлического сопротивления R_0 (соответствующего расчетному сроку эксплуатации, обычно значительно превосходящему годовой период τ). В конечном итоге, как уже указывалось, усиление стабилизирующих воздействий подчеркивает внутригодовые эксплуатационные колебания уровня подземных вод.

Инерционность геофильтрационных систем обусловливает еще одну важную особенность режима эксплуатационных колебаний уровня подземных вод – временно́й сдвиг между экстремальными значениями величины водоотбора и понижения в районе водозабора. Анализируя графики на рис. 4.7 и 4.8, можно отметить, что запаздывание максимума понижения по отношению к пиковому значению водоотбора может достигать существенных величин. Так, в условиях схемы с границей постоянного уровня при $d = 2000$ м (см. рис. 4.7, кривая *5*) максимальное значение понижения достигается в первой декаде сентября, в то время как максимум дебита водозабора имеет место в начале июля. Временно́й сдвиг в описываемых условиях составляет, таким образом, более двух месяцев. Уменьшение инерционности геофильтрационных систем при усилении стабилизирующих воздействий выражается, в частности, в снижении величины временно́го сдвига. Так, при расстоянии $d = 500$ м в условиях схемы с границей постоянного уровня она составляет уже не более месяца. Изменение величины компенсационного эффекта с $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$ до $3 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$ также приводит к уменьшению величины временно́го сдвига с двух месяцев до двух декад (см. рис. 4.8, кривые *2–5*).

В случаях подавляющего преобладания первой гармоники в разложении (4.1) величина временно́го сдвига будет определяться полностью значением фазочастотной характеристики понижения на основной частоте. Согласно выражению (4.12) при $g = 0$ максимальное значение угла $\Psi(M_0, \omega)$ для точки M_0, расположенной на линии водозабора, составляет 45° и не зависит от частоты. Это значение фазового сдвига, соответствующее полуторамесячному запаздыванию максимума понижения за пиком водоотбора, достигается в случаях отсутствия стабилизирующих воздействий в системе ($d \to \infty$, $g = 0$). Явление временно́го сдвига при отборе подземных вод линейными водозаборами может быть объяснено особенностями взаимодействия скважин водозабора в периодическом режиме работы. Понижение в отдельно взятой скважине линейного ряда складывается в каждый момент времени из двух слагаемых: первое обусловлено отбором подземных вод непосредственно из рассматриваемой скважины, второе – влиянием соседних и в меньшей мере удаленных скважин линейного ряда. Обращаясь к графику (рис. 4.2) изменения величины фазового сдвига скважинного водозабора в зависимости от расстояния до центра скважины, можно установить, что при значениях r порядка радиуса скважины (и характерных значениях $a \approx 10^4$ м^2/сут) величина фазового сдвига пренебрежимо мала – понижение в скважине повторяет ход дебита во времени практически без запаздывания. Что касается влияния соседних скважин, расположенных от рассматриваемой на расстояниях порядка десятков–сотен метров, то, как это следует из

графика на рис. 4.2, величина фазового сдвига второго слагаемого понижения окажется заметной. Так, при $r = 100$ м, $a = 10^4$ м^2/сут и $\omega = 0{,}01721$ сут$^{-1}$ величина $r\sqrt{\omega/a}$ равна 0,131 и согласно графику величина фазового сдвига составляет около 20°, благодаря чему влияние соседних скважин сказывается с двухдекадным запаздыванием. Влияние более удаленных скважин ряда будет характеризоваться еще большими значениями времени запаздывания. При уменьшении расстояния между соседними скважинами линейного ряда, с одной стороны, влияние скважин друг на друга усиливается; с другой стороны, величины соответствующих фазовых сдвигов уменьшаются. Когда величина расстояния между соседними скважинами стремится к нулю, т.е. линейный ряд превращается в галерею, достигается указанная выше величина фазового сдвига, равная 45°.

Реальные графики водоотбора, как правило, характеризуются существенностью второй, а иногда и третьей гармоники разложения (4.1). Величина временно́го сдвига между пиковыми значениями водоотбора и понижения в таких условиях может существенно отличаться от полутора месяцев. Рассмотрим влияние второй гармоники на величину временно́го сдвига в случае, когда гидрогеологические условия схематизированы в виде неорганического однородного пласта, эксплуатируемого бесконечной галереей (компенсационное питание отсутствует). Величина фазового сдвига в этих условиях, как уже отмечалось, на всех частотах составляет 45°; гармоническое сопротивление R_2 на частоте второй гармоники в $\sqrt{2}$ раза меньше величины R_1 (следствие из формулы (4.13) при $g = 0$). Поскольку график водоотбора описывается выражением

$$Q(t) = Q_0 + Q_1 \cos(t - \varphi_1) + Q_2 \cos(2t - \varphi_2) \qquad (4.25)$$

(гармоники третьего и четвертого порядка отброшены), зависимость периодической составляющей понижения от времени согласно формуле (1.57) будет иметь вид

$$S_p(M_0, t) = \frac{Q_1}{T} R_1 \cos(t - \varphi_1 - 45°) + \frac{Q_2}{T\sqrt{2}} R_1 \cos(2t - \varphi_2 - 45°). \qquad (4.26)$$

Введем в рассмотрение функцию $M(\zeta, \Xi)$, определенную условием: зависимость $f(z) = \cos z + \zeta \cos(2z + \Xi)$ достигает наибольшего значения при $z = -M(\zeta, \Xi)$. Табл. 29 содержит значения функции $M(\zeta, \Xi)$ при некоторых значениях параметров ζ и Ξ. При $\Xi > 180°$ следует использовать свойство антисимметричности функции $M(\zeta, \Xi)$:

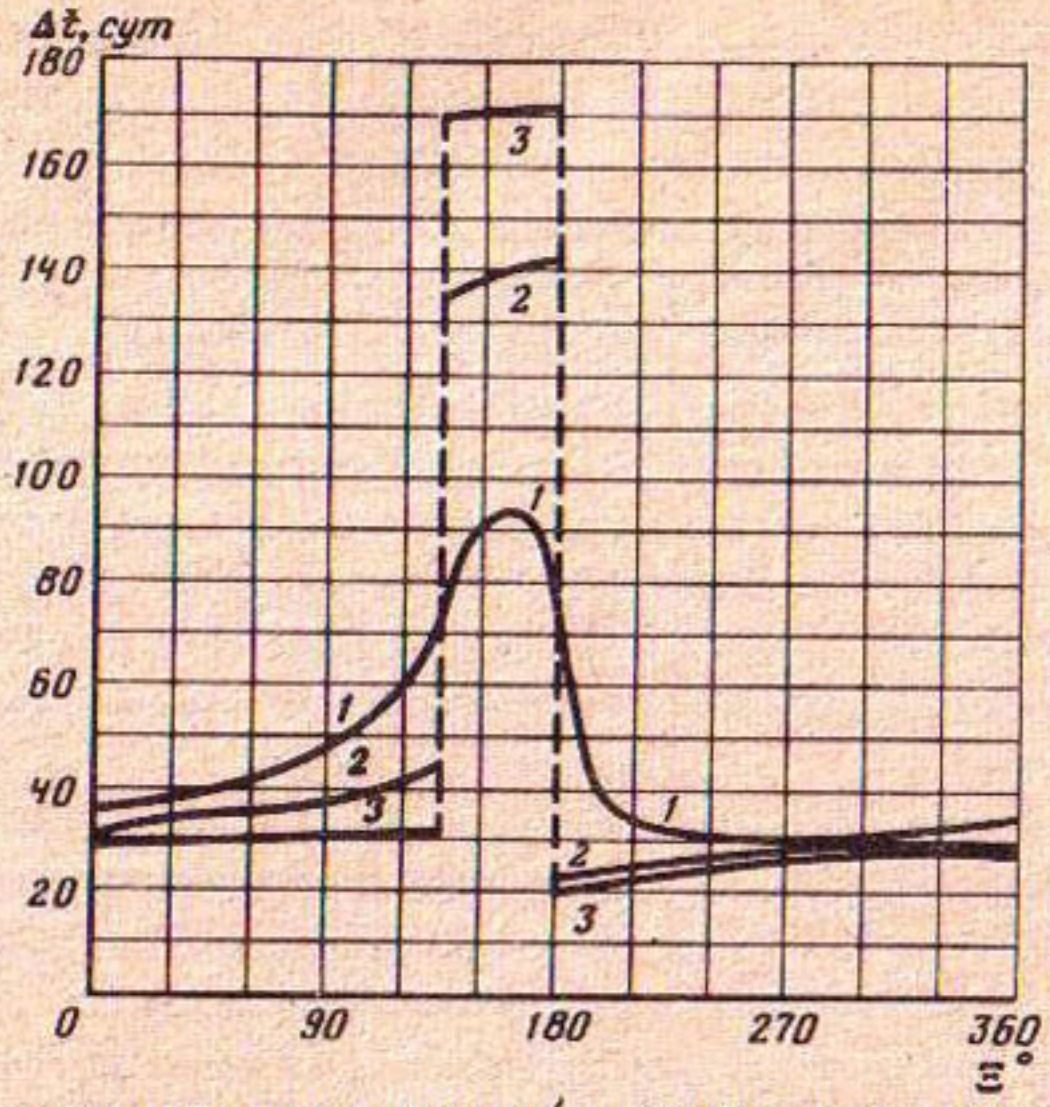
$$M(\zeta, 180° + \Xi) = -M(\zeta, 180° - \Xi). \qquad (4.27)$$

Полагая в выражении (4.26) $t - \varphi_1 = z$, получим, что максимальное значение водоотбора будет достигаться при значении времени

$$t_{Q\,max} = \varphi_1 - M(\zeta, \Xi), \qquad (4.28)$$

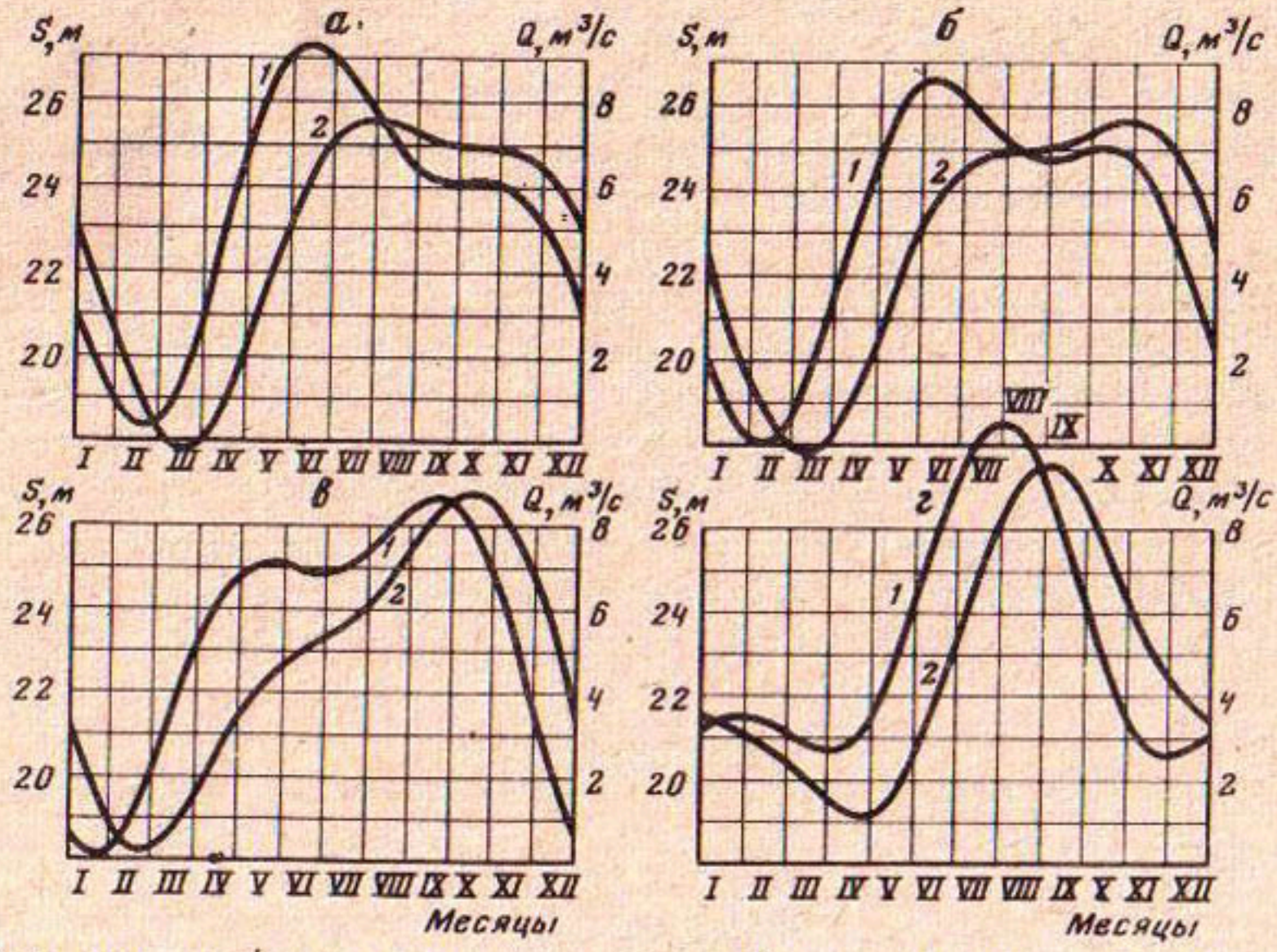
где $\zeta = Q_2/Q_1$, $\Xi = 2\varphi_1 - \varphi_2$. Точно так же, рассматривая выражение (4.26), приходим к выводу о том, что максимум периодической составляющей понижения будет иметь место при $t = t_{S\,max}$, где

$$t_{S\,max} = \varphi_1 + 45° - M\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \Xi + 45°\right). \qquad (4.29)$$



Р и с. 4.10. Зависимость величины временно́го сдвига между пиковыми значениями понижения на линии водозабора и величины водоотбора от угла $\Xi = 2\varphi_2 - \varphi_1$ и отношения Q_2/Q_1

1 – $Q_2/Q_1 = 0{,}25$; *2* – $Q_2/Q_1 = 0{,}50$; *3* – $Q_2/Q_1 = 1{,}0$



Р и с. 4.11. Временны́е зависимости водоотбора (кривая *1*) и понижения на линии водозабора (кривая *2*) при различных значениях угла Ξ

$T = 500$ м²/сут; $a = 4000$ м²/сут; $g = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$; $B = 40$ км. Значения Ξ: *а* – 120°; *б* – 150°; *в* – 210°; *г* – 360°

Временной сдвиг составляет, таким образом, величину

$$\Delta t = t_{S_{max}} - t_{Q_{max}} = 45^\circ + M(\zeta, \Xi) - M\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \Xi + 45^\circ\right). \qquad (4.30)$$

На рис. 4.10 изображены графики зависимости величины Δt от параметров Ξ и ζ. При $\zeta \leqslant 0{,}25$ эта зависимость непрерывна; при $\zeta > 0{,}25$ она имеет два разрыва – при $\Xi = 135^\circ$ и при $\Xi = 180^\circ$, что обусловлено особенностью функции $M(\zeta, \Xi)$. Графики на рис. 4.6 свидетельствуют в пользу возможности достижения весьма больших значений временно́го сдвига под влиянием второй гармоники разложения графика водоотбора. Даже при сравнительно небольшом весе второй гармоники, при $\zeta = 0{,}25$, может наблюдаться более чем трехмесячный сдвиг во времени, если только значение угла Ξ составляет 150–170°. При увеличении веса второй гармоники величина временно́го сдвига может возрастать почти до полугода (случай $\zeta = 1{,}0$). На рис. 4.11 приведены совмещенные графики временны́х зависимостей водоотбора и понижения при отборе подземных вод неограниченного однородного пласта с коэффициентом водопроводимости $T = 500$ м^2/сут и коэффициентом уровнепроводимости $a = 4000$ м^2/сут в условиях компенсационного питания, характеризуемого величиной $g = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$. Величины сопротивлений и фазовых сдвигов для этих условий приведены в табл. 28. Отношение гармонических сопротивлений R_1/R_2 близко к $\sqrt{2}$, а фазовые углы – к 45°, поэтому все выводы, сделанные для условий отсутствия компенсационного питания, остаются справедливыми и в условиях примера. С другой стороны, как отмечалось выше, наличие компенсационного питания подчеркивает внутригодовые колебания понижения. При построении графиков на рис. 4.11 было принято, что $B = 40\,000$ м, а график водоотбора задан в виде $Q(t) = 5{,}25 + 3{,}50 \cdot \cos(t - 210^\circ) + 1{,}75 \cdot \cos(2t - \varphi_2)$ (м^3/с), где величина φ_2 назначалась исходя из соотношения $\varphi_2 = 2 \cdot 210^\circ - \Xi = 420^\circ - \Xi$. Анализируя графики на рис. 4.11, можно прийти к выводу, что величина временно́го сдвига зависит от соотношения величин максимумов водоотбора и продолжительности интервала времени между ними. В случае *а* (см. рис. 4.11) второй максимум водоотбора выражен слабо и максимальное значение понижения определяется главным пиком водоотбора. График водоотбора в случае *б* на первый взгляд отличается от графика в случае *а* незначительно. Однако наличие второго пика, следующего после первого, приводит к перестройке характера кривой понижения: ее максимум следует уже за вторым пиком водоотбора. Если второстепенный пик водоотбора предшествует главному, как это имеет место в случаях *в*, *г*, максимум понижения следует за главным пиком водоотбора, а величина временно́го сдвига при этом невелика. Таким образом, существуют условия, при которых влияние второй гармоники графика водоотбора приводит к резкому увеличению временно́го сдвига между пиками водоотбора и понижения. Эти условия в случае эксплуатации подземных вод линейным водозабором определяются неравенством $135^\circ \leqslant \Xi \leqslant 180^\circ$. Графики водоотбора, вызывающего значительные временны́е сдвиги, в качественном отношении характеризуются наличием дополнительного максимума, следующего за основным.

Графики этого вида могут встречаться в реальных условиях. Значения ординат графика в период с апреля по сентябрь соответствуют при этом веге-

Таблица 29

Значения функции $M(\zeta, \Xi)$ (в градусах)

Ξ	ζ = 0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
15	0,000	1,242	2,134	2,805	3,328	3,746	4,088	4,373	4,614	4,821	5,000
30	0,000	2,434	4,216	5,567	6,596	7,467	8,159	8,735	9,222	9,639	10,00
45	0,000	3,525	6,189	8,237	9,846	11,14	12,19	13,07	13,82	14,45	15,00
60	0,000	4,462	7,989	10,76	12,96	14,72	16,17	17,37	18,39	19,25	20,00
75	0,000	5,184	9,536	13,06	15,90	18,19	20,06	21,62	22,93	24,04	25,00
90	0,000	5,628	10,73	15,05	18,59	21,47	23,83	25,79	27,43	28,81	30,00
105	0,000	5,728	11,43	16,57	20,91	24,49	27,43	29,85	31,86	33,56	35,00
120	0,000	5,420	11,45	17,40	22,69	27,12	30,76	33,74	36,21	38,26	40,00
135	0,000	4,569	10,53	17,14	23,56	29,12	33,70	37,40	40,43	42,92	45,00
150	0,000	3,441	8,377	15,09	22,79	30,00	35,95	40,68	44,45	47,50	50,00
165	0,000	1,834	4,762	9,817	18,24	28,34	36,86	43,29	48,17	51,97	55,00
170	0,000	1,238	3,260	7,020	14,72	26,41	36,56	43,91	49,30	53,42	56,67
175	0,000	0,623	1,657	3,684	8,968	22,57	35,66	44,31	50,36	54,85	58,33
180	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	33,56	44,42	51,32	56,25	60,00

Ξ	ζ = 0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
15	5,157	5,295	5,418	5,527	5,626	5,716	5,797	5,871	5,939	6,002
30	10,32	10,59	10,84	11,06	11,26	11,44	11,60	11,75	11,89	12,01
45	15,48	15,90	16,28	16,61	16,91	17,18	17,43	17,65	17,86	18,05
60	20,65	21,22	21,73	22,18	22,58	22,95	23,28	23,58	23,86	24,11
75	25,83	26,56	27,21	27,28	28,29	28,75	29,17	29,55	29,90	30,21
90	31,03	31,93	32,72	33,42	34,04	34,61	35,11	35,57	35,99	36,38
105	36,24	37,33	38,27	39,11	39,85	40,52	41,12	41,66	42,16	42,61
120	41,49	42,77	43,89	44,87	45,74	46,52	47,21	47,84	48,41	48,93
135	46,76	48,27	49,58	50,72	51,72	52,61	53,41	54,12	54,77	55,36
150	52,09	53,85	55,37	56,68	57,82	58,84	59,73	60,54	61,26	61,91
165	57,48	59,54	61,29	62,78	64,08	65,21	66,22	67,11	67,91	68,63
180	62,96	65,38	67,38	69,08	70,53	71,79	72,90	73,87	74,74	75,52

тационным поливам, в осенне-зимний период – промывкам земель, если этого требуют мелиоративные условия, а в феврале и марте – предпосевным влагозарядковым поливам.

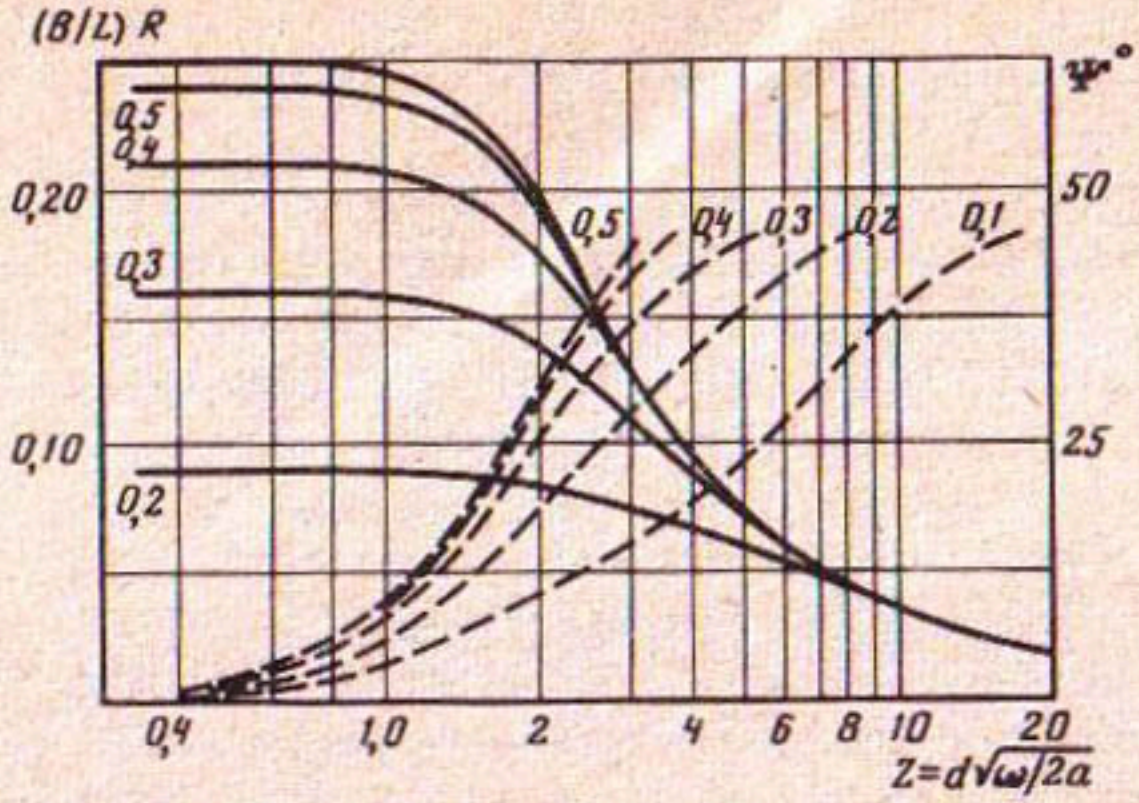
Временны́е сдвиги между пиковыми значениями водоотбора и понижения, достигающие в определенных условиях нескольких месяцев, могут оказать существенное влияние на оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод для целей орошения. Величина допустимого понижения, назначаемая исходя из мощности водоносного горизонта, не является точно определенной константой, а варьирует в определенных пределах [6]. Так, для безнапорных пластов она должна составлять от 50 до 70% от мощности пласта. Выбирая то или иное конкретное значение в этих пределах, следует руководствоваться соображениями технико-экономического характера. Учет смещения пиковых значений понижения по отношению к максимуму водоотбора может выразиться при оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод в увеличении расчетного значения допустимого понижения до ее верхнего предела. В некоторых случаях, возможно, оно может назначаться еще бо́льшим, учитывая, что кратковременное превышение понижением допустимого значения произойдет в период, когда величина водоотбора существенно меньше пиковой и вероятное отключение части скважин не приведет к столь существенному осложнению водохозяйственной обстановки, как если бы это произошло в разгар вегетационных поливов.

Рассмотренные на примере простых гидрогеологических схем характеристики циклических эксплуатационных колебаний уровня подземных вод в их взаимосвязи с некоторыми факторами питания и разгрузки сохраняют свое значение и в более сложных гидрогеологических и водохозяйственных условиях, а также при усложненной конфигурации водозаборов.

4.5. СХЕМЫ ПЛАСТОВ-ПОЛОС

В настоящем параграфе рассматриваются частотные характеристики понижения в условиях однородных пластов-полос – с двумя границами питания и с разнородными границами. Передаточные функции понижения для схем пластов-полос были получены в 2.3.

При отборе подземных вод в пластах-полосах обоих видов одиночными водозаборами эти передаточные функции выражаются соответственно формулами (2.57) и (2.66); соответствующие выражения для частотных характеристик, получаемые при подстановке $p = i\omega$, имеют, однако, даже в случаях отсутствия компенсационного питания вид трудносуммируемых комплексных рядов. Месте с тем, вспоминая, что значения частотных характеристик на частоте основных колебаний и более высоких частотах соответствуют значениям гидравлического сопротивления при значениях времени порядка нескольких месяцев, можно предположить, что в большинстве случаев, когда водозабор не слишком близок к границам, их влияние за рассматриваемый интервал времени не сказывается в значительной степени. Поэтому для целей практических расчетов можно рекомендовать использовать в таких условиях вместо истинных частотных характеристик соответствующие зависимости для одиночного водозабора в условиях неограниченного однородного пласта.

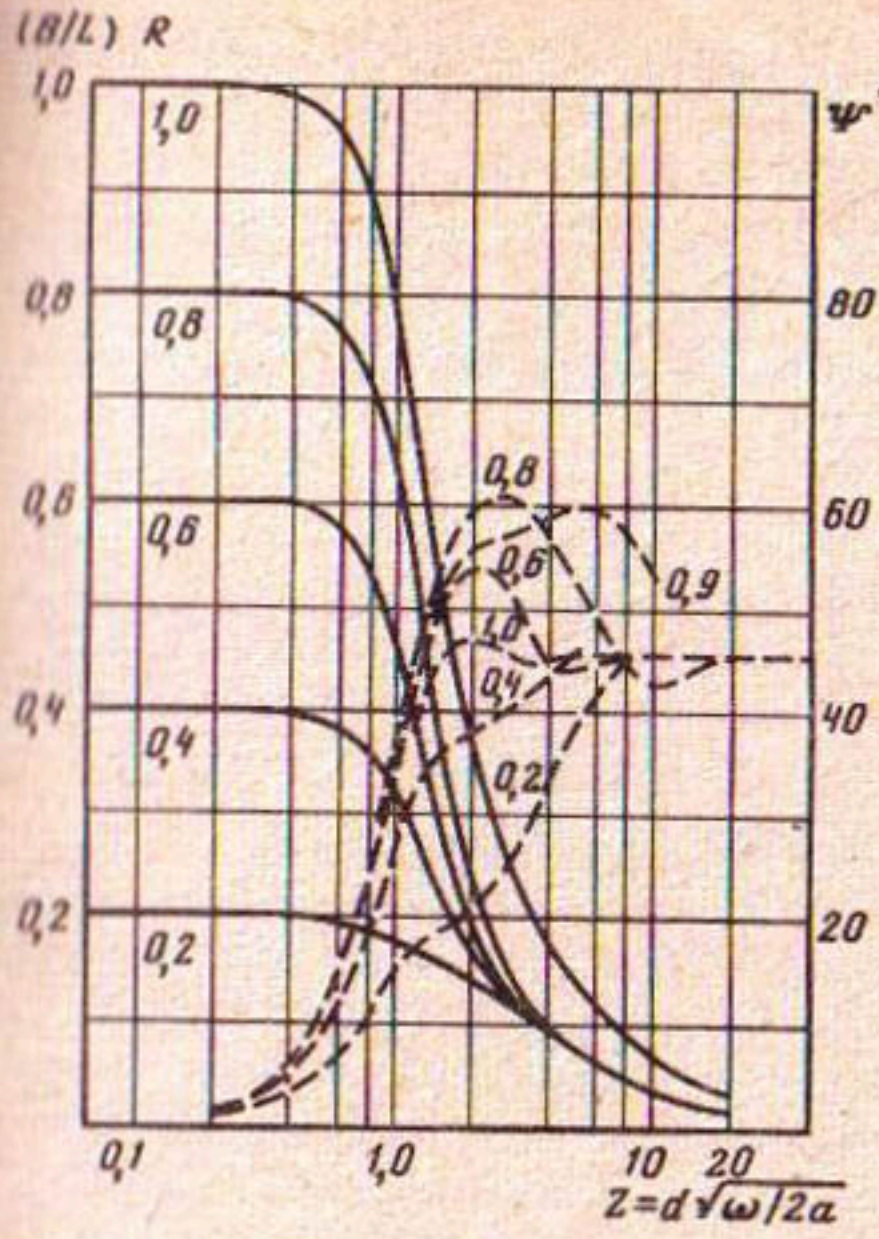


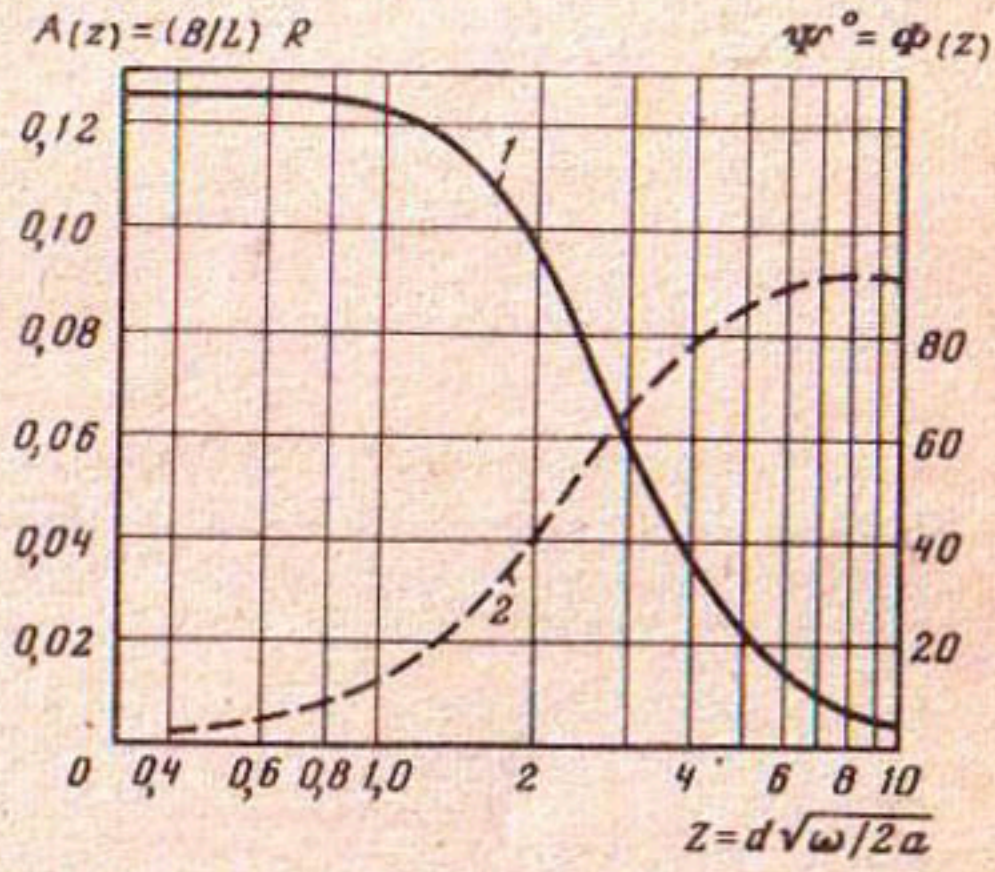
Р и с. 4.12. Графики частотных характеристик для условий схемы пласта-полосы с двумя границами питания

Сплошные линии – амплитудные, пунктирные – фазовые. Числа у кривых – значения относительного расстояния $\bar{d}$ между линейным водозабором и левой рекой

При отборе подземных вод однородного пласта-полосы линейным рядом скважин при условии равенства нулю компенсационного эффекта частотные характеристики понижения в точке на линии водозабора имеют вид (1.103), (1.104), где выражения для собственных элементов λ_k и $e_k(M')$ определены соответственно формулами (2.72) для условий пласта-полосы с разнородными границами. На рис. 4.12 и 4.13 приведены графики частотных характеристик для рассматриваемых условий, причем для случая пласта-полосы с границами питания приведены только графики при $\bar{d} \leqslant 0{,}5$, так как значения частотных характеристик не изменяются от замены в соответствующих выражениях на $1 - \bar{d}$.

В условиях пласта-полосы с границами питания амплитудно-частотные характеристики претерпевают при увеличении частоты закономерное уменьшение своих значений; фазочастотные характеристики увеличиваются от значений, близких к нулю, до половины прямого угла и могут несколько превосходить это значение (на 2–3°), причем при $\omega \to \infty$ значения фазочастотных характеристик стремятся к 45° независимо от величины $\bar{d}$. Амплитудно-частотные характеристики понижения в случае пласта-полосы с разнородными границами также испытывают закономерное уменьшение при возрастании частоты; что касается фазочастотных характеристик, то они испытывают значительное влияние со стороны границы постоянного расхода, выражающееся в появлении значительных пиков фаз над предельным значением, равным 45°. Увеличение фазы достигает 15° и даже больше, так что суммарные значения фазовых сдвигов 60° при значениях $\bar{d}$ порядка 0,7–0,9; при $\bar{d} = 1{,}0$, как можно видеть из графика (рис. 4.13), превышение значения фазы над предельным значением снова не превосходит 3°. Это явление может быть истолковано с привлечением принципа отражения относительно границы. При относительно близком расположении линейного ряда у границы постоянного расхода режим понижения в точке на линии отбора формируется главным образом под влиянием водоотбора из скважин линейного ряда и его отражения (со своим знаком) относительно границы. Влиянием остальных фиктивных водозаборов,





Р и с. 4.13. Графики частотных характеристик для условий схемы пласта-полосы с разнородными границами

Сплошные линии — амплитудные характеристики, пунктирные — фазовые. Числа у кривых — относительное расстояние между линейным водозабором и границей питания.

Р и с. 4.14. Графики функций A (z) (кривая *1*) и Ф (z) (кривая *2*)

возникающих при отражениях относительно границы питания и при кратных отражениях, можно пренебречь, так как в силу относительной отдаленности их влияние сказывается в значительно меньшей степени. В условиях существенности влияния фиктивного водозабора, расположенного за границей постоянного расхода, его действие будет проявляться двояко: при увеличении значения $\bar{d}$ оно будет выражаться сначала в увеличении фазового сдвига, что связано с усилением влияния более далеко расположенного отражения; при дальнейшем увеличении величины $\bar{d}$, в области, близкой к $\bar{d} = 1$, сдвиг, даваемый отражением, становится незначительным и суммарная величина фазовой характеристики становится меньшей; в пределе, при $\bar{d} = 1$, фиктивный водозабор-отражение пропадает совсем, исчезает и дополнительный фазовый сдвиг и фазочастотная характеристика приобретает вид, показанный на рис. 4.13. Сложный характер фазочастотных характеристик рассмотренной схемы может выразиться в значительном искажении графика понижения уровня подземных вод на линии водозабора и в конечном итоге на величине эксплуатационных ресурсов. С другой стороны, сдвиг максимума понижения на две недели в рассмотренных условиях может оказаться желательным при обосновании крупного отбора подземных вод для орошения.

При отборе подземных вод однородного пласта-полосы с границами питания площадным водозабором, равномерно распределенным по области фильтрации, частотные характеристики понижения в центральной точке

пласта могут быть также описаны формулами (1.101) – (1.104), где коэффициенты χ_k будут, как было показано (2.80), выражаться равенствами

$$\chi_k = \frac{\sqrt{2}}{k\pi}[1 - (-1)^k].$$

На рис. 4.14 приведены графики частотных характеристик площадного водозабора, причем

$$R(M_1, \omega) = \frac{L}{B} A(z), \tag{4.31}$$

$$\Psi(M_1, \omega) = F(z), \tag{4.32}$$

где $z = L\sqrt{\omega/2a}$.

Аналогично могут быть получены частотные характеристики и в случае пласта-полосы с разнородными границами. Нетрудно показать, что в этом случае частотные характеристики понижения в точке на границе постоянного расхода могут быть выражены через частотные характеристики понижения в середине площадного водозабора, работающего в пласте-полосе с границами питания, а именно:

$$R(M_2, \omega) = \frac{L}{B} \cdot 4A(2z), \tag{4.33}$$

$$\Psi(M_1, \omega) = F(2z) \tag{4.34}$$

$$z = L\sqrt{\omega/2a}.$$

Глава 5

ОЦЕНКА РЕДУКЦИИ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ ОТБОРА ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Периодический режим водоотбора при определенных условиях может вызвать внутригодовые изменения редукции поверхностного стока. Это обстоятельство не всегда играет решающую роль, но часто, особенно в условиях бассейнов небольших рек, вносит существенные коррективы в режим и величины отбора подземных вод. Для оценки влияния периодического отбора подземных вод на режим поверхностного стока необходимо сравнивать гидрографы последнего с графиком внутригодового хода редукции. В зависимости от расположения водозаборов подземных вод относительно водотоков, фильтрационных условий и других гидрогеологических факторов, а также от режима водоотбора сезонный максимум редукции может совпасть с фазой половодья, межени или промежуточной фазой. Очевидно, наиболее серьезными будут последствия редукции поверхностного стока в случае совпадения ее сезонного максимума с меженью на реках, особенно если характерная величина меженного расхода рек сравнима с

максимальной величиной редукции. В меньшей степени редукция поверхностного стока проявится при совмещении ее максимума с половодьем.

Поскольку внутригодовой режим поверхностного стока имеет стохастическую природу, так же как и редукция поверхностного стока (из-за вероятностного характера отбора подземных вод), то наиболее последовательным будет сравнение вероятностных характеристик гидрографов поверхностного стока и редукции. Вместе с тем как теория случайных внутригодовых колебаний поверхностного стока, так и оценка редукции при случайности водоотбора в настоящее время разработаны недостаточно, поэтому для практических расчетов представляется целесообразным ограничиться сравнением характерных гидрографов (например, гидрографа стока заданной обеспеченности при графике редукции, рассчитанного по среднемноголетнему гидрографу водоотбора).

Теоретическое исследование внутригодового хода редукции поверхностного стока при отборе подземных вод необходимо также и при обосновании мероприятий по увеличению водности рек в меженный период путем закачки подземных вод в водоносные горизонты, гидравлически связанные с этими реками [69, 70].

В настоящей главе рассмотрены методы исследования периодических компонент редукции для нескольких наиболее простых и в то же время распространенных в практике гидрогеологических схем однородных пластов с границей питания в плане, а также пластов-полос. Рассмотрено влияние компенсационного питания, а также обратной инфильтрации оросительных вод на полях на режим редукции.

5.1. ОДНОРОДНЫЙ ВОДОНОСНЫЙ ПЛАСТ С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ ПИТАНИЯ В ПЛАНЕ

Передаточная функция редукции для условий отбора подземных вод одиночным или параллельным водотоку линейным рядом скважин имеет вид (3.10). Подставляя в это выражение $p = i\omega$, получим, что в условиях компенсационного питания частотные характеристики редукции будут иметь вид

$$w(\omega) = e^{-\chi\rho\cos\theta}, \quad \Psi(\omega) = \chi\rho\sin\theta, \tag{5.1}$$

где

$$\rho = \sqrt[4]{1+\sigma^2}, \quad \theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sigma, \quad \sigma = \omega/ag^2$$

Представляется целесообразным провести анализ основных особенностей сезонных колебаний величины изменения поверхностного стока при эксплуатации подземных вод с привлечением численных примеров.

Пример 1. Изменение поверхностного стока при отборе подземных вод линейными водозаборами с учетом периодического характера водоотбора.

Аллювиальный водоносный горизонт с коэффициентом уровнепроводности $a = 12\,000$ м^2/сут намечается к эксплуатации в целях орошения. Величина компенсационного эффекта, оцененная на основании данных опытно-фильтрационных работ, составляет $g = 0{,}48 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$. Времен-

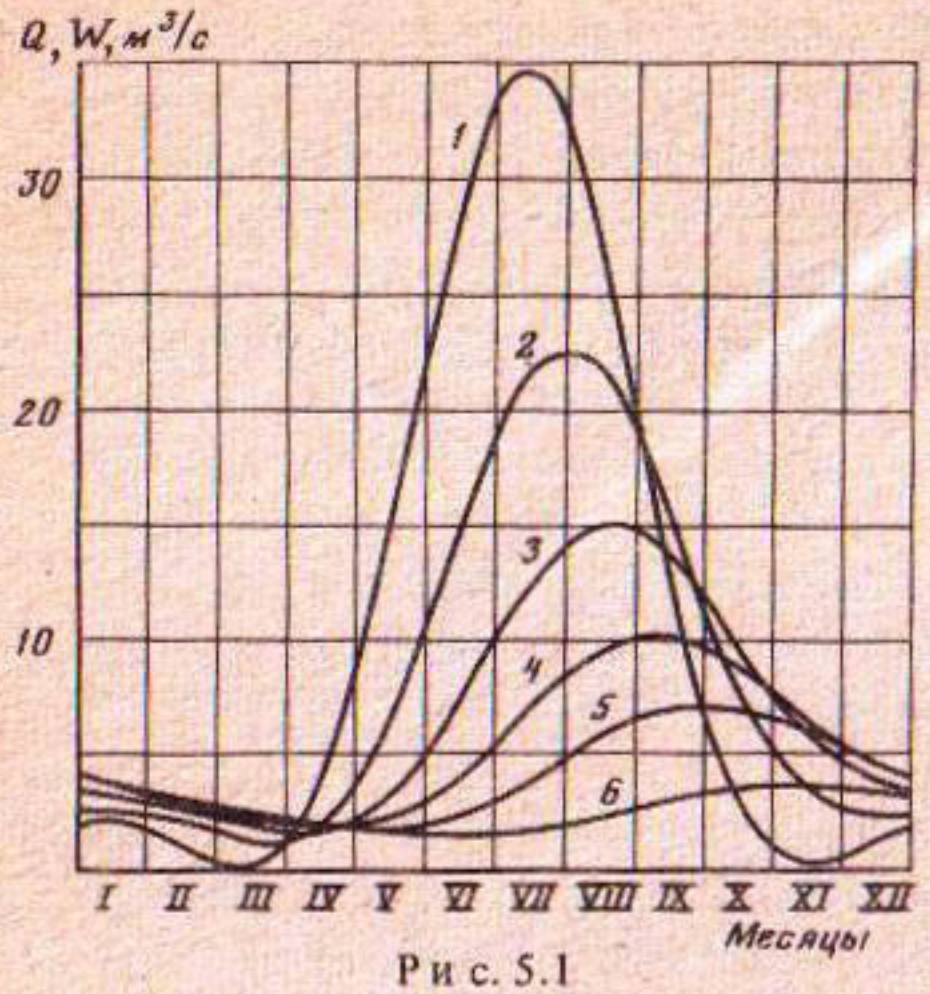


Рис. 5.1

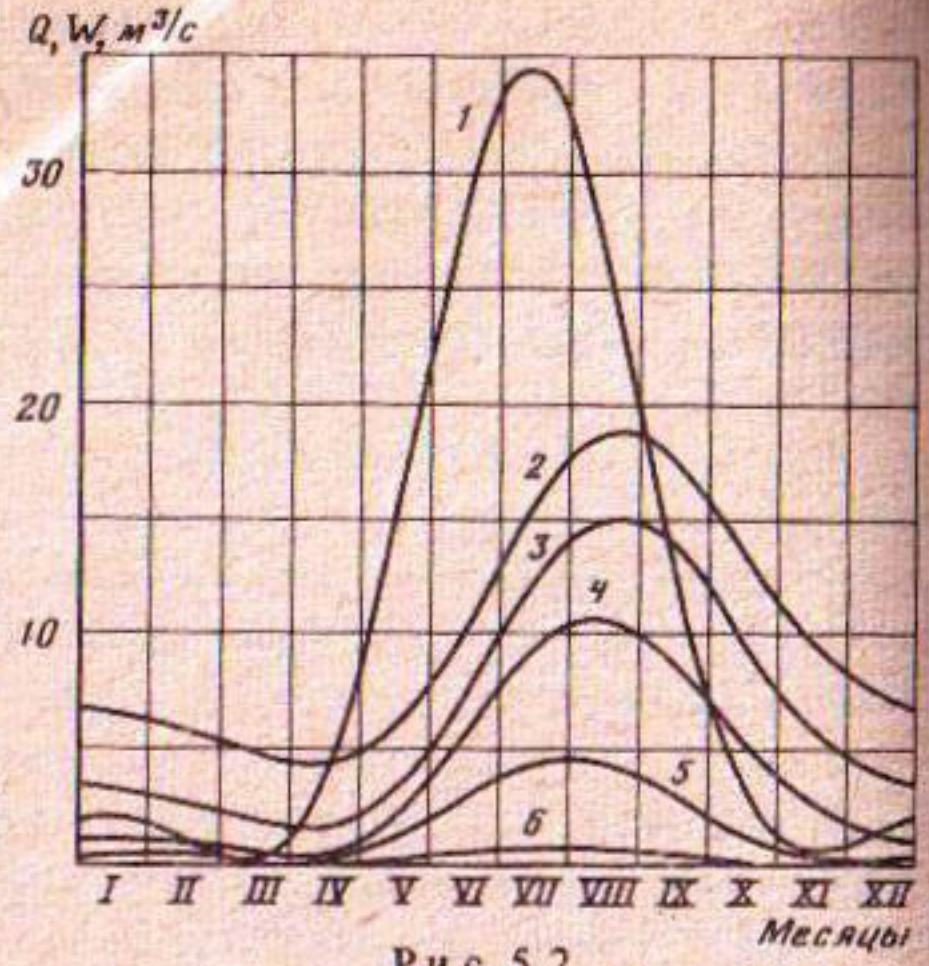


Рис. 5.2

Рис. 5.1. Временны́е зависимости величины отбора подземных вод и сокращения расхода реки в условиях примера 1

1 – зависимость $Q(t)$; *2–6* – зависимости $W(t)$ при различных значениях между линейным водозабором и урезом реки d: *2* – d = 500 м, *3* – d = 1000 м, *4* – d = 1500 м, *5* – d = 2000 м, *6* – d = 3000 м

Рис. 5.2. Временны́е зависимости величины отбора подземных вод и сокращения расхода реки при отборе подземных вод линейным водозабором, отстоящим от уреза реки на расстоянии d = 1000 м при различных значениях компенсационного эффекта g

1 – зависимость $Q(t)$ (из примера 1); *2–6* – зависимости $W(t)$ при значениях g: *2* – $g = 0$, *3* – $g = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$, *4* – $g = 1 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$, *5* – $g = 2 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$, *6* – $g = 4 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$

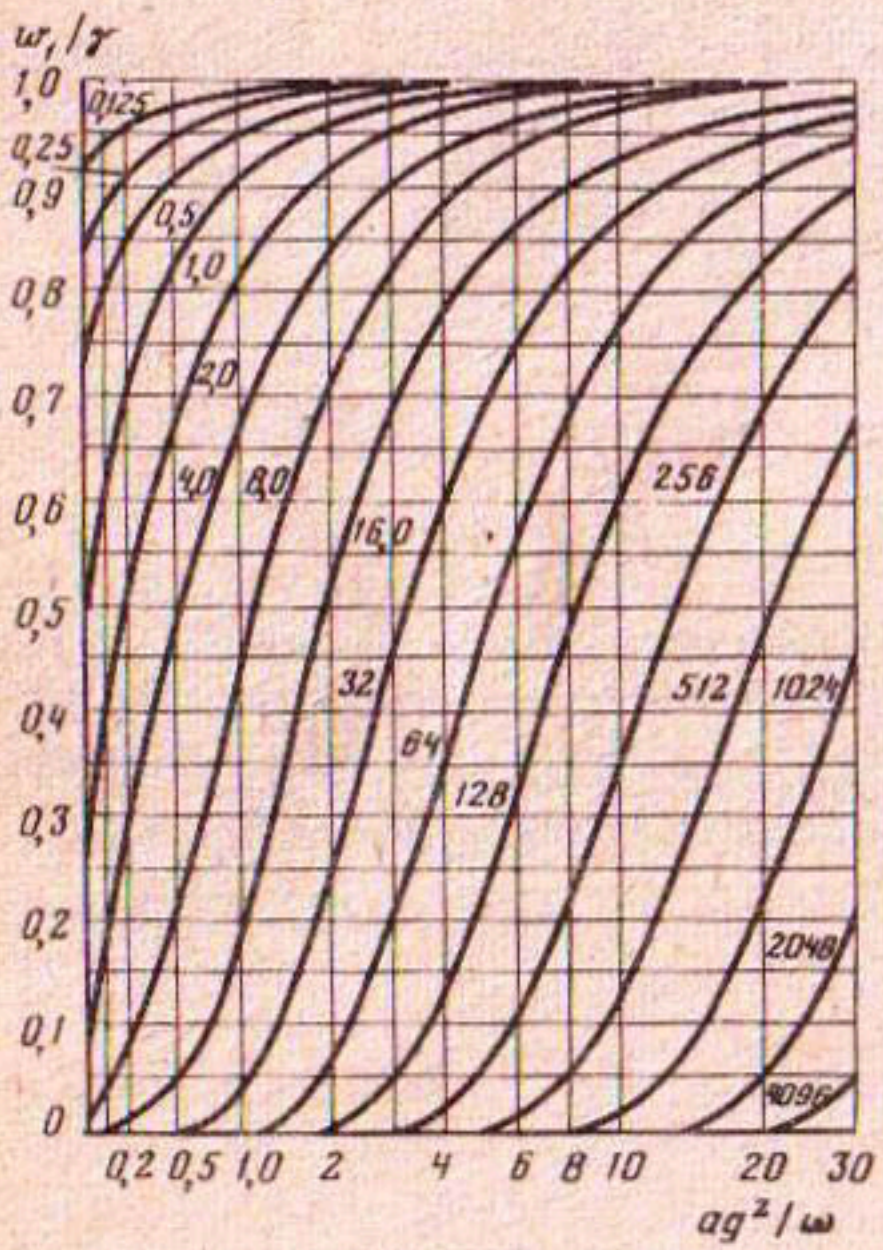


Рис. 5.3

Рис. 5.3. Зависимость отношения w_1/γ от параметров ag^2/ω и $d\sqrt{\omega/a}$ при отборе подземных вод линейным водозабором. Числа у кривых – значения параметра $d\sqrt{\omega/a}$

на́я зависимость (кривая *1* на рис. 5.1) водоотбора определена выражением

$$Q(t) = 10{,}8 + 15{,}4\cos(t - 192^\circ) + 7{,}45\cos(2t - 23^\circ) + 0{,}85\cos(3t - 205^\circ) \quad (\text{м}^3/\text{с}).$$

Требуется определить временны́е зависимости изменения расхода реки для ряда значений расстояния между рекой и водозабором в десятый год эксплуатации.

Зададимся каким-либо значением d, например d = 1000 м. Для расчет-

Таблица 30

Изменения коэффициентов влияния и фазовых сдвигов в разложении периодической составляющей изменения расхода реки по условиям примера 1

d, м	500	1000	1500	2000	3000
w_0	0,7866	0,6187	0,4866	0,3826	0,2353
w_1	0,6321	0,3996	0,2526	0,1596	0,0638
w_2	0,5361	0,2874	0,1511	0,0825	0,0237
w_3	0,4708	0,2216	0,1043	0,0491	0,0109
$\psi_1°$	22	45	67	90	134
$\psi_2°$	33	66	99	132	198
$\psi_3°$	41	82	123	164	245

ного значения времени t = 10 лет = 3650 сут определяем величину параметра $d/2\sqrt{at} = 1000/2\sqrt{12000 \cdot 3650} = 0{,}0755$; значение параметра χ составляет $1000 \cdot 0{,}48 \cdot 10^{-3} = 0{,}48$; значение функции $w_0(t)$ согласно формуле (3.11) равно

$$w_0(t) = D(0{,}0755; 0{,}48) = 0{,}6187.$$

По формуле (1.43) величина апериодической составляющей изменения расхода будет равна $0{,}6187 \cdot 10{,}8 = 6{,}68$ (м^3/с).

Задаваясь значением основной частоты колебаний $\omega = \omega_1 = 2\pi/365 = 0{,}01721$ (сут$^{-1}$), определяем соответствующие ей значения частотных характеристик. Находим для этого $\sigma = 0{,}01721/12\,000(0{,}48 \cdot 10^{-3})^2 = 6{,}226$, по формулам (5.1) вычисляем $\rho = \sqrt[4]{1 + 6{,}226^2} = 2{,}511$; $\theta = 0{,}7058$ (рад); $w_1 = w(\omega_1) = e^{-0{,}48 \cdot 2{,}511 \cos 0{,}7058} = 0{,}3996$; $\Psi_1 = \Psi(\omega_1) = 0{,}48 \times 2{,}511 \sin 0{,}7058 = 0{,}7818$ (рад) $\approx 45°$. Амплитуда первой гармоники колебаний изменения расхода реки согласно выражению (1.60) будет равна $15{,}4 \cdot 0{,}3996 = 6{,}15$ (м^3/с); соответствующий фазовый угол составит $192° + 45° = 237°$. Действуя аналогично, определяем значения коэффициентов влияния и фазовых сдвигов на частотах $\omega_2 = 2\omega_1$ и $\omega_3 = 3\omega_1$, которые приведены в табл. 30. Выражение для временно́й зависимости $W(t)$ будет иметь вид

$$W(t) = 6{,}68 + 6{,}15 \cos(t - 237°) + 2{,}14 \cos(2t - 89°) +$$

$$+ 0{,}19 \cos(3t - 287°) \text{ (м}^3\text{/с)}.$$

График этой зависимости приведен на рис. 5.1 (кривая *4*). На этом же рисунке изображены временны́е зависимости $W(t)$, соответствующие другим значениям расстояния d. Анализ этих графиков свидетельствует об уменьшении степени выраженности внутригодовых изменений расхода реки, вызванных периодическим водоотбором при увеличении расстояния d. Если характеризовать эту степень величиной отношения W_{max}/W_0, максимального значения функции $W(t)$ к ее среднегодовому значению, то при d = 500 м $W_{max}/W_0 = 22{,}5/8{,}50 = 2{,}65$, в то вре́мя как при d = 1000 м $W_{max}/W_0 = 15{,}1/6{,}68 = 2{,}26$, при d = 3000 м $W_{max}/W_0 = 3{,}60/2{,}54 = 1{,}42$.

Изменение характера временно́й зависимости сокращения расхода реки под влиянием отбора подземных вод при изменении величины ком-

пенсационного эффекта иллюстрируется серией графиков на рис. 5.2. При их построении было принято, что расстояние между урезом реки и водозабором равно 1000 м, фильтрационные параметры и график водоотбора те же, что и в рассмотренном выше примере, а величина компенсационного эффекта принималась изменяющейся в пределах от нуля до $4 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$. Графики показывают существенность влияния компенсационного питания на степень проявления внутригодового распределения изменения расхода реки $W(t)$. Так, при $g = 0$ величина отношения W_{max}/W_0 составляет 19,8/9,88 = 2,00; при $g = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$ величина этого отношения равна 10,7/3,97 = 2,69; при $g = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$ – 4,50/1,46 = 3,08.

Таким образом, усиление компенсационного питания приводит к более резкому проявлению внутригодового хода изменения расхода поверхностного стока. С другой стороны, при этом существенно уменьшается и само максимальное значение зависимости $W(t)$. Поскольку в условиях компенсационного питания значения функции $w_0(t)$ быстро стабилизируются, достигая предела $\gamma = \lim\limits_{t \to \infty} w_0(t)$, а на формирование максимального значения изменения расхода реки основное влияние оказывает первая гармоника его разложения (1.60), степень выраженности внутригодового распределения изменения поверхностного стока может быть косвенно охарактеризована величиной отношения w_1/γ, где w_1 – коэффициент влияния в разложении (1.60), соответствующий основной частоте колебаний. График зависимости величины этого отношения от параметров ag^2/ω и $d\sqrt{\omega/a}$ приведены на рис. 5.3. Значение первого из указанных аргументов отражает величину компенсационного питания; величина второго характеризует удаленность водозабора от уреза реки. Графики (рис. 5.3) иллюстрируют резко выраженную зависимость характера внутригодового распределения изменения расхода реки от величины компенсационного питания. Так, при $d = 3000$ м, $a = 10\,000$ м^2/сут, $\omega = \omega_1 = 0{,}01721$ сут и $g = 0{,}6 \times \times 10^{-3}$ м$^{-1}$ значение параметра $d\sqrt{\omega/a}$ составляет 3,94; значение параметра ag^2/ω равно 0,21. С помощью графиков на рис. 5.3 определяем, что значение отношения w_1/γ при этом равно 0,275. При увеличении величины g в два раза при $g = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$ величина параметра ag^2/ω увеличится в четыре раза и составит 0,84. Значение отношения w_1/γ при этом составит 0,625.

В случае отбора подземных вод площадной системой скважин, равномерно распределенных в полосе $d_1 \leqslant x \leqslant d_2$, параллельной реке, передаточная функция редукции имеет вид (3.16). Подставляя в нее $p = i\omega$, находим выражения для частотных характеристик репродукции в виде

$$w(\omega) = (\chi\rho)^{-1} \sqrt{1 - 2e^{-\chi \cdot \rho\cos\theta} \cos(\chi\rho\sin\theta) + e^{-2\chi\rho\cos\theta}},$$

$$\psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{e^{\chi\rho\cos\theta} \sin\theta - \sin(\theta + \chi\rho\sin\theta)}{e^{\chi\rho\cos\theta} \cos\theta - \cos(\theta + \chi\rho\sin\theta)}, \qquad (5.2)$$

где $\chi = g \cdot d$, а величины ρ и θ даются формулами (5.1)

Вследствие более близкого расположения скважин водозабора к урезу реки, чем в случае отбора подземных вод линейным рядом, отстоящим от реки на расстоянии d, площадный отбор при прочих равных условиях оказывает существенно более выраженное влияние на внутригодовой режим

Таблица 31

Значения коэффициентов влияния и фазовых сдвигов в разложении периодической составляющей изменения расхода реки по условиям примера 2

d, м	500	1000	1500	2000	3000
w_0	0,8891	0,7944	0,7128	0,6428	0,5299
w_1	0,7970	0,6386	0,5153	0,4196	0,2892
w_2	0,7341	0,5429	0,4068	0,3115	0,2010
w_3	0,6881	0,4784	0,3405	0,2523	0,1613
$\psi_1°$	10	19	26	31	39
$\psi_2°$	15	26	34	39	43
$\psi_3°$	18	31	39	43	44

изменения поверхностного стока, что показывает приведенный ниже пример.

Пример 2. Изменение поверхностного стока при площадном водоотборе подземных вод с учетом сезонных колебаний водоотбора.

Геофильтрационные условия и график водоотбора те же, что и в примере 1.

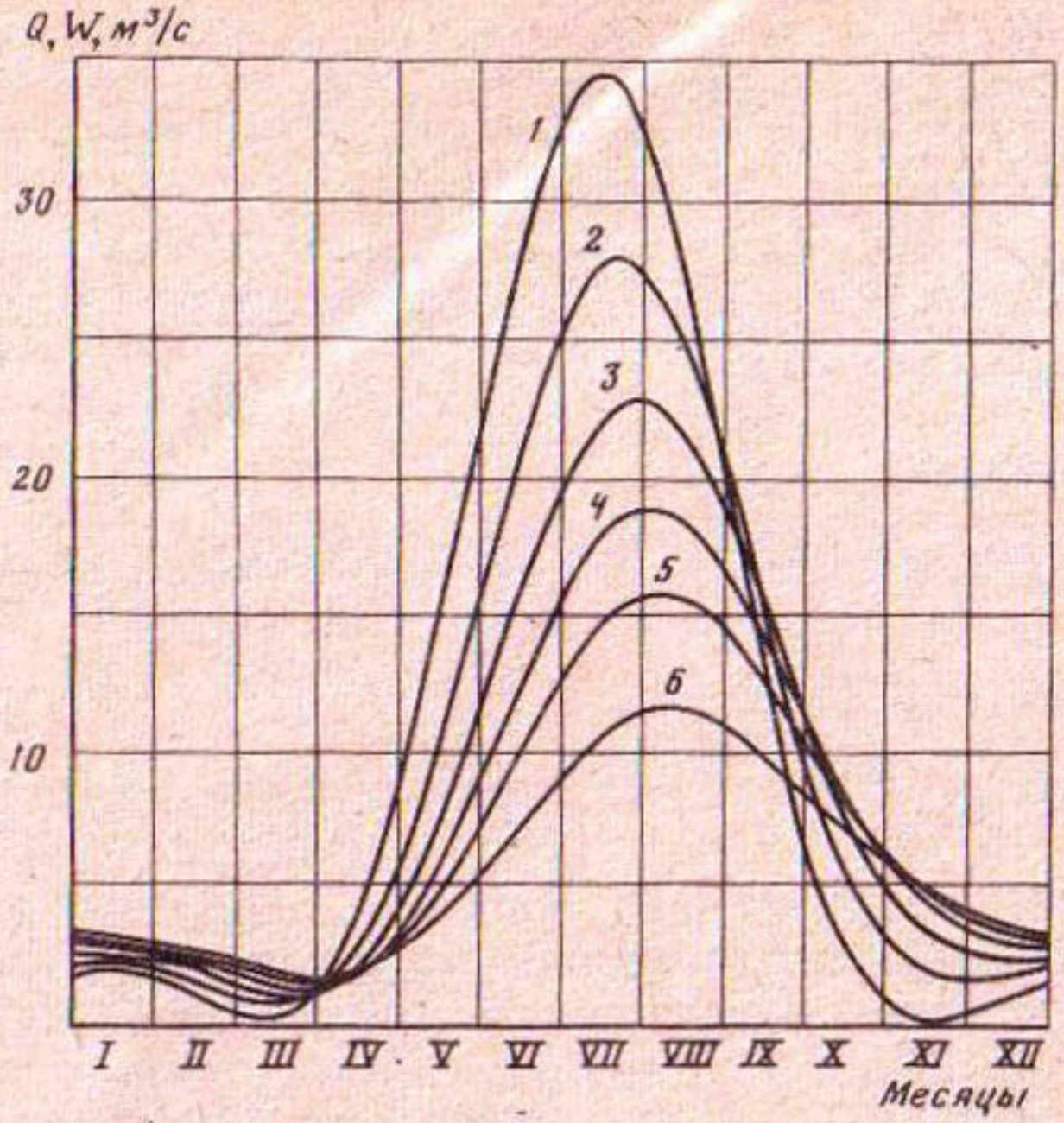
Задаваясь значением расстояния $d = 1000$ м, определяем при $t = 3650$ сут значение функции $w_0(t)$, используя данные примера 1:

$$w_0(t) = \frac{1}{0{,}48 \cdot 10^{-3} \cdot 1000}[\mathrm{erf}\,(0{,}48 \cdot 10^{-3} \sqrt{12000 \cdot 3650}) -$$

$$- D^*(0{,}0755; 0{,}48)] = 0{,}7944;$$

по формуле (1.60) величина апериодической составляющей равна $10{,}8 \times 0{,}7944 = 8{,}58$ (м^3/с).

На основной частоте колебаний $\omega = \omega_1 = 0{,}01721$ сут$^{-1}$ величины σ, ρ и θ вычислены в примере 1. По формулам (5.2) находим $w(\omega_1) = 0{,}6386$; $\psi(\omega_1) = 19°$. Амплитуда первой гармоники разложения изменения поверхностного стока при этом равна $0{,}6386 \cdot 15{,}4 = 9{,}84$ (м^3/с); фазовый угол $192° + 19° = 211°$. Значения коэффициентов влияния и фазовых сдвигов на других частотах, а также при других значениях d приведены в табл. (3.1). Графики временны́х зависимостей изменения поверхностного стока под влиянием подземных вод площадными водозаборами даны на рис. 5.4. Сравнение этих графиков с соответствующими графиками на рис. 5.1 обнаруживает, во-первых, существенно большее влияние площадного отбора на расход реки; во-вторых, максимальные значения изменения расхода реки наступают при площадном отборе с гораздо меньшим запаздыванием во времени, чем в случае линейного ряда. Например, при $d = 2000$ м пиковое значение сокращения расхода реки при отборе подземных вод линейным рядом наступает в конце сентября, в случае площадного отбора – в начале августа. Степень выраженности проявлений сезонных колебаний изменения поверхностного стока в случае площадного отбора также бо́льшая, чем при прочих равных условиях в случае отбора подземных вод линейным рядом. Так, при $d = 2000$ м отношение W_{max}/W_0



Р и с. 5.4. Временные зависимости величины отбора подземных вод и сокращения расхода реки в условиях примера 2

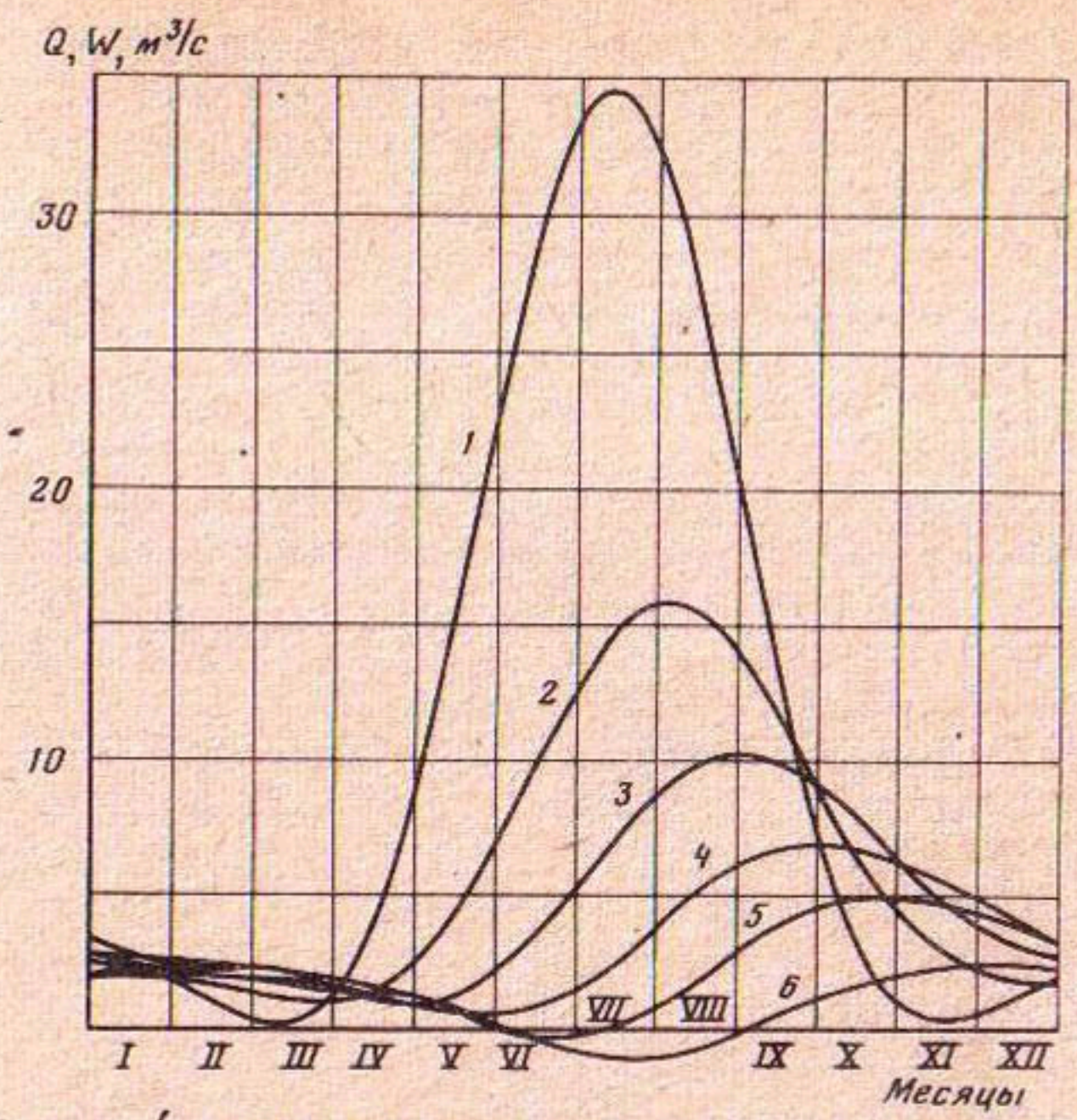
1 – зависимость $Q(t)$; *2–6* – зависимости $W(t)$ при различных значениях ширины полосы водоотбора d: *2* – d = 500 м, *3* – d = 1000 м, *4* – d = 1500 м, *5* – d = 2000 м, *6* – d = 3000 м

в случае линейного водозабора составляло 6,90/4,13 = 1,67; в случае площадного отбора величина этого отношения равна 15,8/6,94 = 2,28.

Последним из факторов, оказывающих влияние на внутригодовые колебания величины изменения поверхностного стока при отборе подземных вод, рассмотрен фактор обратной инфильтрации оросительных вод на полях. Если обозначить через $k_в$ коэффициент возврата – долю отобранных водозабором подземных вод, которая возвращается к эксплуатируемому горизонту, согласно принципу суперпозиции, передаточная функция изменения поверхностного стока будет иметь вид

$$U_W(p) = U_W^{(0)}(p) - k_в\, U_W^{(н)}(p), \qquad (5.3)$$

где $U_W^{(0)}(p)$ – передаточная функция изменения поверхностного стока под влиянием отбора подземных вод без учета обратной инфильтрации; $U_W^{(н)}(p)$ – передаточная функция изменения поверхностного стока под влиянием отбора подземных вод площадным водозабором, размещенным на площадях орошаемых массивов. Если отбор подземных вод ведется площадными водозаборами, размещенными непосредственно на орошаемых площадях, для учета возвратной инфильтрации, очевидно, достаточно умножить значения водоотбора на величину $(1 - k_в)$; при этом характер сезонных колебаний изменения поверхностного стока под влиянием отбора подземных вод не будет отличаться от случая площадного отбора. В условиях,



Р и с. 5.5. Временные характеристики величины отбора подземных вод и изменения расхода реки при отборе подземных вод линейным водозабором и обратной инфильтрации оросительных вод в полосе между рекой и водозабором при различных значениях ширины этой полосы

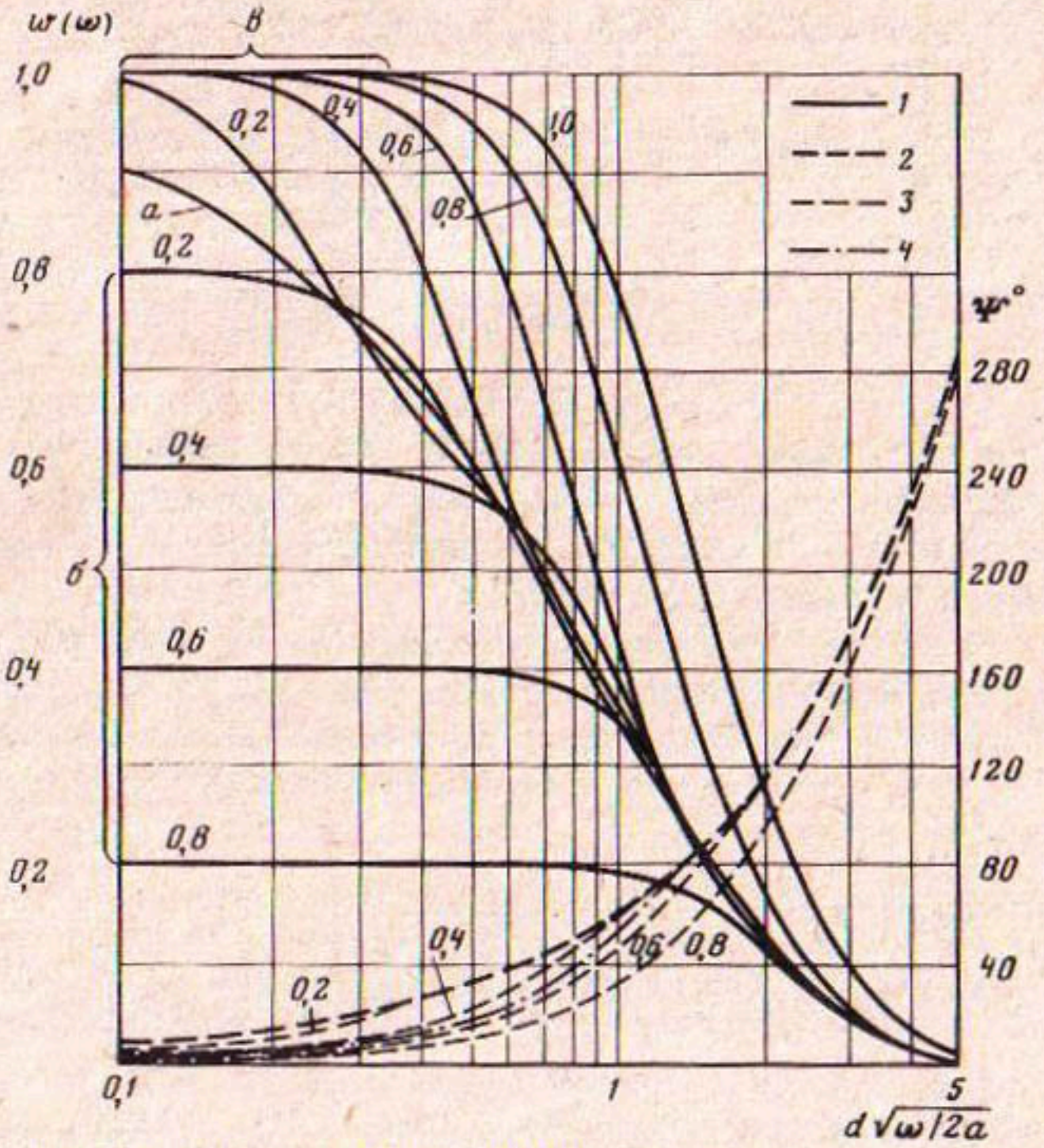
1 – зависимость $Q(t)$; *2–6* – зависимости $W(t)$ при значениях d: *2* – $d = 500$ м, *3* – $d = 1000$ м, *4* – $d = 1500$ м, *5* – $d = 2000$ м, *6* – $d = 3000$ м

когда размещение водозаборов не совпадает с размещением орошаемых площадей, характер внутригодовых колебаний изменения поверхностного стока может оказаться сильно искаженным. Это рассмотрено на примере условий отбора подземных вод однороднюго водоносного горизонта, ограниченного, с одной стороны, прямолинейной рекой, линейным водозабором, причем отбор подземных вод сопровождается инфильтрацией оросительных вод в полосе между водозабором и рекой. Передаточная функция $U_W^{(0)}(p)$ в этом случае определяется выражением (3.10), передаточная функция $U_W^{(н)}(p)$ – выражением (3.16). На рис. 5.5 изображены графики временны́х зависимостей $W(t)$, построенных по условиям примеров 1 и 2, причем принято, что $k_в = 0{,}25$ (из ординат графиков на рис. 5.1 вычитались умноженные на 0,25 значения ординат соответствующих графиков на рис. 5.4). Интенсивная инфильтрация оросительных вод в период максимального отбора, как показывают графики на рис. 5.4, оказывает влияние на расходы реки лишь с незначительным запаздыванием во времени, что вызывает соответствующее уменьшение величины изменения расхода реки в это время. Этим объясняется тот факт, что пиковые значения зависимостей $W(t)$ на рис. 5.5 существенно смещены вправо по сравнению с графиками на рис. 5.4. Возвратная инфильтрация в ряде случаев может обусловить достаточно сложный характер водообмена между эксплуати-

руемым водоносным горизонтом и рекой, когда вследствие отбора подземных вод в течение части года водность реки увеличивается, а в остальное время – уменьшается. Такие условия иллюстрируются, например, кривой *б* на рис. 5.5.

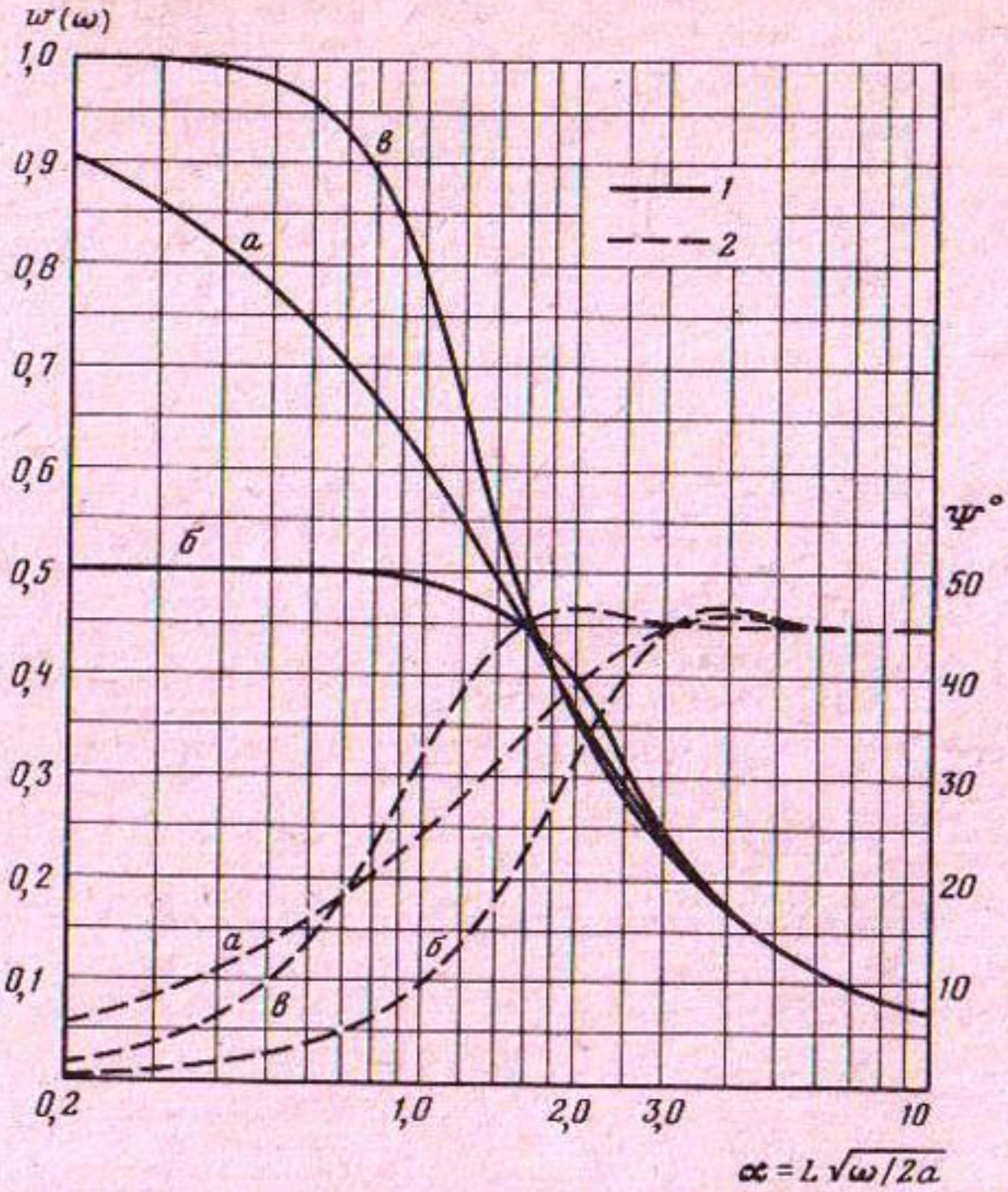
5.2. СХЕМЫ ПЛАСТОВ-ПОЛОС

Передаточные функции редукции для условий схем пластов-полос были получены в главе 3 с помощью канонических разложений (1.129), в которых собственные значения оператора фильтрации имеют вид (2.72) для случая пласта-полосы с границами питания и (2.73) для пласта-полосы с разнородными границами; выражения для предельных относительных редукций определяются соответственно формулами (3.72) и (3.78), выражения для коэффициентов C_k – формулами (3.71) и (3.77). В соответствии с перечисленными выражениями для параметров канонического разложения передаточной функции редукции были построены графики (рис. 5.6) для частотных характеристик редукции (на основании выражений (1.142)–(1.145). Эти графики приведены на рис. 5.6. Анализ этого



Р и с. 5.6. Частотные характеристики редукции в условиях пласта-полуполосы (*а*) и пластов-полос с двумя границами питания (*б*) и с разнородными границами (*в*)

1 – амплитудные характеристики; *2* – фазовая характеристика для условий пласта-полуполосы; *3* – фазовые характеристики для пласта-полосы с двумя границами питания; *4* – то же, для пласта-полосы с разнородными границами. Числа у кривых – значения относительного расстояния $\bar{d}$ между линейным водозабором и левой границей



Р и с. 5.7. Частотные характеристики редукции в условиях пласта-полуполосы (*а*), пласта-полосы с двумя границами питания (*б*) и с разнородными границами (*в*) при отборе подземных вод площадным водозабором в форме полосы шириной L

1 – амплитудные характеристики; *2* – то же, фазовые

рисунка показывает, что влияние границ пластов-полос сказывается главным образом на амплитудно-частотных характеристиках: соответствующие амплитудно-частотные характеристики пласта-полосы с границами питания проходят в целом ниже характеристик пласта с одной границей питания в плане и тем более ниже характеристик пласта-полосы с разнородными границами. Различия в значениях фазо-частотных характеристик пласта-полосы с границами питания и полуограниченного пласта наибольшие при $d\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \approx 1{,}0$ и составляют порядка 30°; что же касается фазо-частотных характеристик редукции для пласта-полосы с разнородными границами, то они не превосходят 10°.

В случае отбора подземных вод пласта-полосы равномерно распределенным площадным водозабором по всему пространству между границами выражение для передаточной функции редукции также представляется в виде канонического разложения вида (1.129), где значения предельных относительных редукций составят соответственно 0,5 для условий пласта-полосы с двумя границами питания и 1,0 – для пласта-полосы с разнородными границами. Коэффициенты разложения C_k будут иметь вид соответственно (3.71) и (3.77). Результат расчета частотных харак-

теристик редукции при отборе подземных вод площадным водозабором приведен на рис. 5.7. Анализ этого рисунка приводит к следующим выводам о характере поведения частотных характеристик редукции при отборе подземных вод площадными водозаборами по сравнению с частотными характеристиками редукции для условий полуограниченного пласта. Во-первых, амплитудно-частотные характеристики имеют выраженное плато, находящееся в условиях пласта-полосы с двумя границами питания в области значений $d\sqrt{\frac{\omega}{2a}}$, не превосходящих единицы; для пласта-полосы с разнородными границами плато амплитудной характеристики обрывается начиная со значения $d\sqrt{\frac{\omega}{2a}}$, равного примерно 0,5. При значениях $d\sqrt{\frac{\omega}{2a}}$, превосходящих 1,6 ...2,0, амплитудно-частотные характеристики редукции всех трех систем практически одинаковы. Фазо-частотные характеристики всех трех систем имеют пределом значение 45°, однако в случае пласта-полосы с разнородными границами это значение достигается при $d\sqrt{\frac{\omega}{2a}} = 1{,}6$, в то время как в случаях пласта-поросы с границами питания и полуограниченного пласта – при $d\sqrt{\frac{\omega}{2a}} = 0{,}3$.

Глава 6

ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ СИСТЕМ СОВМЕСТНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОДЗЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОД

Под влиянием изменчивости гидрометеорологических условий величина водопотребления орошаемых культур испытывает от года к году случайные колебания. Если в условиях засушливого климата Средней Азии и Южного Казахстана величина коэффициента вариации, характеризующая случайные отклонения среднегодовых величин водопотребления сельскохозяйственных культур, составляет 0,1–0,2, то в зоне неустойчивого увлажнения эти величины значительно выше и достигают значений 0,4–0,5 вдоль границы степной и лесостепной зон [13]. В силу названных причин величина отбора подземных вод в том случае, когда они являются основным источником орошения, также будет подвержена случайным вариациям. Однако изменчивость величины подземного водоотбора проявляется в значительно большей степени, если подземные воды выступают в качестве дополнительного к поверхностному стоку источника оросительных вод, так как изменчивость гидрометеорологических условий существенно усугубляется изменчивостью самого поверхностного стока.

Совместное использование ресурсов поверхностных и подземных вод проектируется за рубежом (США, Индия и другие страны) [71] уже многие десятилетия. Не является это новой идеей и для СССР: такие предло-

жения выдвигались еще в 50-е годы и даже ранее. Вместе с тем теоретические обоснования совместного использования этих ресурсов как за рубежом, так и в СССР разработаны вплоть до настоящего времени недостаточно, что обусловливает актуальность соответствующих исследований. При этом одним из основных становится вопрос о рациональном размещении водозаборных скважин и оптимальном режиме их эксплуатации. Критерием эффективности работы системы совместного использования ресурсов поверхностных и подземных вод могут быть различные показатели экономического, технологического, природоохранного и другого характера. Разработки, осуществляемые специалистами США, где подобные исследования получили наибольшее развитие, основываются, как правило, на экономических [71, 74, 77] или технологических критериях. При этом следует отметить, что на режим отбора подземных вод значительное влияние оказывают правовые ограничения, обусловленные особенностями водного законодательства США [71].

Не принижая значения экономических показателей эффективности работы систем совместной эксплуатации поверхностных и подземных вод, необходимо заметить, что их использование не всегда оправдано, особенно на стадии предварительных разработок. Экономические показатели весьма сильно зависят от особенностей каждого конкретного объекта, что не позволяет сравнивать эффективность работы систем, находящихся в различных природных и экономических условиях. Поэтому для оценки эффективности функционирования систем совместного использования поверхностных и подземных вод для орошения предлагается более широкий показатель, а именно надежность, понимаемая как вероятность безотказной работы системы в течение заданного срока. Будучи по своей природе вероятностной характеристикой работы системы совместного использования, надежность определяется совокупностью вероятностных характеристик водоотбора и динамических характеристик элементов рассматриваемой системы. В главе 1 были охарактеризованы основные параметры геофильтрационных систем, определяющих их реакции на стохастический водоотбор. В настоящей главе рассматриваются вероятностные характеристики водоотбора, а также динамико-стохастические параметры геофильтрационных систем в ряде конкретных случаев и выводятся основные расчетные зависимости.

6.1. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ГЕОФИЛЬТРАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Для оценки надежности работы системы совместного использования поверхностных и подземных вод необходимо прежде всего задаться вероятностными характеристиками величины водоотбора подземных вод. Для этого, в свою очередь, следует указать закон управления их отбором, т. е. правило, по которому в каждый момент времени в зависимости от сложившейся ситуации можно определить необходимое количество подземных вод, которое подлежит откачке.

В настоящее время в СССР возможности отбора подземных вод для орошения регламентируются действующим в стране водным законодательством. Например, статья 51 Водного кодекса УзССР [12] гласит: "Исполь-

зование подземных вод питьевого качества для нужд, не связанных с питьевым и бытовым водоснабжением, как правило, не допускается. В районах, где отсутствуют необходимые поверхностные водные источники и имеются достаточные запасы подземных вод питьевого качества, органы по регулированию использования и охране вод могут разрешить использование этих вод для целей, не связанных с питьевым и бытовым водоснабжением". В соответствии с изложенным правовым ограничением на отбор подземных вод для орошения следует считать, что отбор их для орошения в периоды, когда потребность в воде для ирригации может быть удовлетворена с помощью ресурсов поверхностных вод, не может иметь места. Более того, очевидно, что и в условиях, когда ресурсы поверхностного стока не могут покрыть потребности в оросительной воде, величина отбора подземных вод не должна превышать дефицита водопотребления.

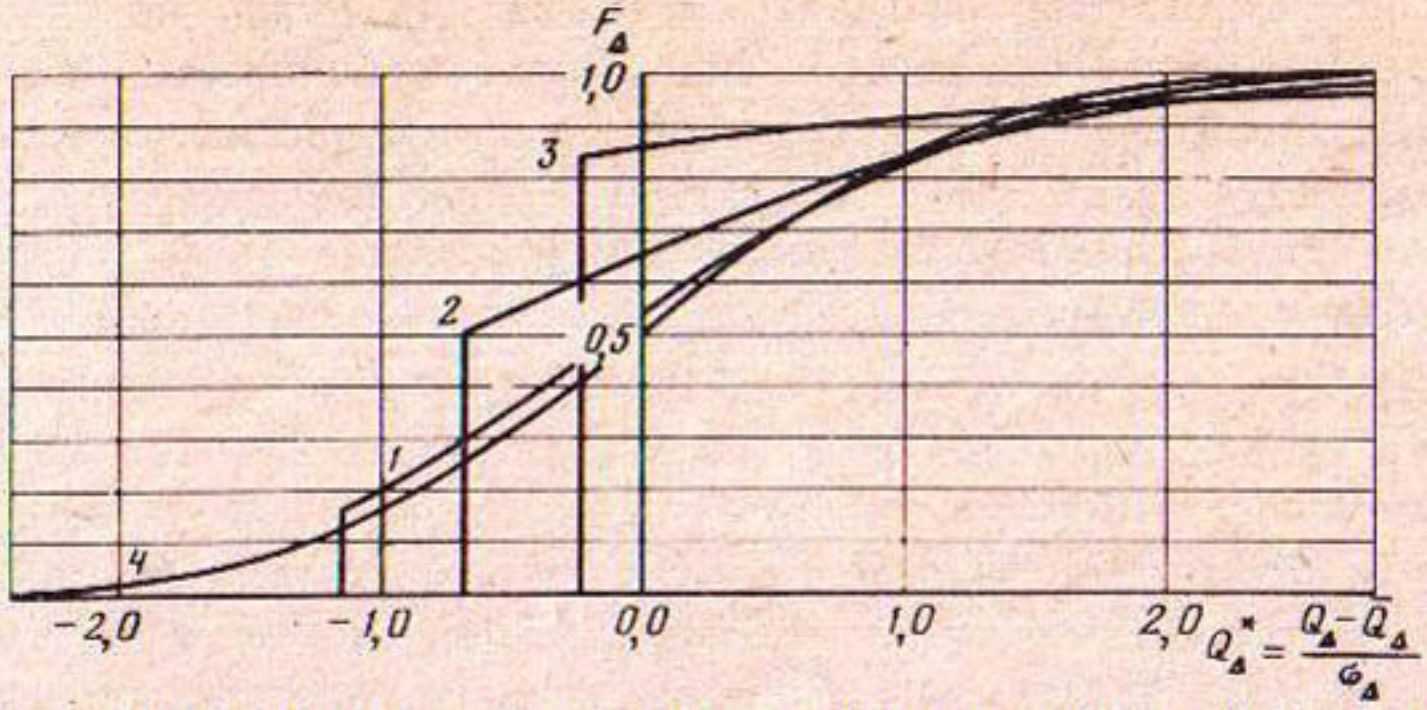
Более сложным представляется вопрос о том, какую часть дефицита водопотребления следует покрывать за счет подземных вод. В смысле надежности функционирования непокрытые дефициты водопотребления равноправны независимо от своей глубины в том смысле, что даже самый малый дефицит водопотребления, не ликвидированный с помощью суммарных ресурсов поверхностных и подземных вод, приводит к ситуации "отказа" системы, т.е. к уменьшению надежности. Поэтому с точки зрения надежности функционирования для достижения оптимальной в этом смысле ситуации следует стремиться в любом случае покрывать отбором подземных вод всю величину дефицита, оставшуюся после использования ресурсов поверхностного стока, не учитывая возможности возникновения дефицитов большей глубины в будущем.

Резюмируя все сказанное, заключаем, что для целей управления системой совместного использования поверхностных и подземных вод с применением в качестве показателя эффективности критерия надежности в качестве закона управления дебитом водозаборов может использоваться зависимость

$$Q_{\Delta} = \begin{cases} Q_{\text{п}} - Q, \text{ если } Q_{\text{п}} \geqslant Q; \\ 0, \text{ если } Q_{\text{п}} < Q, \end{cases} \tag{6.1}$$

где Q_{Δ} – величина отбора подземных вод; Q – мгновенное или осредненное за определенный период времени, для которого находится величина Q_{Δ}, значение расхода поверхностного стока; $Q_{\text{п}}$ – выраженное в единицах расхода мгновенное или аналогичным образом осредненное значение потребности в воде. В зависимости (6.1) не учитывается редукция поверхностного стока под влиянием эксплуатационного отбора подземных вод. Несколько ниже будут рассмотрены условия, учитывающие и редукцию поверхностного стока.

Зависимость (6.1) имеет в качестве следствия факт, что вероятностные характеристики величины отбора подземных вод будут зависеть от вероятностных характеристик поверхностного стока и водопотребления. Если в расчет принимаются среднегодовые значения указанных величин, задача определения всех вероятностных характеристик случайной величины Q_{Δ} по характеристикам величин Q и $Q_{\text{п}}$ может быть решена с помощью разработанных в теории вероятностей способов [10]. В многолетнем



Р и с. 6.1. **Графики функции распределения дебита, определяемой формулой (6.2) при различных значениях параметра u**

1 – $u = 1{,}0$; *2* – $u = 0$; *3* – $u = -1{,}0$; *4* – **график функции нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией**

разрезе выборка среднегодовых величин ресурсов поверхностного стока изучаемого участка может быть описана соответствующим законом распределения вероятностей. Сток большинства рек аридной зоны СССР, а также среднегодовые нормы водопотребления на орошение характеризуются невысокими значениями коэффициента вариации среднегодовых расходов, не превышающими, как правило, 0,25–0,30. Это обстоятельство позволяет применять нормальный закон распределения к описанию многолетней изменчивости поверхностного стока и водопотребления. Если принять нормальный закон распределения для случайной величины поверхностного стока, функция распределения дебита $F_\Delta(Q_\Delta)$ выразится в виде

$$F_\Delta(Q_\Delta) = \begin{cases} 1 - \Phi^*(u - Q_\Delta/\sigma_Q), Q_\Delta \geqslant 0, \\ 0, \quad Q_\Delta < 0, \end{cases} \tag{6.2}$$

где

$$u = \frac{Q_\text{п} - Q}{\sigma_Q}. \tag{6.3}$$

– нормированная величина потребления в системе случайных величин поверхностного стока и водопотребления; $\Phi^*(z)$ – нормальная функция распределения; $\bar{Q}$, $\bar{Q}_\text{п}$ – математические ожидания соответственно расхода поверхностного стока и водопотребления,

$$\sigma_Q = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_\text{п}^2} \tag{6.4}$$

– среднеквадратичное отклонение разности между величиной поверхностного стока и водопотребления (предполагается отсутствие корреляции между этими величинами); σ – дисперсия поверхностного стока; $\sigma_\text{п}$ – дисперсия водопотребления.

На рис. 6.1 изображены графики функции распределения дебита при нескольких значениях параметра u, приведенные к нормированной случайной величине $Q_\Delta^* = (Q_\Delta - \bar{Q}_\Delta)/\sigma_\Delta$, где $\bar{Q}_\Delta$ – математическое ожидание; σ_Δ – среднеквадратичное отклонение дебита. Эти графики

показывают, что, начиная примерно со значения $Q_\Delta^* = 1{,}0–1{,}2$, распределение дебита приближается к нормальному при всех значениях параметра u. Кроме того, чем выше величина нормированного водопотребления, тем лучшее совпадение с нормальным законом наблюдается на всем интервале изменения дебита. При значениях параметра u, превышающих 0,7–0,8, распределение дебита, представляющее практический интерес только в области высоких значений Q_Δ, может считаться нормальным. Не учитываемые в рассматриваемом построении факторы, как-то: возможная коррелированность потребности орошаемых культур в воде с поверхностным стоком, искусственное восполнение за счет поверхностного стока в невегетационные периоды запасов подземных вод, оказывают определенное влияние на потребление дебита, проявляющееся главным образом в размыве скачка этой функции при $Q_\Delta = 0$.

Моменты распределения дебита выражаются с помощью формул

$$\bar{Q}_\Delta = \sigma_Q F_1(u), \tag{6.5}$$

$$\sigma_\Delta = \sigma_Q F_2(u), \tag{6.6}$$

где $\bar{Q}_\Delta$ – математическое ожидание, σ_Δ – среднеквадратичное отклонение дебита, а функции F_1 и F_2 определены выражениями

$$F_1(u) = u + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ierfc} \frac{u}{\sqrt{2}};$$

$$F_2(u) = \sqrt{F_3(u) - F_1^2(u)}; \tag{6.7}$$

$$F_3(u) = (1+u^2)\,\Phi^*(u) + \frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}.$$

Значения функций $F_1(u)$, $F_2(u)$ приведены в Приложении 4. Автокорреляционная функция дебита, характеризующегося ступенчатой зависимостью от времени, имеет вид [50]

$$K_\Delta(\xi) = \sigma_\Delta^2 \left(1 - \frac{\xi}{\tau}\right), \tag{6.8}$$

а спектральная функция

$$L_\Delta(\omega) = \frac{2\sigma_\Delta^2 \tau}{\pi} \left(\frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau}\right)^2. \tag{6.9}$$

При этом предполагается, что высота каждой ступеньки дебита независима от высоты остальных ступенек.

Поскольку распределение величины водоотбора подземных вод–входного возмущения линейной системы – отлично от нормального, этим же характеризуются и распределения отклонений положения и редукции поверхностного стока. Однако существует достаточно обширный класс линейных систем, в которых происходит так называемая "нормализация реакции", при которой распределение выходной величины ближе к нормальному, нежели распределение возмущения. С качественной стороны

такие системы характеризуются значительной инерционностью, т.е. существенным влиянием значений входного возмущения, соответствующих предыстории момента. Свойство инерционности в различных конкретных условиях может определяться различными ограничениями, налагаемыми на характеристики как случайного процесса водоотбора, так и геофильтрационной системы. Необходимым условием инерционности системы служат при заданном виде спектральной функции дебита существование и конечная величина интеграла (1.72) при $\xi = 0$, определяющая дисперсию процесса на выходе системы.

В случае принятой в рассматриваемой модели ступенчатой зависимости дебита во времени, характеризующейся спектральной функцией вида (6.9), как нетрудно показать, необходимо существование интеграла в бесконечных пределах от квадрата амплитудно-частотной характеристики системы. Из результатов теории преобразования Фурье вытекает, что это требование в основном сводится к условию стабилизированности системы, т.е. ограниченности величины выходной реакции при постоянстве во времени входного возмущения. Теоретически возможны случаи, характеризующиеся неограниченным ростом реакции при постоянстве возмущения и, несмотря на это, существованием интеграла в бесконечных пределах от квадрата амплитудно-частотной характеристики. Такие случаи, однако, по-видимому, не реализуются среди систем геофильтрационной природы. Что касается систем редукции, то они отличаются значительной инерционностью и тем более удовлетворяют требованию стабилизированности: сокращение поверхностного стока при постоянном дебите отбора ограничено величиной последнего. При разделении систем понижения на стабилизированные и нестабилизированные в числе последних окажутся такие распространенные схемы, как схемы одиночного, линейных, площадных водозаборов, эксплуатирующих неограниченные водоносные пласты в условиях отсутствия компенсационного питания, а также всевозможные схемы полностью и частично ограниченных пластов, вдоль границ которых заданы условия постоянства расхода. В силу сказанного выше о системах такого рода приходится констатировать, что распределение отклонений понижения на их выходе будет иметь достаточно сложный вид, характеризующийся отсутствием дисперсии, что свидетельствует о возможной некорректности ступенчатого представления временной зависимости дебита в таких случаях. Во всяком случае, этот вопрос следует считать предметом дальнейших исследований.

Если, как это бывает в большинстве случаев, статистика среднегодовых значений ресурсов поверхностного стока и водопотребления не дает адекватной картины ситуации в системе и требуется учет внутригодовых распределений указанных величин, задача по определению вероятностных характеристик процессов в системе становится более сложной. Здесь принимается, что дефицит водопотребления случайной глубины каждый год имеет место в течение ограниченного периода времени, начало и конец которого варьирует от года к году случайным образом. Поскольку в действительности гидрограф дефицита водопотребления представляет собой разность гидрографов водопотребления и поверхностного стока, абсциссы начала и конца дефицитного периода будут зависеть от глубины дефицита: при больших ее значениях, когда водопотребление значительно превосходит

ресурсы поверхностного стока, более продолжительным будет и период дефицита, который в этих условиях начинается раньше, а окончится позже, и наоборот. Таким образом, между глубиной дефицита и его продолжительностью в реальных условиях наблюдается положительная корреляция. Значения коэффициента корреляции между глубиной дефицгта и его продолжительностью в реальных условиях составляют, как правило, 0,4 ... 0,6. Эти величины следует признать значимыми, но для приближенных расчетов представляется возможным иногда пренебречь указанной корреляцией.

Рассмотрим задачу об определении автокорреляционной функции водоотбора $K_\Delta(\xi)$ без учета корреляции между глубиной дефицита и его продолжительностью, а также между значениями дефицитов в смежные годы. Очевидно, что при фиксированных сроках начала и конца дефицитного периода, t_1 и t_2 соответственно, значение $K_\Delta(\xi)$ предствляет собой произведение величины дисперсии водоотбора σ_Δ^2 на вероятность того, что отрезок длины ξ попадает обоими концами в промежуток $[t_1, t_2]$. Последняя по формуле геометрической вероятности равна $1 - \xi/(t_2 - t_1)$, при $0 \leqslant \xi \leqslant t_2 - t_1$ и нулю при $\xi > t_2 - t_1$. Если теперь допустить, что продолжительность дефицитного периода $t_\Delta = t_2 - t_1$ представляет собой случайную величину с функцией распределения $f_\Delta(t_\Delta)$, значение $K_\Delta(\xi)$ будет равно

$$K_\Delta(\xi) = \sigma_\Delta^2 \int_\tau^\infty f_\Delta(t_\Delta)\left(1 - \frac{\xi}{t_\Delta}\right) dt_\Delta; \qquad (6.10)$$

если при этом $F_\Delta(t_\Delta)$ – интегральная функция распределения случайной величины t_Δ,

$$K_\Delta(\xi) = \sigma_\Delta^2 \left[1 - F_\Delta(\xi) - \xi \int_\xi^\infty f_\Delta(t_\Delta) \frac{dt_\Delta}{t_\Delta}\right]. \qquad (6.11)$$

Вопрос о предпочтительности применения того или иного конкретного распределения для описания вероятностных свойств времени представляется открытым. В качестве примера рассмотрим случай равномерного распределения величины t_Δ в интервале $[t'_\Delta, t''_\Delta]$, которое может в ряде случаев довольно близко соответствовать реальным данным. При сделанном предположении величина $K_\Delta(\xi)$ определяется равенствами

$$K_\Delta(\xi) = \begin{cases} \sigma_\Delta^2\left[1 - \dfrac{\xi}{t''_\Delta - t'_\Delta} \ln \dfrac{t''_\Delta}{t'_\Delta}\right] \text{ при } 0 \leqslant \xi \leqslant t'_\Delta, \\ \sigma_\Delta^2\left[\dfrac{t''_\Delta - \xi}{t''_\Delta - t'_\Delta} - \dfrac{\xi}{t''_\Delta - t'_\Delta} \ln \dfrac{t''_\Delta}{\xi}\right], \text{ при } t'_\Delta < \xi \leqslant t''_\Delta, \\ 0, \; t''_\Delta < \xi. \end{cases} \qquad (6.12)$$

Графики на рис. 6.2 дают представление о характере поведения функции $K_\Delta(\xi)$ при равновмерном распределении t_Δ: расширение области возможных значений продолжительности дефицитного периода влечет за собой сглаживание формы автокорреляционной функции.

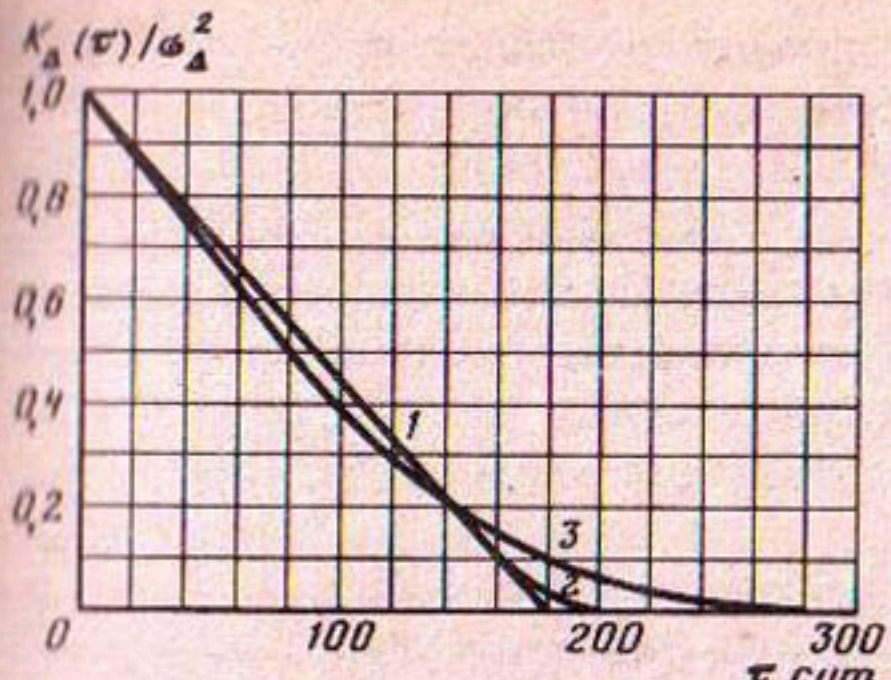


Рис. 6.2

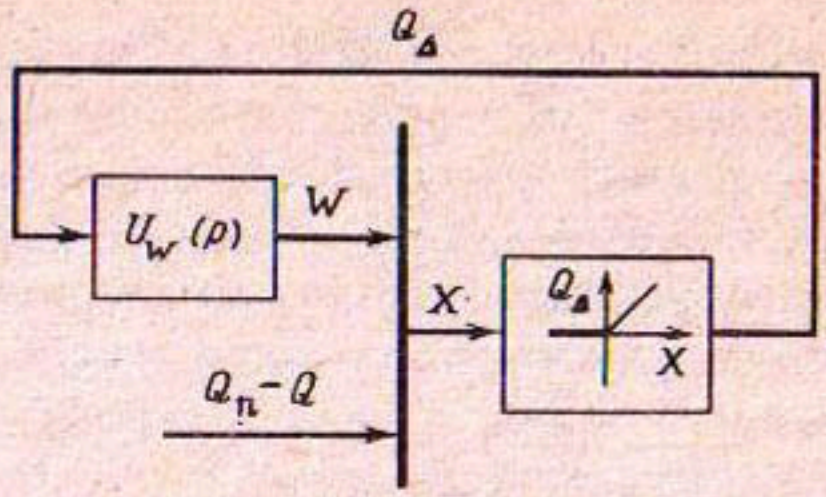


Рис. 6.4

Рис. 6.2. Графики корреляционных функций отбора подземных вод

1 – при фиксированном значении времени дефицита, $t_\Delta = 180$ сут; *2* – при равномерном распределении продолжительности водоотбора, $t'_\Delta = 160$ сут, $t''_\Delta = 200$ сут; *3* – то же, при $t'_\Delta = 80$ сут, $t''_\Delta = 280$ сут

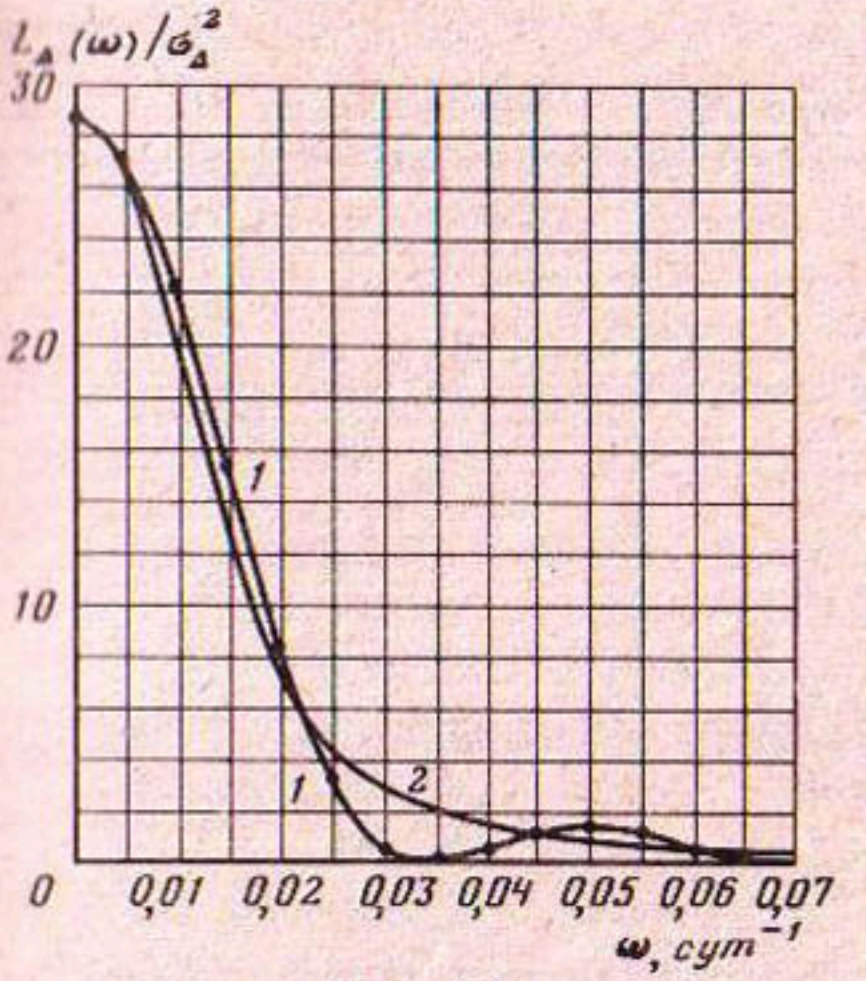


Рис. 6.3

Рис. 6.3. Графики спектральных плотностей отбора подземных вод

1 – при фиксированном времени дефицита, $t_\Delta = 180$ сут; *2* – при равномерном распределении продолжительности водоотбора $t'_\Delta = 80$ сут, $t''_\Delta = 280$ сут. Темные кружки соответствуют равномерному распределению времени дефицита при $t'_\Delta = 160$ сут, $t''_\Delta = 200$ сут

Рис. 6.4. Структурная схема системы совместного использования поверхностных и подземных вод

Выражение для спектральной плотности $L_\Delta(\omega)$, соответствующей автокорреляционной функции (6.10), имеет вид

$$L_\Delta(\omega) = \frac{2\sigma_\Delta^2}{\pi} \int_0^\infty f_\Delta(t_\Delta) \left[\frac{\sin(\omega t_\Delta/2)}{\omega t_\Delta}\right]^2 t_\Delta \, dt_\Delta. \qquad (6.13)$$

Для рассмотренного выше случая равномерного распределения

$$L_\Delta(\omega) = \frac{\sigma_\Delta^2}{\pi\omega^2 (t''_\Delta - t'_\Delta)} \left[\ln \frac{t''_\Delta}{t'_\Delta} + \mathrm{Ci}(\omega t'_\Delta) - \mathrm{Ci}(\omega t''_\Delta)\right], \qquad (6.14)$$

где $\mathrm{Ci}(z)$ – функция интегрального косинуса [52]. На рис. 6.3 изображены графики спектральной плотности, соответствующие различным значениям времен t'_Δ, t''_Δ. Их сравнение показывает, что различия в значениях функций $L_\Delta(\omega)$, особенно в низкочастотной области, имеющей наибольшее значение, еще меньше, чем различия в значениях функций $K_\Delta(\xi)$, и для большинства реально встречающихся случаев можно принимать, что функция $L_\Delta(\omega)$ соответствует условиям фиксированного значения t_Δ и выражается формулой (6.9).

Формулы (6.5), (6.6), где величина параметра u выражается с помощью равенства (6.3), дают, как было оговорено, выражения для вероятностных характеристик отбора подземных вод в условиях, когда редукцией поверхностного стока в пределах системы можно пренебречь. Вместе с тем практические потребности определяют актуальность решения этой задачи и с учетом изменения ресурсов поверхностного стока при отборе подземных вод. На рис. 6.4 приведена общая структурная схема системы совместного использования поверхностных и подземных вод. Положительная обратная связь, отображенная на схеме, выражается в усилении редукции поверхностного стока при увеличении отбора подземных вод и, как следствие, при неизменных характеристиках водопотребления и в возрастании потребности в дальнейшем отборе подземных вод. Случайная величина X, равная сумме дефицита водопотребления $(Q_{\text{п}} - Q)$ и изменения поверхностного стока W, поступает на вход нелинейного звена; выходная величина этого звена Q_{Δ} представляет собой дебит водозаборов подземных вод; она поступает на вход линейного блока редукции с передаточной функцией $U_W(p)$. Легко показать, что математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение величины отбора подземных вод будут и в этом случае определяться формулами (6.5), (6.6), в которых параметр u будет иметь следующее выражение:

$$u = \frac{\bar{Q}_{\text{п}} - \bar{Q} + \bar{W}}{\sigma_X}, \tag{6.15}$$

а среднеквадратичное отклонение случайной величины X определяется равенством

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_{\text{п}}^2 + 2\rho\sigma_W\sqrt{\sigma^2 + \sigma_{\text{п}}^2} + \sigma_W^2}. \tag{6.16}$$

В формулах (6.15), (6.16) характеристики редукции $\bar{W}$ и σ_W выражаются через характеристики отбора подземных вод и характеристики, связанные с передаточной функцией редукции, а именно

$$\bar{W} = \bar{Q}_{\Delta}\, w_0(t), \tag{6.17}$$

$$\sigma_W = \sigma_{\Delta}\sqrt{\Omega_W}, \tag{6.18}$$

где $w_0(t)$ – функция относительной редукции на конец расчетного срока; Ω_W – коэффициент точности блока редукции, представляющий собой отношение дисперсии редукции к дисперсии водоотбора. Из формулы (1.81) следует, что эта величина не зависит от дисперсии водоотбора подземных вод и при спектральной плотности частного вида (6.9) выражается интегралом вида

$$\Omega_W = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin z/2}{z}\right)^2 w^2\left(\frac{z}{\tau}\right)dz, \tag{6.19}$$

где $w(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика редукции.

Уравнения (6.5), (6.6) с учетом равенств (6.15)–(6.18) представляют собой систему двух уравнений относительно неизвестных $\bar{Q}_{\Delta}$, σ_{Δ}. Решая эту систему каким-либо приближенным способом, найдем вероятностные характеристики суммарного дефицита в системе.

Вообще говоря, представление величин математического ожидания и среднеквадратичного отклонения редукции в виде (6.17), (6.18) соответственно не является строгим, так как оно не отражает такого факта, что к интересующему нас моменту времени t редукция поверхностного стока развивалась под действием переменного во времени математического ожидания водоотбора, что, в свою очередь, является следствием наличия в системе положительной обратной связи (см. схему на рис. 6.4). Иначе говоря, рассматриваемая система относится к числу нестационарных нелинейных систем. Процессы в таких системах отличаются большей сложностью для анализа и рассматриваются, в частности, в работе [44]. Вопросы анализа стохастической динамики систем совместного использования поверхностных и подземных вод с учетом их нелинейности и нестационарности являются предметом дальнейших исследований, которые должны привести к уточнению результатов, соответствующих рассматриваемому здесь квазистационарному приближению.

6.2. НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМ СОВМЕСТНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ПОДЗЕМНЫХ ВОД И МЕТОДЫ ЕЕ ОЦЕНКИ

Надежностью системы в технических дисциплинах принято называть вероятность того, что она выполняет свои функции в соответствии с предъявляемыми требованиями в течение заданного времени [4]. Применительно к системе совместного использования поверхностных и подземных вод под надежностью следует понимать вероятность бездефицитной работы системы в течение расчетного срока t. Надежность, очевидно, есть вероятность логической суммы двух событий, первое из которых состоит в том, что на протяжении всего расчетного срока понижение уровня подземных вод не превысит допустимого значения, второе – в покрытии потребности орошаемых культур в воде за счет ресурсов поверхностного стока. Очевидно, система функционирует без дефицита, если реализуется хотя бы одно из этих событий. По формуле суммы вероятностей [10] величина надежности оказывается равной сумме вероятностей указанных событий за вычетом вероятности их совместного осуществления.

В рамках принятого в настоящей работе нормального распределения вероятность первого из событий равна $\Phi^*((S_{доп} - \bar{S})/\sigma_S)$; вероятность второго представляет собой гидрологическую обеспеченность расхода поверхностного стока в размере расхода водопотребления $\bar{Q}_п$, т.е. $\nu_п = 1 - \Phi^*(u)$. Вероятность возможности одновременного покрытия потребности в воде за счет обоих источников определяется как произведение гидрологической обеспеченности на условную вероятность бесперебойной работы водозабора подземных вод при условии, что дебит отбора становится равным нулю, а именно $\nu_п Pr\{\bar{S} + \mathring{S} < S_{доп} | Q_\Delta = 0\}$. Последняя величина оценивается на основании совместной функции распределения дебита и отклонения понижения. В рамках принятых упрощений это распределение нормально и характеризуется, помимо моментов дебита и отклонения понижения, коэффициентом корреляции между ними ρ. В этом случае, резюмируя приведенные выводы, находим формулу для надежности сис-

темы P:

$$P = \Phi^*\left(\frac{S_{\text{доп}} - \bar{S}}{\sigma_S}\right) + \nu_{\text{п}}\left[1 - \Phi^*\left(\frac{S_{\text{доп}} - \bar{S} + \rho(\sigma_S/\sigma_\Delta)\bar{Q}_\Delta}{\sigma_S\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right], \qquad (6.20)$$

где $S_{\text{доп}}$ – допустимое понижение уровня. Поскольку при выводе формулы (6.20) были использованы самые общие предположения, она справедлива в случае любой гидрогеологической схемы, когда применение нормального закона оправдано; в прочих случаях, очевидно, необходимо искать другие зависимости.

Входящие в формулу надежности вероятностные параметры понижения, а именно его математическое ожидание на заданный расчетный срок и среднеквадратичное отклонение, а также коэффициент корреляции между понижением и величиной отбора подземных вод, определяются по методам, кратко охарактеризованным в 1.2. При этом формула (1.80), дающая выражение для среднеквадратичного отклонения понижения, может быть преобразована к виду

$$\sigma_S = \frac{\sigma_\Delta}{T_*}\sqrt{\Omega_S}, \qquad (6.21)$$

где Ω_S – коэффициент точности понижения – величина, аналогичная введенному в предыдущем параграфе коэффициенту точности редукции. При спектральной плотности вида (6.9) выражение для этого коэффициента примет вид

$$\Omega_S = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin z/2}{z}\right)^2 R^2\left(\frac{z}{\tau}\right)dz. \qquad (6.22)$$

Точно так же и выражение для коэффициента корреляции $\rho_{\Delta S}$ между понижением и величиной водоотбора может быть выражено в виде

$$\rho_{\Delta S} = \frac{4}{\pi\sqrt{\Omega_S}}\int_0^\infty \left(\frac{\sin z/2}{z}\right)^2 R\left(\frac{z}{\tau}\right)\cos\Psi\left(\frac{z}{\tau}\right)dz, \qquad (6.23)$$

который вытекает из формул (1.82) и (6.9).

Интегралы в формулах (6.22), (6.23), а также в формуле (6.19), выражающей зависимость коэффициента точности, имеют весьма сложный вид. Для вычисления этих интегралов предлагается приближенная квадратурная формула, основанная на формуле интегрирования Гаусса–Лагерра [52] и выражении (6.9) для спектральной плотности случайного процесса водоотбора подземных вод. Эта формула для коэффициента точности понижения имеет вид

$$\Omega_S \approx \sum_{i=1}^{N} c_i R^2\left(\frac{z_i}{\tau}\right), \qquad (6.24)$$

Таблица 32

Значения параметров z_i, c_i квадратурной формулы

$N = 4$

i	1	2	3	4
z_i	0,3225	1,7458	4,5366	9,3951
c_i	0,2628	0,5023	0,1320	0,0936

$N = 6$

i	1	2	3	4	5	6
z_i	0,2228	1,1889	2,9927	5,7751	9,8375	15,9829
c_i	0,1818	0,3869	0,3196	0,0081	0,0616	0,0384

$N=8$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
z_i	0,1703	0,9037	2,2511	4,2667	7,0459	10,7585	15,7407	22,8631
c_i	0,1390	0,3073	0,3417	0,1190	0,0114	0,0290	0,0299	0,0178

где

$$c_i = \frac{4}{\pi} \frac{\sin^2 z_i/2}{z_i^2} e^{z_i} w_i; \tag{6.25}$$

z_i — узлы; w_i — веса квадратурной формулы Гаусса–Лагерра [52]. В табл. 32 приводятся значения параметров z_i и c_i формулы (6.24) при некоторых значениях N.

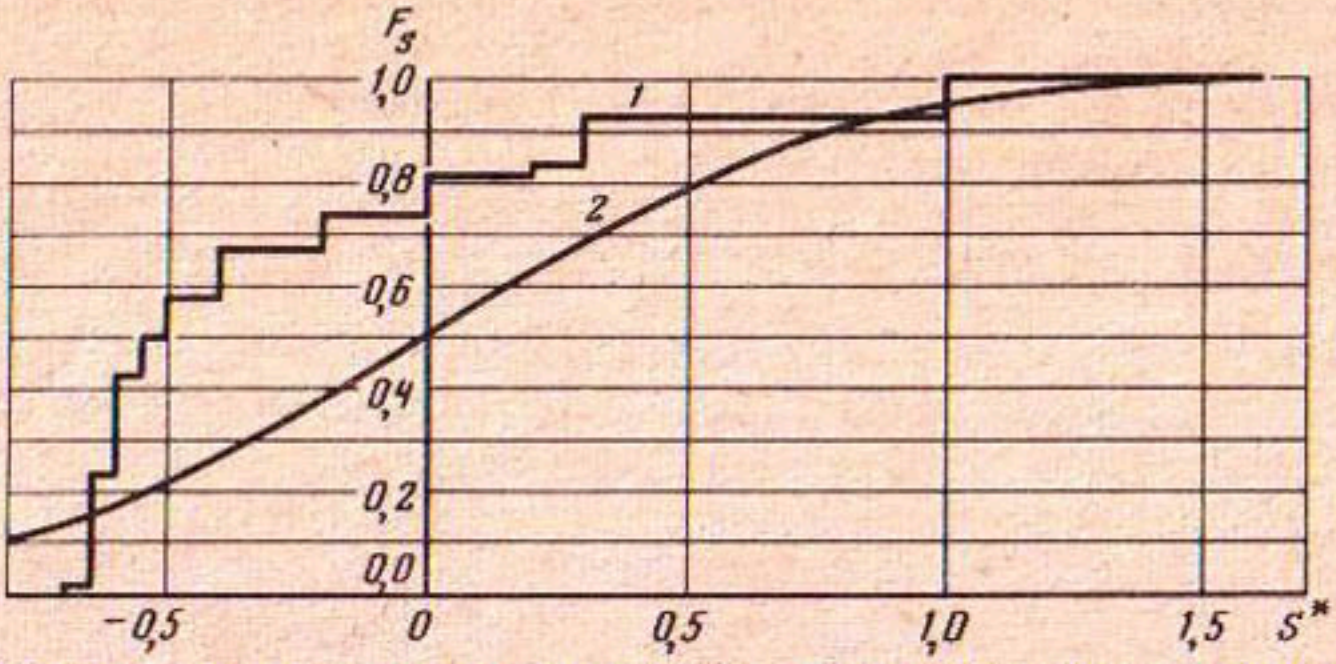
Аналогично коэффициенту точности понижения вычисляются также коэффициент точности редукции и коэффициенты корреляции:

$$\Omega_W = \sum_{i=1}^{N} c_i w^2 (z_i/\tau), \tag{6.26}$$

$$\rho_{\Delta S} \approx \frac{1}{\sqrt{\Omega_S}} \sum_{i=1}^{N} c_i R(z_i/\tau) \cos \Psi (z_i/\tau), \tag{6.27}$$

$$\rho_{\Delta W} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_W}} \sum_{i=1}^{N} c_i w(z_i/\tau) \cos \psi (z_i/\tau). \tag{6.28}$$

Для оценки применяемости нормального распределения к описанию распределения понижения уровня подземных вод при случайных вариа-

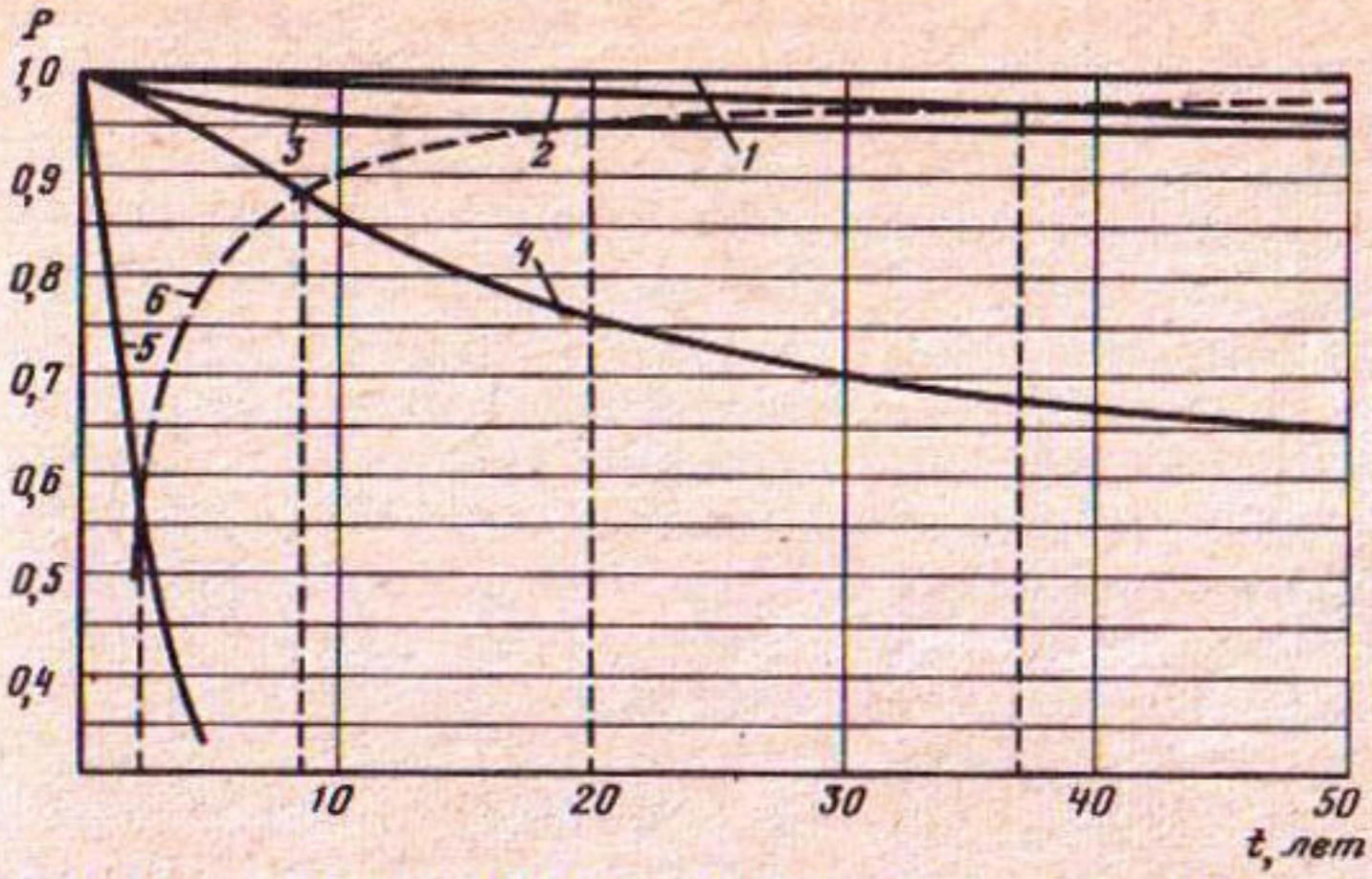


Р и с. 6.5. График эмпирического распределения величины относительного понижения S^* (кривая *1*) и график функции нормального распределения с параметрами $(0, \sigma_S)$ (кривая *2*)

циях водоотбора было предпринято статистическое моделирование этого процесса. При этом использовались следующие типичные гидрогеологические условия: схема однородного пласта, ограниченного прямолинейной бесконечной границей совершенного питания и эксплуатируемого линейным водозабором на расстоянии $d = 1$ км от границы. Протяженность линейного ряда $B = 20$ км; $T = 1000$ м^2/сут; $a = 10\,000$ м^2/сут. Сток реки описывался нормальным распределением с параметрами: $\bar{Q} = 15$ м^3/с и $\sigma = 3$ м^3/с; длина генерированного ряда составила 120 лет. Математическое ожидание величины водопотребления принято равным 15,0 м^3/с; среднеквадратичное отклонение $\sigma_п = 0$. На рис. 6.5 изображена эмпирическая функция распределения величины $S^* = (TB/\sigma_\Delta d)S^0$. Оценка параметров этой величины привела к значению выборочного среднего в размере –0,184 (при теоретическом значении, равном нулю) и к значению выборочного среднеквадратичного отклонения в размере 0,624 (при теоретическом значении 0,636). Анализ кривых на рис. 6.5 показывает, что эмпирическое распределение удовлетворительно согласуется с нормальным законом с параметрами $(0, \sigma_S)$ в области значений отклонения понижения, соответствующих условию $S^0 \geqslant \sigma_S$, т.е. при вероятности бесперебойной работы не ниже 0,84; такие условие и представляют наибольший интерес при оценке надежности.

В рассмотренном примере были использованы условия, довольно неблагоприятные в смысле нормализации распределения понижений. При большей удельной нагрузке на подземные воды, когда $u > 0$, а также при большем удалении водозабора от реки нормализация проявляется более рельефно. Благоприятствуют ей в сравнении с рассмотренной схемой и условия площадного отбора. Вопросы о свойствах распределения понижения в условиях компенсационного питания и в случаях более сложных конфигураций гидрогеологических схем, остающиеся пока открытыми, требуют самостоятельных подробных разработок.

На рис. 6.6 изображены графики временных зависимостей надежности работы системы совместного использования поверхностных и подземных вод в условиях рассмотренного примера. В случае малого расстояния между рекой и водозабором, как это следует из графиков, построенных для случая $d = 1$ км, надежность системы уменьшается во времени



Р и с. 6.6. Графики зависимостей надежности от времени эксплуатации системы совместного использования поверхностных и подземных вод в условиях полуограниченного однородного пласта

1 – при $u = 0$, $d = 1$ км; *2* – при $u = -0{,}4$, $d = 6$ км; *3* – при $u = 1{,}0$, $d = 1$ км; *4* – при $u = 0$, $d = 6$; *5* – при $u = 1{,}0$, $d = 6$ км; *6* – график зависимости (6.29)

в очень медленном темпе, тогда как при удалении водозабора на 6 км от реки соответствующие кривые претерпевают быстрое изменение, за исключением случаев малой нагрузки на подземные воды (кривая для $u = -0{,}4$). Зависимости $P(t)$, аналогичные представленным на рис. 6.6, дают возможность оценить такую важную характеристику системы, как время ее работы, соответствующее заданной надежности P. Конкретный выбор величины расчетной надежности в разных условиях будет определяться различными предъявляемыми к системе требованиями. В качестве одного из вариантов можно предложить выбор величины расчетной надежности, соответствующей вероятности появления дефицита не более одного раза за расчетный срок, т.е.

$$P = 1 - 1/t, \qquad (6.29)$$

где t – выраженный в годах срок эксплуатации. Нанося на график зависимость $P(t)$ и кривую, определяемую уравнением (6.29), и находя абсциссу точки их пересечения, устанавливаем тем самым время надежной работы системы, в течение которого возникновение дефицита вероятно не более одного раза. Так, в условиях рассмотренных примеров время надежной работы системы, характеризующейся параметрами $u = 1$, $d = 6$ км, составляет всего 2,2 года. При снижении нормированного водопотребления до значения $u = 0$ та же система надежно функционирует в течение 8,6 лет. Если же величина u составляет $-0{,}4$, то согласно графикам время надежной работы этой системы оценивается в 37 лет. Система с расстоянием от реки до водозабора, равным 1 км, характеризуется временем надежной работы, оцениваемым 20 лет при $u = 1$ и увеличивающимся до чрезвычайно больших, измеряемых столетиями, величин при $u = 0$.

Рассмотренные примеры ярко демонстрируют перспективность применения систем совместного использования описанного вида. Так, в случае

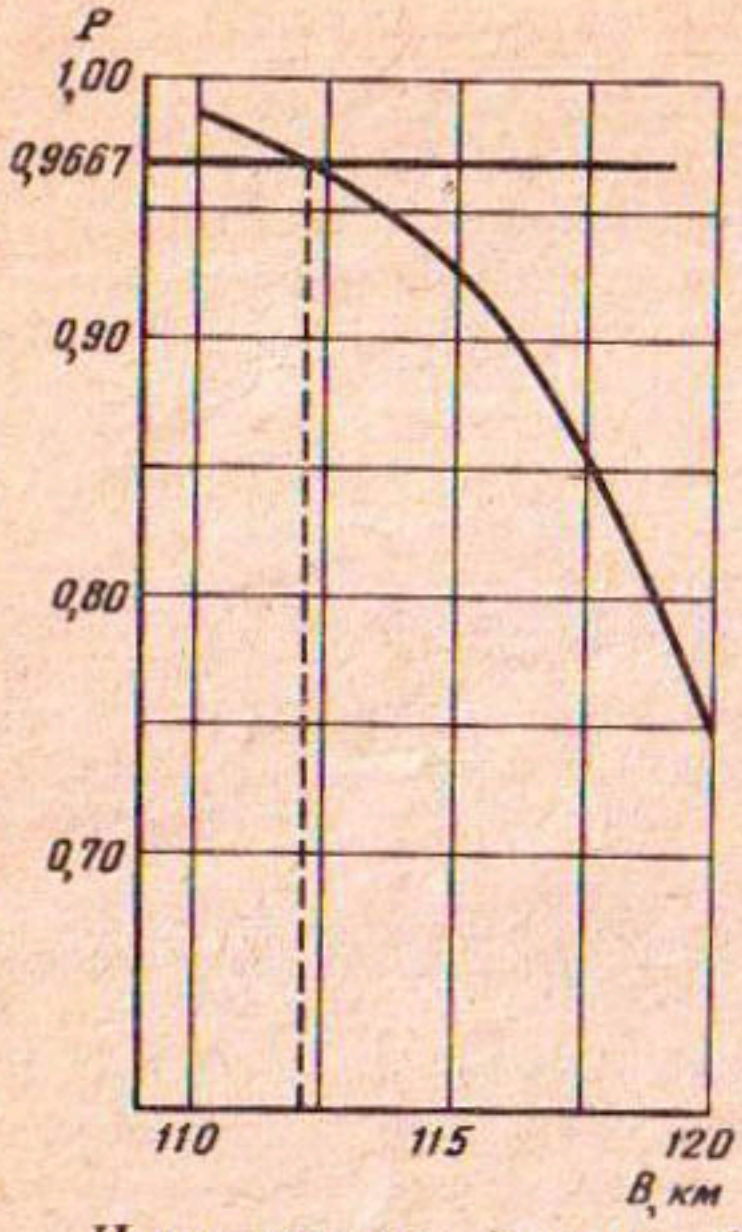


Рис. 6.7. График зависимости надежности от протяженности линейного водозабора в условиях примера

$d = 1$ км и $u = 0$, когда согласно графикам на рис. 6.6. время надежной работы системы чрезвычайно велико, ни один из источников воды, будучи использован отдельно от другого, не обеспечит бесперебойного орошения: применение одних поверхностных вод при равных по величине водопотреблений и среднемноголетнем расходе реки в размере 15 м^3/с надежно лишь на 50%; надежность же использования одних подземных вод в этих условиях чрезвычайно быстро становится равной нулю, так как уже через 5 лет после начала эксплуатации понижение в районе водозабора достигает 56 м (при $S_{доп} = 25$ м).

Использование формулы (6.20) дает возможность решать ряд важных обратных задач, когда при заданной надежности работы системы требуется выбрать один из ее параметров. Например, при заданном расстоянии между рекой и водозабором его протяженность B определяет орошаемую системой площадь. В формуле (6.20) от протяженности водозабора зависят математическое ожидание дебита, определяемая на его основе величина $\bar{S}$, а также среднеквадратичные отклонения σ_Δ, σ_S и гидрологическая обеспеченность $\nu_п$. Задаваясь рядом значений протяженности, можно построить график зависимости надежности от этой величины; точка его пересечения с прямой, соответствующей заданной величине P, определит искомую величину B. Найдем, например, протяженность линейного водозабора, обеспечивающего в течение 30 лет работу системы с величиной надежности $P = 0{,}9667$ при орошении хлопчатника с нормой 10 000 м^3/га, если линейный водозабор отстоит от реки на 6 км. Положим $B = 110$ км; величина потребности в воде составит при этом $\bar{Q}_п = 20{,}9$ м^3/с; $u = 1{,}97$; величина гидравлического сопротивления, находимая с помощью формулы (2.8), составляет в этом случае $R_0 = 0{,}0378$. Находя с помощью Приложения 5 значения $\bar{Q} =$ $= 510\,600$ м^3/сут и $\sigma_\Delta = 254\,000$ м^3/сут, по формуле (6.21) находим значение $\sigma_S = 2{,}56$ м. Поскольку величина $\nu_п$ при $u = 1{,}97$ мала, ограничиваемся первым слагаемым формулы (6.20), $P = \Phi^*((25-19{,}3)/2{,}56) =$ $= 0{,}987$. Поступая аналогично при других значениях B, определяем исходные данные для построения графика, приведенного на рис. 6.7. Заданная величина надежности достигается при значении $B = 112$ км; подкомандная системе площадь при этом составит 67 200 га. Аналогично могут быть решены задачи по определению расстояния водозабора от реки, по выбору оросительной нормы, т.е. в конечном итоге задача установления возможности выращивания той или иной культуры в условиях системы совместного использования.

Как показывает график на рис. 6.7, построенный для условий примера, величина надежности обнаруживает резкую зависимость от протяженности участка. Так же обстоит дело с зависимостями надежности от других параметров: величины водоотбора, геометрических характеристик водозабора и др. Значительная чувствительность надежности к изменению параметров, ее определяющих, позволяет, с одной стороны, повысить надежность работы системы ценой незначительного изменения таких параметров, как водопотребление, орошаемая площадь и т.д.; с другой стороны, высокая чувствительность надежности по отношению к величине водопотребления эквивалентна низкой чувствительности расчетных величин водопотребления, полученных в результате решения обратной задачи, по отношению к заданной величине надежности. Это открывает путь к практическому применению результатов решения обратных задач, делая их малозависящими от погрешностей исходных данных.

6.3. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗКИ МЕЖДУ МЕСТОРОЖДЕНИЯМИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ

В рассмотренных выше теоретических построениях принималось, что в системе совместного использования присутствует одно месторождение подземных вод, в то время как представляющие наибольший интерес с точки зрения водохозяйственных балансов системы крупных и средних размеров обычно характеризуются наличием в них нескольких гидравлически независимых друг от друга месторождений. Они связаны между собой только работой в одной водохозяйственной системе, и при этом всякий раз при составлении и анализе водохозяйственного баланса будет возникать вопрос об оптимальном в том или ином смысле распределении нагрузки между такими месторождениями подземных вод. В настоящем параграфе рассматривается вариант такого распределения, при котором в качестве критерия оптимальности выступает надежность работы системы в целом.

Для простоты предположим, что, как это часто бывает, величина второго члена в первой части формулы (6.20) пренебрежимо мала при значениях вероятности, близких к единице, которые в основном и представляют практический интерес. Тогда надежность работы j-го месторождения подземных вод будет определяться формулой

$$P_j = \Phi^*\left(\frac{S_{\text{доп}\,j} - \overline{S}_j}{\sigma_{Sj}}\right), \tag{6.30}$$

где P_j – надежность работы j-го водозабора; $\Phi^*(z)$ – функция нормального распределения; $S_{\text{доп}\,j}$ – допустимое понижение уровня в районе этого месторождения; $\overline{S}_j$ – математическое ожидание понижения в районе водозаборов j-го месторождения (максимальное за год значение) к концу расчетного срока эксплуатации; σ_{Sj} – среднеквадратичное отклонение понижения j-го месторождения. Величина $\overline{S}_j$ определяется согласно выраже-

нию (1.55)

$$\bar{S}_j = \frac{\bar{Q}_{\Delta j}}{T_{*j}} R_{0j}, \tag{6.31}$$

где T_{*j} – характерное значение водопроводимости по j-му месторождению; R_{0j} – гидравлическое сопротивление, отражающее максимальное значение реакции водоносного пласта на периодический водоотбор; величина σ_{Sj} определяется выражением (6.21)

$$\sigma_{Sj} = \frac{\sigma_{\Delta j}}{T_{*j}} \sqrt{\Omega_{Sj}}, \tag{6.32}$$

где $\sigma_{\Delta j}$ – среднеквадратичное отклонение водоотбора j-го месторождения, Ω_{Sj} – коэффициент точности по понижению, определяемый в соответствии с формулой (6.22).

Оптимальное в смысле надежности распределение нагрузок по месторождениям будет, очевидно, достигнуто при выполнении условия

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} P_j \Rightarrow \max, \tag{6.33}$$

поскольку $\Phi^*(z)$ – монотонная функция; поставленная задача эквивалентна следующей:

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{S_{\text{доп}\,j} - (\bar{Q}_{\Delta j}/T_{*j}) R_{0j}}{\sigma_{\Delta j} \sqrt{\Omega_{Sj}}/T_{*j}}. \tag{6.34}$$

Выразим величину $Q_{\Delta j}$ в виде доли от общего водоотбора, а именно положим

$$Q_{\Delta j} = Q_{\Delta}/\alpha_j \tag{6.35}$$

и определим коэффициенты α_j таким образом, чтобы выполнялось условие (6.34), а также очевидное равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j} = 1. \tag{6.36}$$

Поскольку при такой постановке задачи, очевидно, $\bar{Q}_{\Delta j} = \bar{Q}_{\Delta}/\alpha_j$ и $\sigma_{\Delta j} = \sigma_{\Delta}/\alpha_j$, полагая

$$A_j = T_{*j} S_{\text{доп}\,j}/\sigma_{\Delta} \sqrt{\Omega_{Sj}}; \qquad B_j = \bar{Q}_{\Delta} R_{0j}/\sigma_{\Delta} \sqrt{\Omega_{Sj}}, \tag{6.37}$$

вместо условия (6.34) получим

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} (A_j \alpha_j - B_j) \Rightarrow \max. \tag{6.38}$$

Решение задачи (6.38) при ограничении (6.36) достигается в случае, когда все значения $A_j \alpha_j - B_j$ равны между собой; этот результат известен под названием "принципа уравнивания Ю.В. Гермейера" [17]. Смысл этого принципа состоит в том, что все месторождения должны функционировать

с равной надежностью. Обозначая в соответствии со сказанным

$$A_j \alpha_j - B_j = \lambda, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{6.39}$$

так, что

$$\alpha_j = \frac{B_j + \lambda}{A_j}; \tag{6.40}$$

используя условие (6.36), получим уравнение для определения величины λ:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{B_j + \lambda} = 1. \tag{6.41}$$

Решив его с помощью какого-либо численного метода на основании равенства (6.40) находим все искомые нагрузки α_j.

При составлении и увязке водохозяйственного баланса задача часто ставится следующим образом: задаются рядом характерных значений водопотребления, определяются соответствующие характеристики дефицита и на основе анализа сложившейся ситуации определяются мероприятия по покрытию дефицита. В связи с этим алгоритм определения величины надежности и нагрузок отдельных месторождений приобретает следующий вид:

1) задаемся каким-либо начальным набором коэффициентов распределения α_j;

2) на основании данного набора коэффициентов α_j определяем значения w_0 и Ω_w, а также коэффициента корреляции между водоотбором и редукцией поверхностного стока $\rho_{\Delta w}$ в целом по системе, которые находятся по следующим формулам:

$$w_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{0j}}{\alpha_j}, \tag{6.42}$$

$$\Omega_w = \sum_{j=1}^{n} \frac{\Omega_{wj}}{\alpha_j^2}, \tag{6.43}$$

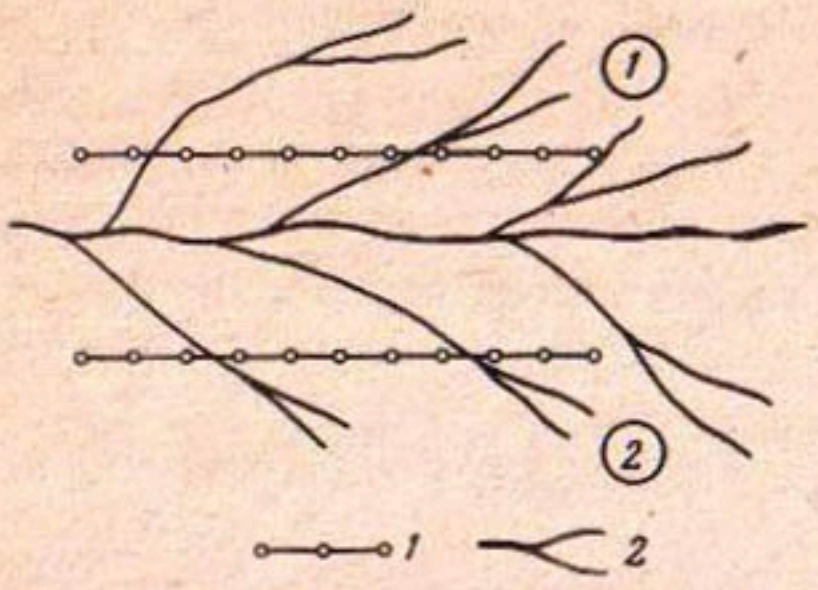
$$\rho_{\Delta w} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_w}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_{\Delta wj} \sqrt{\Omega_{wj}}}{\alpha_j^2}, \tag{6.44}$$

где $\rho_{\Delta wj}$ – частные значения коэффициентов корреляции по отдельным месторождениям;

3) решая уравнения (6.5), (6.6) с учетом формул (6.15)–(6.18), находим вероятностные характеристики величины отбора подземных вод;

4) вычисляя величины A_j, B_j по формулам (6.37), решаем уравнение (6.41); по определенной таким образом величине λ находим следующее приближение нагрузочных коэффициентов α_j;

5) вычисляем наибольшую по месторождениям абсолютную величину разности между величинами коэффициентов распределения, полученными на предыдущей итерации, и коэффициентами α_j, вновь найденными; если



Р и с. 6.8. Схема водохозяйственной системы в примере

1 – линейные водозаборы; *2* – реки и каналы; цифры в кружках – номера месторождений подземных вод

заданная точность достигнута, расчет считается оконченным, если нет, осуществляется возврат к пункту 2.

Описанный алгоритм в случае наличия в регионе значительного числа месторождений подземных вод, гидравлически не связанных между собой, требует больших объемов вычислительной работы и, как правило, должен реализоваться на ЭЦВМ.

Для иллюстрации последовательности расчетов здесь использован пример с двумя месторождениями, что отвечает условиям не крупного, а скорее среднего масштаба водохозяйственной системы. Использование таких условий примера оправдывается исключительно стремлением к уменьшению объема расчетных выкладок.

Пример составления водохозяйственного баланса с учетом ресурсов подземных вод. Схема водохозяйственной системы изображена на рис. 6.8. Источником поверхностных водных ресурсов служит река, сток которой характеризуется параметрами $\bar{Q} = 30{,}0$ м^3/с; $\sigma = 6{,}00$ м^3/с. Для орошения сельскохозяйственных культур воды реки отводятся каналами – левобережными и правобережными. Вегетационный период, совпадающий с периодом дефицита, длится полгода – с 1 апреля до 1 октября. Для покрытия дефицита поверхностных вод предполагается соорудить вдоль каждого берега реки линейные ряды скважин. Гидрогеологические условия характеризуются следующими параметрами: по левому берегу $T_{*1} = 2000$ м^2/сут; $a_{*1} = 2 \cdot 10^4$ м^2/сут; $S_{\text{доп }1} = 60$ м; по правому берегу $T_{*2} = 1000$ м^2/сут; $a_{*2} = 10^4$ м^2/сут; $S_{\text{доп }2} = 40$ м. Длина обоих линейных рядов равна 25 км; расстояние до реки от левобережного водозабора $d_1 = 8$ км, от правобережного – $d_2 = 12$ км.

Требуется определить вероятностные характеристики величин отбора подземных вод и изменения поверхностного стока как компонент водохозяйственного баланса бассейна, составляемого на пятидесятилетнюю перспективу. При этом необходимо учесть возможность различных уровней развития орошаемого земледелия в бассейне, каждый из которых определяется величиной математического ожидания водопотребления. Коэффициент вариации этой величины, зависящий в основном от агроклиматических условий, принимается постоянным и равным 0,20.

Решение 1. Определяем гидродинамические характеристики водоносных пластов, величины гидравлических сопротивлений, коэффициентов точности, коэффициентов корреляции и функций относительной редукции. Как указывалось выше в главах 1 и 4, при режиме отбора подземных вод, когда они отбираются в течение полугода, понижение будет скла-

дываться из двух составляющих: апериодической, обусловленной влиянием постоянного во времени отбора, равного среднегодовому значению (в рассматриваемых условиях оно равно половине максимальной величины), и периодической, вызванной колебаниями водоотбора около среднегодового значения. Величины гидравлических сопротивлений, определяющие реакции пластов на апериодическую составляющую водоотбора, рассчитаны на конец 50-летнего срока по зависимости (2.49) и равны

$$R_{01} = 0{,}2466; \qquad R_{02} = 0{,}2648.$$

Методика определения реакции пластов на периодическую компоненту водоотбора подробно рассмотрена в главе 3; влияние этой составляющей на величину максимального понижения может быть учтено прибавлением к значению $R_{0j}/2$ (поскольку среднегодовая величина водоотбора равна половине значения Q_{Δ}) поправки ΔR_j; численные значения поправок в условиях примера равны: $\Delta R_1 = 0{,}0142$; $\Delta R_2 = 0{,}0100$; таким образом, суммарные величины R_{0j} составляют $R_{01} = 0{,}1376$; $R_{02} = 0{,}1434$.

Значения функций относительной редукции w_{0j} в рассматриваемых условиях определяются по формуле (3.13) $w_{0j} = (\frac{1}{2})\mathrm{erfc}\ d_j/2\sqrt{a_j t}$, где $t = 50$ лет; численные значения таковы: $w_{01} = 0{,}384$; $w_{02} = 0{,}265$. Определенные с помощью численного интегрирования значения коэффициентов точности понижения составили: $\Omega_{S1} = 1{,}825 \cdot 10^{-3}$; $\Omega_{S2} = 9{,}656 \times 10^{-4}$; коэффициенты точности редукции: $\Omega_{W1} = 0{,}0115$; $\Omega_{W2} = 4{,}644 \times 10^{-4}$. Коэффициенты корреляции между водоотбором и редукцией вследствие далекого расстояния водозаборов от реки оказались практически нулевыми.

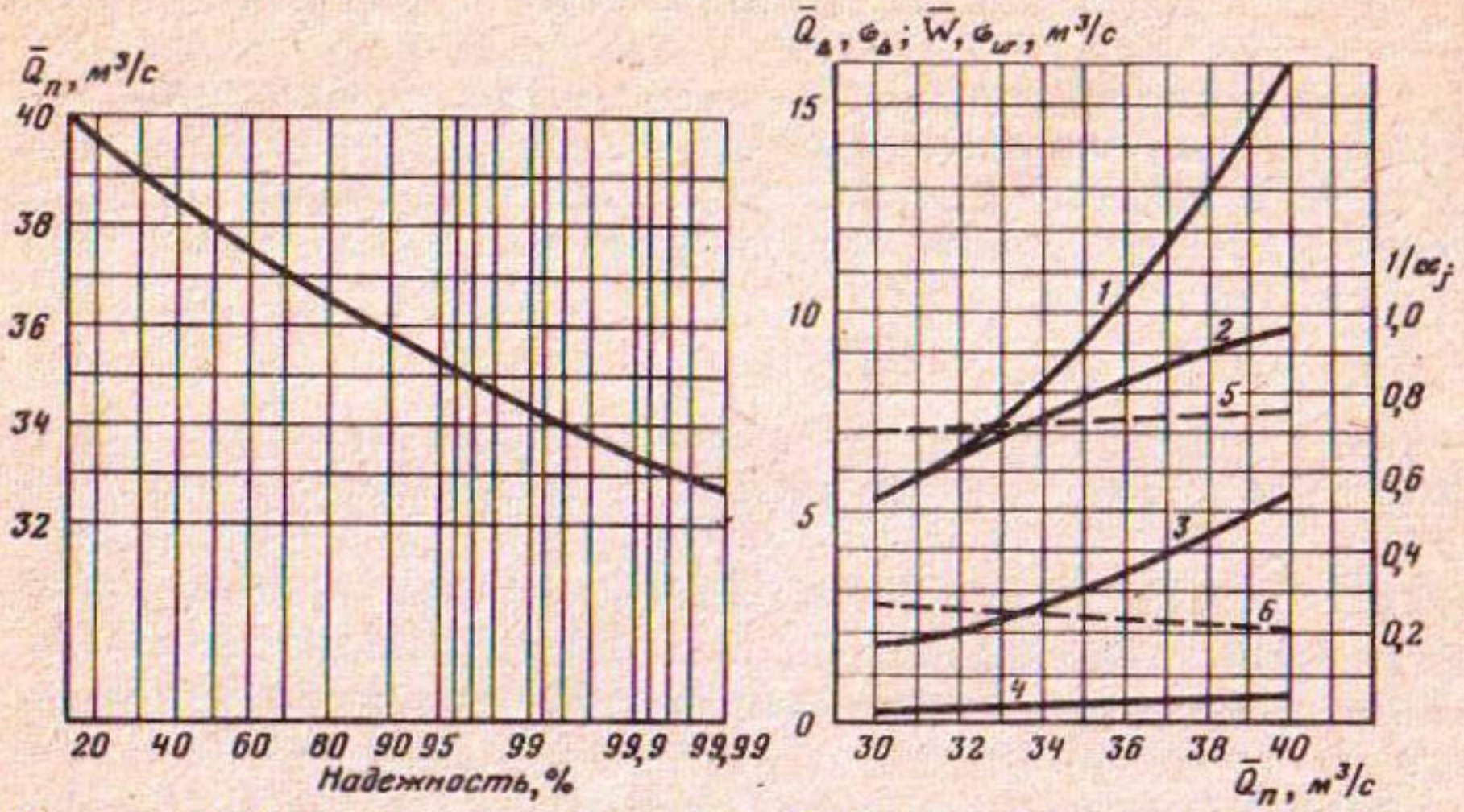
2. Зададимся каким-либо значением $\bar{Q}_{\text{п}}$, например $\bar{Q}_{\text{п}} = 35{,}0\ \text{м}^3/\text{с}$; тогда величина среднеквадратичного отклонения водопотребления $\sigma_{\text{п}}$ составит $0{,}20 \cdot 35{,}0 = 7{,}00\ \text{м}^3/\text{с}$. Согласно описанному выше алгоритму положим сначала $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$; тогда согласно формулам (6.44), (6.45) величины относительной редукции и коэффициента точности составят: $w_0 = 0{,}325$; $\Omega_W = 0{,}0030$. Решение уравнений (6.5), (6.6), проведенное методом последовательных приближений, определило параметры водоотбора в размере: $\bar{Q}_{\Delta} = 8{,}90\ \text{м}^3/\text{с}$; $\sigma_{\Delta} = 7{,}72\ \text{м}^3/\text{с}$. По формулам (6.37) были определены коэффициенты A_j, B_j:

$$A_1 = 4{,}214; \quad A_2 = 1{,}931; \qquad B_1 = 3{,}717; \quad B_2 = 5{,}325.$$

Решая уравнение (6.43) относительно величины λ, находим ее значение: $\lambda = 2{,}004$; затем по формулам (6.42) находим величины коэффициентов распределения: $\alpha_1 = 1{,}358$; $\alpha_2 = 3{,}796$.

Пересчитанные в соответствии с этими значениями величины функции относительной редукции и коэффициента точности составили: $w_0 = 0{,}353$; $\Omega_W = 0{,}00630$; решая заново уравнения (6.5), (6.6), определяем второе приближение вероятностных параметров водоотбора: $\bar{Q}_{\Delta} = 9{,}21\ \text{м}^3/\text{с}$; $\sigma_{\Delta} = 7{,}80\ \text{м}^3/\text{с}$. Значения коэффициентов уравнения (6.41) на второй итерации составили:

$$A_1 = 4{,}167; \quad A_2 = 1{,}910; \qquad B_1 = 3{,}802; \quad B_2 = 5{,}447.$$



Р и с. 6.9. График надежности функционирования системы в условиях примера в зависимости от величины $\bar{Q}_п$

Р и с. 6.10. Графики зависимостей характеристик элементов водохозяйственного баланса в условиях примера от величины $\bar{Q}_п$
$1 - \bar{Q}_Δ$; $2 - \sigma_Δ$; $3 - \bar{W}$; $4 - \sigma_W$; $5 - 1/\alpha_1$; $6 - 1/\alpha_2$

Решение уравнения (6.41) приводит к следующему значению параметра $\lambda = 1{,}843$; соответствующие величины коэффициентов распределения нагрузки равны: $\alpha_1 = 1{,}355$; $\alpha_2 = 3{,}796$, т.е. эти коэффициенты незначительно отличаются от полученных в ходе первой итерации. Надежность функционирования системы, равная $\Phi^*(\lambda)$, составляет 96,7%, т.е. вероятность возникновения дефицитной ситуации в рассматриваемых условиях равна 3,3%. Третья и последующие итерации не приводят к уточнению результатов в рамках требуемой точности, поэтому окончательные величины среднемноголетних нагрузок месторождений получаем в размере:

$$\bar{Q}_{Δ1} = 9{,}21/1{,}355 = 6{,}80 \text{ м}^3/\text{с};$$

$$\bar{Q}_{Δ2} = 9{,}21/3{,}818 = 2{,}41 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Величина математического ожидания изменения поверхностного стока составит при этом $\bar{W} = 9{,}21 \cdot 0{,}353 = 3{,}25$ м³/с (по месторождениям: $\bar{W}_1 = 2{,}40$ м³/с; $\bar{W}_2 = 0{,}85$ м³/с). Таким образом, при среднемноголетней величине дефицита водопотребления в размере 5,00 м³/с величина математического ожидания отбора подземных вод равна 9,21 м³/с; разность между этими величинами (4,21 м³/с) превосходит вычисленную величину сокращения речного стока (3,25 м³/с). Отмеченное влияние не носит характера погрешности, но объясняется тем, что величина отбора подземных вод представляет собой нелинейную функцию остальных статей баланса (дефицита водопотребления и редукции), что приводит к смещению средних величин.

Рассмотрим для сравнения условия, когда характеристики водопотреб-

ления совпадают с характеристиками стока: $\bar{Q}_{п}$ = 30,0 м^3/с; $\sigma_{п}$ = = 6,00 м^3/с. Вычисленные аналогично характеристики отбора подземных вод после второй интерации составили: $\bar{Q}_{\Delta}$ = 5,45 м^3/с; σ_{Δ} = 5,45 м^3/с. Значение математического ожидания редукции поверхностного стока к концу эксплуатации составило 1,92 м^3/с, а поскольку среднемноголетняя величина дефицита водопотребления равна нулю, математическое ожидание водоотбора превышает сумму математических ожиданий дефицита и редукции на величину 3,53 м^3/с.

На рис. 6.9 изображен график надежности функционирования системы совместного использования поверхностных и подземных вод в зависимости от величины $\bar{Q}_{п}$. Пользуясь этим графиком, можно определить необходимый уровень освоения орошаемых площадей, соответствующий заданному значению надежности. Так, например, чтобы появление дефицитной ситуации в системе было возможно не более одного раза за расчетный 50-летний срок, следует задаваться величиной надежности, равной 98%. Этому значению на графике соответствует водопотребление в размере 34,7 м^3/с.

На рис. 6.10 изображены графики зависимости величин $\bar{Q}_{\Delta}$, σ_{Δ}, $\bar{W}$, σ_{W}, а также отношений $1/\alpha_1$ и $1/\alpha_2$ от $\bar{Q}_{п}$. С помощью этих графиков можно определить, как будут изменяться величины элементов водохозяйственного баланса при изменении математического ожидания водопотребления. Так, отмеченному значению $\bar{Q}_{п}$ = 34,7 м^3/с соответствуют величины $\bar{Q}_{\Delta}$ = 12,0 м^3/с и σ_{Δ} = 4,20 м^3/с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на ряд положительных аспектов использования подземных вод для водоснабжения, в том числе для орошения, отмеченных во введении, все же ресурсы подземных вод в СССР до настоящего времени используются для орошения недостаточно. Одной из причин этого является бытующее среди значительной части специалистов мнение о слабой водохозяйственной и экономической эффективности их использования. Кроме того, широкое распространение получили взгляды об отрицательном влиянии крупномасштабного отбора подземных вод на окружающую среду. Конечно, в каждом конкретном случае как водохозяйственная и экономическая эффективность крупномасштабного отбора подземных вод на орошение, так и влияние этого отбора на окружающую среду могут быть различными. Для обоснования суждения об этом представляется необходимой разработка научно-методического аппарата основ крупномасштабного использования подземных вод для орошения с учетом как положительных, так и отрицательных аспектов такого использования.

В этой многоплановой, комплексной проблеме можно выделить отдельные группы задач (подсистемы), определенным образом взаимодействующие между собой. Сюда входят следующие подсистемы: гидролого-водохозяйственная, гидрогеологическая, технико-экономическая, природоохранная и подсистема управления. Степень разработанности методик решения задач, составляющих подсистемы, существенно различна.

Так, задачи, входящие в гидролого-водохозяйственную подсистему, являются предметом продолжительных систематических исследований многочисленных научно-исследовательских коллективов и в настоящее время разработаны в достаточной степени. Это задачи по определению характеристик поверхностного стока, водопотребления и дефицита поверхностных водных ресурсов с учетом многолетней и сезонной изменчивости этих характеристик.

Задачи, составляющие гидрогеологическую подсистему, имеют целью определение реакции водоносных пластов и поверхностного стока на отбор подземных вод. При этом предполагается, что их ресурсы могут использоваться в качестве как самостоятельного, так и дополнительного к поверхностному стоку водоисточника. Для решения задач, входящих в эту подсистему, используются аналитические методы и методы моделирования. Результаты исследований, проведенных в Институте водных проблем АН СССР и направленных на разработку аналитических методов решения перечисленных задач, составили основную часть настоящей работы.

Технико-экономическая подсистема включает в себя задачи планирова-

ния эксплуатации подземных вод, а именно рациональное размещение водозаборов и сооружений искусственного пополнения ресурсов подземных вод, оценку экономических показателей эксплуатации систем совместного использования поверхностных и подземных вод на стадии проектирования и сравнение этих показателей с соответствующими показателями альтернативных вариантов. Необходимо отметить, что степень разработанности соответствующих экономических оценок, насколько можно судить по литературным источникам, недостаточна. Из перечисленных задач этой подсистемы более или менее разработаны лишь задачи размещения водозаборов подземных вод. Решение других задач этой подсистемы должно стать предметом дальнейших исследований.

Задачи природоохранной подсистемы, имеющие целью оценку экологических реакций на эксплуатацию подземных вод, представляются разработаными в разной степени. Так, методика оценки воздействия эксплуатации подземных вод на уровни подземных вод и на поверхностный сток (особенно малых рек) разработана достаточно хорошо, задачи по оценке других прямых и косвенных экологических реакций на эксплуатацию подземных вод – далеко не достаточно. Эти задачи должны также стать предметом дальнейших исследований.

В подсистеме управления определяются оперативные решения по отбору подземных вод и искусственному пополнению их ресурсов. Эта подсистема является в некотором роде центральной: в качестве физических связей и ограничений в ней используются результаты решения задач, входящих в другие подсистемы. Результаты первого этапа исследований по разработке методики решения некоторых задач этой подсистемы рассмотрены в настоящей книге.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значения функций $i^n \operatorname{erfc} z$

z	erfc z	ierfc z	i^2 erfc z	i^3 erfc z
1	2	3	4	5
0,00	1,00000	0,56419	0,25000	0,09403
0,01	0,98872	0,55425	0,24441	0,09156
0,02	0,97744	0,54442	0,23891	0,08914
0,03	0,96616	0,53470	0,23352	0,08678
0,04	0,95489	0,52509	0,22822	0,08447
0,05	0,94363	0,51560	0,22302	0,08222
0,06	0,93238	0,50622	0,21791	0,08001
0,07	0,92114	0,49695	0,21289	0,07786
0,08	0,90992	0,48780	0,20796	0,07575
0,09	0,89872	0,47875	0,20314	0,07370
0,10	0,88754	0,46982	0,19839	0,07169
0,11	0,88764	0,46100	0,19374	0,06973
0,12	0,86524	0,45229	0,18917	0,06782
0,13	0,85413	0,44370	0,18469	0,06595
0,14	0,84305	0,43521	0,18030	0,06412
0,15	0,83200	0,42684	0,17599	0,06234
0,16	0,82099	0,41857	0,17176	0,06060
0,17	0,81001	0,41042	0,16762	0,05890
0,18	0,79906	0,40237	0,16355	0,05725
0,19	0,78816	0,39444	0,15957	0,05563
0,20	0,77730	0,38661	0,15566	0,05406
0,21	0,76648	0,37889	0,15184	0,05252
0,22	0,75570	0,37128	0,14809	0,05102
0,23	0,74498	0,36377	0,14441	0,04956
0,24	0,73430	0,35638	0,14081	0,04813
0,25	0,72367	0,34909	0,13728	0,04674
0,26	0,71310	0,34190	0,13383	0,04539
0,27	0,70258	0,33483	0,13044	0,04406
0,28	0,69212	0,32785	0,12713	0,04278
0,29	0,68172	0,32098	0,12389	0,04152
0,30	0,67137	0,31422	0,12071	0,04030
0,31	0,66109	0,30756	0,11760	0,03911
0,32	0,65087	0,30100	0,11456	0,03795
0,33	0,64072	0,29454	0,11158	0,03682
0,34	0,63064	0,28818	0,10867	0,03571

Приложение 1 (продолжение)

1	2	3	4	5
0,35	0,62062	0,28193	0,10582	0,03464
0,36	0,61067	0,27577	0,10303	0,03360
0,37	0,60079	0,26971	0,10030	0,03258
0,38	0,59099	0,26375	0,09763	0,03159
0,39	0,58126	0,25789	0,09503	0,03063
0,40	0,57161	0,25213	0,09248	0,02969
0,41	0,56203	0,24646	0,08998	0,02878
0,42	0,55253	0,24089	0,08755	0,02789
0,43	0,54311	0,23541	0,08517	0,02703
0,44	0,53378	0,23002	0,08284	0,02619
0,45	0,52452	0,22473	0,08056	0,02537
0,46	0,51534	0,21953	0,07834	0,02458
0,47	0,50626	0,21443	0,07617	0,02380
0,48	0,49725	0,20940	0,07405	0,02305
0,49	0,48833	0,20448	0,07199	0,02232
0,50	0,47950	0,19964	0,06996	0,02161
0,51	0,47076	0,19489	0,06799	0,02092
0,52	0,46210	0,19023	0,06607	0,02025
0,53	0,45354	0,18565	0,06419	0,01960
0,54	0,44506	0,18115	0,06235	0,01897
0,55	0,43667	0,17675	0,06056	0,01835
0,56	0,42838	0,17242	0,05882	0,01776
0,57	0,42018	0,16818	0,05712	0,01718
0,58	0,41208	0,16202	0,05545	0,01661
0,59	0,40406	0,15994	0,05383	0,01606
0,60	0,39614	0,15593	0,05226	0,01554
0,61	0,38832	0,15201	0,05072	0,01502
0,62	0,38059	0,14817	0,04922	0,01452
0,63	0,37295	0,14440	0,04775	0,01404
0,64	0,36541	0,14071	0,04633	0,01357
0,65	0,35797	0,13709	0,04494	0,01311
0,66	0,35062	0,13355	0,04358	0,01267
0,67	0,34337	0,13008	0,04227	0,01224
0,68	0,33622	0,12668	0,04098	0,01182
0,69	0,32916	0,12335	0,03973	0,01142
0,70	0,32220	0,12010	0,03852	0,01103
0,71	0,31533	0,11691	0,03733	0,01065
0,72	0,30857	0,11379	0,03618	0,01028
0,73	0,30190	0,11074	0,03505	0,00993
0,74	0,29532	0,10775	0,03396	0,00958
0,75	0,28884	0,10483	0,03290	0,00925
0,76	0,28246	0,10198	0,03187	0,00892
0,77	0,27618	0,09918	0,03086	0,00861
0,78	0,26999	0,09645	0,02988	0,00831
0,79	0,26390	0,09378	0,02893	0,00801
0,80	0,25790	0,09117	0,02801	0,00773
0,81	0,25200	0,08862	0,02711	0,00745
0,82	0,24619	0,08613	0,02623	0,00719
0,83	0,24048	0,08370	0,02538	0,00693

Приложение 1 (продолжение)

1	2	3	4	5
0,84	0,23486	0,08132	0,02456	0,00668
0,85	0,22933	0,07900	0,02376	0,00643
0,86	0,23390	0,07674	0,02298	0,00620
0,87	0,21856	0,07452	0,02222	0,00598
0,88	0,21331	0,07237	0,02149	0,00576
0,89	0,20816	0,07026	0,02077	0,00555
0,90	0,20309	0,06820	0,02008	0,00534
0,91	0,19812	0,06620	0,01941	0,00514
0,92	0,19323	0,06424	0,01876	0,00495
0,93	0,18844	0,06233	0,01813	0,00477
0,94	0,18373	0,06047	0,01751	0,00459
0,95	0,17911	0,05866	0,01692	0,00442
0,96	0,17458	0,05689	0,01634	0,00425
0,97	0,17013	0,05516	0,01578	0,00409
0,98	0,16577	0,05348	0,01523	0,00394
0,99	0,16149	0,05185	0,01471	0,00379
1,00	0,15730	0,05025	0,01420	0,00364
1,02	0,14916	0,04719	0,01322	0,00337
1,04	0,14135	0,04429	0,01231	0,00311
1,06	0,13386	0,04153	0,01145	0,00288
1,08	0,12667	0,03893	0,01065	0,00266
1,10	0,11979	0,03647	0,00989	0,00245
1,12	0,11321	0,03414	0,00919	0,00226
1,14	0,10692	0,03194	0,00853	0,00208
1,16	0,10090	0,02986	0,00791	0,00192
1,18	0,09516	0,02790	0,00733	0,00177
1,20	0,08969	0,02605	0,00679	0,00162
1,22	0,08447	0,02431	0,00629	0,00149
1,24	0,07949	0,02267	0,00582	0,00137
1,26	0,07476	0,02113	0,00538	0,00126
1,28	0,07027	0,01968	0,00497	0,00116
1,30	0,06599	0,01831	0,00459	0,00106
1,32	0,06194	0,01704	0,00424	0,00097
1,34	0,05809	0,01584	0,00391	0,00089
1,36	0,05444	0,01471	0,00361	0,00082
1,38	0,05098	0,01366	0,00332	0,00075
1,40	0,04772	0,01267	0,00306	0,00068
1,42	0,04462	0,01175	0,00282	0,00062
1,44	0,04170	0,01088	0,00259	0,00057
1,46	0,03895	0,01008	0,00238	0,00052
1,48	0,03635	0,00932	0,00219	0,00048
1,50	0,03390	0,00862	0,00201	0,00043
1,52	0,03159	0,00797	0,00184	0,00040
1,54	0,02941	0,00736	0,00169	0,00036
1,56	0,02737	0,00679	0,00155	0,00033
1,58	0,02545	0,00626	0,00142	0,00030
1,60	0,02365	0,00577	0,00130	0,00027
1,62	0,02196	0,00532	0,00118	0,00024
1,64	0,02038	0,00489	0,00108	0,00022

Приложение 1 (окончание)

1	2	3	4	5
1,66	0,01890	0,00450	0,00099	0,00020
1,68	0,01751	0,00414	0,00090	0,00018
1,70	0,01621	0,00380	0,00082	0,00017
1,72	0,01500	0,00349	0,00075	0,00015
1,74	0,01387	0,00320	0,00068	0,00014
1,76	0,01281	0,00293	0,00062	0,00012
1,78	0,01183	0,00267	0,00057	0,00011
1,80	0,01091	0,00246	0,00051	0,00010
1,82	0,01006	0,00225	0,00047	0,00009
1,84	0,00926	0,00206	0,00042	0,00008
1,86	0,00853	0,00188	0,00038	0,00007
1,88	0,00784	0,00172	0,00035	0,00007
1,90	0,00721	0,00156	0,00032	0,00006
1,92	0,00662	0,00143	0,00029	0,00005
1,94	0,00608	0,00130	0,00026	0,00005
1,96	0,00557	0,00118	0,00023	0,00004
1,98	0,00511	0,00108	0,00021	0,00004
2,00	0,00468	0,00098	0,00019	0,00004
2,05	0,00374	0,00077	0,00015	0,00003
2,10	0,00298	0,00060	0,00011	0,00002
2,15	0,00236	0,00047	0,00009	0,00002
2,20	0,00186	0,00036	0,00007	0,00001
2,25	0,00146	0,00028	0,00005	0,00001
2,30	0,00114	0,00022	0,00004	0,00001
2,35	0,00089	0,00016	0,00003	0,00000
2,40	0,00069	0,00013	0,00002	0,00000
2,45	0,00053	0,00009	0,00002	0,00000
2,50	0,00041	0,00007	0,00001	0,00000
2,55	0,00031	0,00005	0,00001	0,00000
2,60	0,00024	0,00004	0,00001	0,00000
2,65	0,00018	0,00003	0,00001	0,00000
2,70	0,00013	0,00002	0,00000	0,00000
2,75	0,00010	0,00002	0,00000	0,00000
2,80	0,00008	0,00001	0,00000	0,00000
2,85	0,00006	0,00001	0,00000	0,00000
2,90	0,00004	0,00001	0,00000	0,00000
2,95	0,00003	0,00000	0,00000	0,00000
3,00	0,00002	0,00000	0,00000	0,00000
3,05	0,00002	0,00000	0,00000	0,00000
3,10	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
3,15	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
3,20	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
3,25	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Приложение 2

Таблица значений функции D (z, α)

z	α=0, 1	0, 2	0, 3	0, 4	0, 5	0, 6	0, 7	0, 8	0, 9	1,0	1,1
0,00	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,3329
0,02	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,3329
0,04	0,9030	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,3329
0,06	0,8948	0,8183	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,3329
0,08	0,8815	0,8152	0,7405	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,3329
0,10	0,8651	0,8088	0,7391	0,6701	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,3329
0,12	0,8470	0,7991	0,7356	0,6693	0,6064	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,3329
0,14	0,8279	0,7868	0,7298	0,6672	0,6058	0,5486	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,3329
0,16	0,8081	0,7726	0,7215	0,6634	0,6044	0,5483	0,4965	0,4493	0,4066	0,3679	0,3329
0,18	0,7881	0,7571	0,7117	0,6579	0,6019	0,5473	0,4961	0,4492	0,4065	0,3679	0,3329
0,20	0,7677	0,7407	0,7000	0,6508	0,5980	0,5456	0,4954	0,4489	0,4065	0,3679	0,3329
0,22	0,7474	0,7235	0,6870	0,6422	0,5929	0,5427	0,4940	0,4484	0,4062	0,3678	0,3328
0,24	0,7270	0,7058	0,6730	0,6321	0,5862	0,5388	0,4919	0,4473	0,4058	0,3676	0,3328
0,26	0,7066	0,6877	0,6582	0,6209	0,5783	0,5337	0,4889	0,4457	0,4049	0,3672	0,3326
0,28	0,6863	0,6694	0,6432	0,6087	0,5695	0,5277	0,4850	0,4433	0,4036	0,3665	0,3323
0,30	0,6662	0,6510	0,6270	0,5959	0,5650	0,5205	0,4801	0,4402	0,4017	0,3654	0,3317
0,32	0,6462	0,6325	0,6107	0,5823	0,5491	0,5128	0,4744	0,4364	0,3993	0,3639	0,3308
0,34	0,6264	0,6140	0,5943	0,5683	0,5377	0,5037	0,4680	0,4318	0,3961	0,3619	0,3296
0,36	0,6064	0,5957	0,5777	0,5539	0,5257	0,4941	0,4606	0,4263	0,3923	0,3593	0,3279
0,38	0,5875	0,5774	0,5612	0,5356	0,5131	0,4840	0,4525	0,4201	0,3878	0,3561	0,3257
0,40	0,5685	0,5592	0,5443	0,5244	0,5003	0,4733	0,4439	0,4134	0,3827	0,3524	0,3231
0,42	0,5497	0,5412	0,5276	0,5093	0,4872	0,4621	0,4347	0,4061	0,3770	0,3481	0,3199
0,44	0,5312	0,5235	0,5110	0,4942	0,4738	0,4504	0,4251	0,3982	0,3706	0,3433	0,3162
0,46	0,5103	0,5059	0,4945	0,4791	0,4604	0,4387	0,4149	0,3897	0,3640	0,3378	0,3121
0,48	0,4951	0,4886	0,4781	0,4640	0,4465	0,4266	0,4046	0,3811	0,3566	0,3320	0,3075
0,50	0,4775	0,4717	0,4620	0,4490	0,4329	0,4174	0,3939	0,3719	0,3490	0,3257	0,3025
0,52	0,4603	0,4549	0,4460	0,4340	0,4192	0,4021	0,3831	0,3626	0,3411	0,3190	0,2970
0,54	0,4439	0,4384	0,4303	0,4193	0,4056	0,3896	0,3720	0,3528	0,3328	0,3121	0,1912

Приложение 2 (продолжение)

z	α = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
0,56	0,4269	0,4223	0,4148	0,4047	0,3922	0,3773	0,3609	0,3431	0,3241	0,3048	0,2851
0,58	0,4106	0,4065	0,3996	0,3902	0,3786	0,3651	0,3498	0,3330	0,3155	0,2973	0,2787
0,60	0,3948	0,3910	0,3847	0,3760	0,3652	0,3527	0,3386	0,3229	0,3066	0,2895	0,2719
0,62	0,3794	0,3737	0,3700	0,3621	0,3522	0,3404	0,3273	0,3130	0,2976	0,2816	0,2851
0,64	0,3643	0,3610	0,3557	0,3483	0,3391	0,3284	0,3161	0,3028	0,2885	0,2735	0,2581
0,66	0,3496	0,3466	0,3417	0,3349	0,3264	0,3165	0,3052	0,2927	0,2793	0,2652	0,2508
0,68	0,3353	0,3325	0,3280	0,3217	0,3138	0,3047	0,2941	0,2826	0,2701	0,2571	0,2434
0,70	0,3213	0,3188	0,3146	0,3088	0,3016	0,2931	0,2833	0,2725	0,2609	0,2487	0,2360
0,75	0,2881	0,2861	0,2826	0,2778	0,2721	0,2649	0,2569	0,2480	0,2383	0,2286	0,2173
0,80	0,2573	0,2556	0,2528	0,2490	0,2440	0,2383	0,2317	0,2241	0,2162	0,2076	0,1986
0,85	0,2289	0,2275	0,2253	0,2221	0,2181	0,2133	0,2078	0,2017	0,1950	0,1879	0,1803
0,90	0,2027	0,2016	0,1996	0,1972	0,1938	0,1900	0,1855	0,1804	0,1749	0,1690	0,1626
0,95	0,1787	0,1780	0,1763	0,1741	0,1716	0,1685	0,1647	0,1605	0,1560	0,1511	0,1459
1,00	0,1570	0,1563	0,1551	0,1533	0,1512	0,1485	0,1455	0,1421	0,1384	0,1343	0,1299
1,10	0,1196	0,1191	0,1184	0,1171	0,1158	0,1141	0,1120	0,1097	0,1072	0,1044	0,1014
1,20	0,0896	0,0892	0,0887	0,0879	0,0870	0,0859	0,0845	0,0830	0,0813	0,0795	0,0775
1,30	0,0659	0,0657	0,0654	0,0648	0,0642	0,0635	0,0626	0,0616	0,0605	0,0593	0,0580
1,40	0,0477	0,0475	0,0473	0,0470	0,0466	0,0461	0,0456	0,0449	0,0442	0,0434	0,0426
1,50	0,0339	0,0338	0,0336	0,0334	0,0332	0,0329	0,0326	0,0318	0,0316	0,0312	0,0307
1,60	0,0236	0,0235	0,0235	0,0234	0,0232	0,0230	0,0227	0,0225	0,0222	0,0219	0,0216
1,70	0,0162	0,0162	0,0162	0,0161	0,0159	0,0157	0,0155	0,0155	0,0154	0,0151	0,0149
1,80	0,0109	0,0109	0,0109	0,0108	0,0107	0,0106	0,0105	0,0105	0,0104	0,0103	0,0102
1,90	0,0072	0,0072	0,0072	0,0071	0,0071	0,0071	0,0070	0,0070	0,0069	0,0068	0,0067
2,00	0,0047	0,0047	0,0047	0,0046	0,0046	0,0046	0,0046	0,0045	0,0044	0,0044	0,0044
2,10	0,0030	0,0030	0,0030	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029	0,0028	0,0028
2,20	0,0019	0,0019	0,0019	0,0019	0,0018	0,0018	0,0018	0,0018	0,0018	0,0018	0,0018
2,30	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011
2,40	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007
2,50	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004

Приложение 2 (продолжение)

z	$\alpha = 1,2$	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
0,00	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1653	0,1335	0,1108	0,0907
0,20	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1653	0,1353	0,1108	0,0907
0,30	0,3007	0,2723	0,2465	0,2231	0,2019	0,1653	0,1353	0,1108	0,0907
0,35	0,2989	0,2713	0,2460	0,2228	0,2018	0,1653	0,1353	0,1108	0,0907
0,40	0,2951	0,2689	0,2444	0,2219	0,2012	0,1651	0,1353	0,1108	0,0907
0,42	0,2929	0,2673	0,2434	0,2212	0,2008	0,1650	0,1352	0,1107	0,0907
0,44	0,2902	0,2654	0,2421	0,2203	0,2002	0,1647	0,1351	0,1107	0,0907
0,46	0,2871	0,2631	0,2404	0,2192	0,1994	0,1644	0,1350	0,1106	0,0906
0,48	0,2835	0,2605	0,2385	0,2178	0,1985	0,1639	0,1348	0,1106	0,0906
0,50	0,2796	0,2574	0,2362	0,2161	0,1972	0,1633	0,1345	0,1105	0,0906
0,52	0,2752	0,2540	0,2336	0,2141	0,1957	0,1625	0,1342	0,1103	0,0905
0,54	0,2705	0,2502	0,2306	0,2118	0,1940	0,1616	0,1337	0,1101	0,0905
0,56	0,2655	0,2460	0,2273	0,2092	0,1919	0,1604	0,1331	0,1098	0,0903
0,58	0,2601	0,2416	0,2236	0,2063	0,1897	0,1591	0,1323	0,1094	0,0901
0,60	0,2544	0,2369	0,2197	0,2031	0,1871	0,1575	0,1314	0,1089	0,0899
0,62	0,2484	0,2320	0,2156	0,1997	0,1844	0,1558	0,1303	0,1083	0,0895
0,64	0,2423	0,2267	0,2111	0,1954	0,1813	0,1539	0,1292	0,1076	0,0892
0,66	0,2360	0,2212	0,2065	0,1921	0,1781	0,1517	0,1278	0,1070	0,0887
0,68	0,2296	0,2157	0,2018	0,1880	0,1747	0,1494	0,1262	0,1060	0,0881
0,70	0,2230	0,2099	0,1967	0,1837	0,1711	0,1468	0,1245	0,1049	0,0874
0,75	0,2055	0,1949	0,1836	0,1723	0,1610	0,1396	0,1195	0,1015	0,0852
0,80	0,1892	0,1796	0,1699	0,1602	0,1505	0,1317	0,1138	0,0975	0,0824

Приложение 2 (продолжение)

z	α = 1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
0,85	0,1724	0,1642	0,1560	0,1477	0,1393	0,1229	0,1071	0,0926	0,0790
0,90	0,1561	0,1492	0,1422	0,1350	0,1280	0,1138	0,1000	0,0872	0,0750
0,95	0,1403	0,1346	0,1287	0,1227	0,1166	0,1045	0,0926	0,0813	0,0705
1,00	0,1253	0,1205	0,1156	0,1106	0,1055	0,0953	0,0850	0,0752	0,0657
1,10	0,0983	0,0950	0,0917	0,0882	0,0846	0,0773	0,0699	0,0627	0,0556
1,20	0,0754	0,0732	0,0709	0,0685	0,0660	0,0609	0,0558	0,0507	0,0455
1,30	0,0566	0,0551	0,0536	0,0520	0,0504	0,0467	0,0433	0,0397	0,0361
1,40	0,0417	0,0407	0,0397	0,0386	0,0375	0,0352	0,0328	0,0304	0,0279
1,50	0,0300	0,0294	0,0287	0,0280	0,0273	0,0258	0,0242	0,0226	0,0209
1,60	0,0212	0,0207	0,0203	0,0199	0,0195	0,0185	0,0175	0,0164	0,0153
1,70	0,0147	0,0145	0,0142	0,0139	0,0136	0,0130	0,0123	0,0116	0,0109
1,80	0,0100	0,0099	0,0097	0,0095	0,0093	0,0089	0,0085	0,0081	0,0076
1,90	0,0066	0,0066	0,0065	0,0064	0,0062	0,0060	0,0057	0,0055	0,0052
2,00	0,0043	0,0043	0,0042	0,0042	0,0041	0,0040	0,0038	0,0037	0,0035
2,10	0,0028	0,0028	0,0027	0,0027	0,0026	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023
2,20	0,0018	0,0018	0,0017	0,0017	0,0017	0,0017	0,0016	0,0015	0,0014
2,30	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009
2,40	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006
2,50	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003

Приложение 2 (окончание)

z	$\alpha = 2{,}6$	2,8	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0,75	0,0712	0,0591	0,0489	0,0300	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,80	0,0693	0,0579	0,0481	0,0298	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,85	0,0670	0,0563	0,0471	0,0295	0,0182	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,90	0,0641	0,0543	0,0457	0,0292	0,0180	0,0110	0,0067	0,0041	0,0025
0,95	0,0670	0,0519	0,0440	0,0284	0,0178	0,0110	0,0067	0,0041	0,0025
1,00	0,0570	0,0491	0,0419	0,0275	0,0175	0,0109	0,0067	0,0041	0,0025
1,10	0,0490	0,0428	0,0371	0,0252	0,0165	0,0105	0,0065	0,0040	0,0025
1,20	0,0406	0,0360	0,0316	0,0222	0,0150	0,0098	0,0063	0,0039	0,0024
1,30	0,0326	0,0292	0,0260	0,0189	0,0132	0,0089	0,0059	0,0037	0,0024
1,40	0,0254	0,0230	0,0208	0,0155	0,0112	0,0078	0,0053	0,0035	0,0022
1,50	0,0192	0,0176	0,0160	0,0123	0,0091	0,0066	0,0046	0,0032	0,0020
1,60	0,0142	0,0131	0,0120	0,0095	0,0072	0,0053	0,0038	0,0027	0,0018
1,70	0,0102	0,0095	0,0088	0,0071	0,0055	0,0042	0,0031	0,0022	0,0015
1,80	0,0072	0,0067	0,0063	0,0052	0,0041	0,0032	0,0024	0,0018	0,0012
1,90	0,0049	0,0046	0,0043	0,0036	0,0029	0,0023	0,0018	0,0014	0,0010
2,00	0,0033	0,0031	0,0029	0,0025	0,0020	0,0016	0,0013	0,0010	0,0007
2,10	0,0022	0,0020	0,0019	0,0017	0,0014	0,0012	0,0009	0,0007	0,0005
2,20	0,0014	0,0013	0,0013	0,0011	0,0009	0,0008	0,0006	0,0005	0,0004
2,30	0,0009	0,0008	0,0008	0,0007	0,0006	0,0005	0,0004	0,0003	0,0003
2,40	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0002
2,50	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Приложение 3

Таблица значений функции $D^*(z, \alpha)$

z	α =0, 10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70
0,00	0,9048	0,8607	0,8187	0,7788	0,7408	0,7047	0,6703	0,6376	0,6065	0,5488	0,4966
0,02	0,9044	0,8607	0,8187	0,7788	0,7408	0,7047	0,6703	0,6376	0,6065	0,5488	0,4966
0,04	0,8278	0,8527	0,8183	0,7788	0,7408	0,7047	0,6703	0,6376	0,6065	0,5488	0,4966
0,06	0,6666	0,7838	0,8005	0,7756	0,7404	0,7046	0,6703	0,6376	0,6065	0,5488	0,4966
0,08	0,5293	0,6766	0,7420	0,7519	0,7329	0,7027	0,6699	0,6376	0,6065	0,5488	0,4966
0,10	0,4273	0,5734	0,6624	0,7023	0,7071	0,6915	0,6657	0,6362	0,6061	0,5488	0,4966
0,12	0,3520	0,4866	0,5821	0,6395	0,6644	0,6659	0,6521	0,6297	0,6033	0,5484	0,4965
0,14	0,2951	0,4158	0,5096	0,5746	0,6126	0,6286	0,6276	0,6149	0,5952	0,5464	0,4962
0,16	0,2511	0,3585	0,4466	0,5134	0,5589	0,5849	0,5946	0,5917	0,5800	0,5409	0,4946
0,18	0,2163	0,3115	0,3929	0,4581	0,5065	0,5389	0,5567	0,5623	0,5582	0,5309	0,4908
0,20	0,1881	0,2727	0,3471	0,4093	0,4582	0,4938	0,5170	0,5290	0,5316	0,5160	0,4837
0,22	0,1649	0,2403	0,3080	0,3663	0,4141	0,4509	0,4774	0,4941	0,5019	0,4970	0,4730
0,24	0,1455	0,2130	0,2745	0,3286	0,3744	0,4114	0,4394	0,4593	0,4711	0,4748	0,4590
0,26	0,1292	0,1898	0,2456	0,2956	0,3389	0,3750	0,4037	0,4252	0,4399	0,4506	0,4424
0,28	0,1154	0,1698	0,2204	0,2665	0,3076	0,3419	0,3705	0,3930	0,4049	0,4256	0,4236
0,30	0,1034	0,1524	0,1986	0,2409	0,2788	0,3119	0,3399	0,3625	0,3747	0,4003	0,4036
0,32	0,0930	0,1373	0,1793	0,2182	0,2536	0,2848	0,3117	0,3341	0,3521	0,3749	0,3828
0,34	0,0839	0,1241	0,1623	0,1980	0,2308	0,2602	0,2859	0,3080	0,3259	0,3508	0,3615
0,36	0,0754	0,1123	0,1473	0,1801	0,2105	0,2380	0,2625	0,2837	0,3014	0,3273	0,3406
0,38	0,0688	0,1021	0,1340	0,1640	0,1921	0,2178	0,2446	0,2613	0,2788	0,3049	0,3200
0,40	0,0625	0,0928	0,1220	0,1497	0,1757	0,1996	0,2214	0,2407	0,2576	0,2839	0,3001
0,42	0,0569	0,0846	0,1113	0,1367	0,1607	0,1831	0,2035	0,2218	0,2380	0,2639	0,2809
0,44	0,0519	0,0772	0,1017	0,1251	0,1473	0,1680	0,1871	0,2045	0,2199	0,2453	0,2626

Приложение 3 (продолжение)

z	$\alpha = 0{,}10$	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70
0,46	0,0474	0,0705	0,0930	0,1145	0,1351	0,1543	0,1722	0,1885	0,2031	0,2277	0,2453
0,48	0,0434	0,0646	0,0851	0,1050	0,1240	0,1418	0,1585	0,1739	0,1879	0,2114	0,2288
0,50	0,0397	0,0591	0,0763	0,0964	0,1138	0,1304	0,1453	0,1604	0,1736	0,1992	0,2133
0,52	0,0364	0,0542	0,0716	0,0885	0,1047	0,1200	0,1345	0,1480	0,1605	0,1819	0,1987
0,54	0,0334	0,0498	0,0658	0,0813	0,0963	0,1105	0,1240	0,1366	0,1483	0,1689	0,1849
0,56	0,0307	0,0457	0,0604	0,0747	0,0886	0,1018	0,1143	0,1261	0,1369	0,1565	0,1721
0,58	0,0281	0,0420	0,0555	0,0688	0,0815	0,0938	0,1054	0,1164	0,1267	0,1449	0,1599
0,60	0,0258	0,0386	0,0511	0,0633	0,0751	0,0865	0,0972	0,1075	0,1173	0,1345	0,1486
0,62	0,0238	0,0357	0,0443	0,0600	0,0692	0,0797	0,0898	0,0993	0,1082	0,1246	0,1382
0,64	0,0219	0,0327	0,0433	0,0537	0,0638	0,0735	0,0828	0,0918	0,1003	0,1154	0,1284
0,66	0,0202	0,0301	0,0399	0,0495	0,0588	0,0678	0,0765	0,0848	0,0927	0,1069	0,1191
0,68	0,0185	0,0277	0,0368	0,0456	0,0542	0,0626	0,0706	0,0783	0,0857	0,0990	0,1107
0,70	0,0171	0,0255	0,0339	0,0421	0,0500	0,0577	0,0652	0,0722	0,0791	0,0917	0,1027
0,75	0,0140	0,0208	0,0276	0,0343	0,0409	0,0472	0,0535	0,0594	0,0650	0,0757	0,0851
0,85	0,0093	0,0139	0,0184	0,0228	0,0272	0,0315	0,0357	0,0398	0,0438	0,0513	0,0581
0,90	0,0076	0,0113	0,0150	0,0187	0,0224	0,0258	0,0292	0,0326	0,0360	0,0421	0,0478
0,95	0,0062	0,0093	0,0123	0,0153	0,0182	0,0211	0,0240	0,0267	0,0294	0,0344	0,0393
1,00	0,0050	0,0075	0,0100	0,0124	0,0148	0,0172	0,0195	0,0218	0,0240	0,0283	0,0323
1,10	0,0032	0,0049	0,0066	0,0082	0,0098	0,0114	0,0130	0,0145	0,0159	0,0187	0,0215
1,20	0,0022	0,0032	0,0042	0,0053	0,0064	0,0075	0,0085	0,0095	0,0105	0,0124	0,0143
1,30	0,0013	0,0021	0,0028	0,0035	0,0041	0,0048	0,0055	0,0062	0,0068	0,0081	0,0093
1,40	0,0009	0,0013	0,0017	0,0022	0,0027	0,0032	0,0036	0,0040	0,0044	0,0052	0,0060
1,50	0,0005	0,0009	0,0012	0,0015	0,0017	0,0020	0,0023	0,0026	0,0028	0,0033	0,0038
1,60	0,0003	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0015	0,0017	0,0018	0,0021	0,0024
1,70	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0013	0,0015
1,80	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0007	0,0008	0,0009
1,90	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006
2,00	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003
2,10	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
2,20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
2,30	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Приложение 3 (продолжение)

z	$\alpha = 0{,}8$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0
0,00	0,4493	0,4066	0,3679	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1653	0,1353
0,20	0,4447	0,4051	0,3675	0,3328	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1653	0,1353
0,25	0,4268	0,3962	0,3634	0,3312	0,3005	0,2723	0,2465	0,2231	0,2019	0,1653	0,1353
0,30	0,3937	0,3749	0,3507	0,3240	0,2969	0,2705	0,2457	0,2228	0,2017	0,1653	0,1353
0,32	0,3776	0,3632	0,3429	0,3190	0,2938	0,2688	0,2448	0,2223	0,2014	0,1652	0,1353
0,34	0,3605	0,3502	0,3335	0,3127	0,2898	0,2672	0,2435	0,2215	0,2010	0,1651	0,1353
0,36	0,3429	0,3362	0,3229	0,3051	0,2846	0,2616	0,2412	0,2203	0,2003	0,1649	0,1353
0,38	0,3251	0,3251	0,3114	0,2963	0,2784	0,2587	0,2384	0,2185	0,1992	0,1646	0,1352
0,40	0,3072	0,3064	0,2990	0,2868	0,2712	0,2535	0,2349	0,2161	0,1978	0,1640	0,1350
0,42	0,2896	0,2910	0,2862	0,2765	0,2632	0,2476	0,2306	0,2131	0,1958	0,1632	0,1347
0,44	0,2726	0,2758	0,2730	0,2656	0,2545	0,2408	0,2255	0,2095	0,1932	0,1620	0,1342
0,46	0,2562	0,2607	0,2599	0,2544	0,2453	0,2335	0,2199	0,2052	0,1902	0,1606	0,1336
0,48	0,2402	0,2461	0,2467	0,2430	0,2357	0,2256	0,2136	0,2005	0,1865	0,1587	0,1327
0,50	0,2251	0,2317	0,2336	0,2314	0,2258	0,2174	0,2069	0,1951	0,1824	0,1564	0,1315
0,52	0,2105	0,2178	0,2209	0,2200	0,2157	0,2088	0,1998	0,1893	0,1778	0,1537	0,1301
0,54	0,1969	0,2045	0,2084	0,2086	0,2056	0,2001	0,1924	0,1832	0,1729	0,1507	0,1284
0,56	0,1838	0,1920	0,1963	0,1974	0,1955	0,1912	0,1848	0,1767	0,1676	0,1472	0,1264
0,58	0,1717	0,1798	0,1847	0,1865	0,1855	0,1823	0,1770	0,1701	0,1620	0,1435	0,1241
0,60	0,1601	0,1683	0,1734	0,1760	0,1758	0,1734	0,1692	0,1633	0,1561	0,1395	0,1215
0,62	0,1491	0,1574	0,1628	0,1658	0,1664	0,1647	0,1613	0,1563	0,1501	0,1352	0,1186
0,64	0,1389	0,1470	0,1526	0,1559	0,1571	0,1561	0,1536	0,1501	0,1441	0,1308	0,1155
0,66	0,1293	0,1373	0,1431	0,1465	0,1481	0,1478	0,1459	0,1425	0,1379	0,1262	0,1123
0,68	0,1203	0,1281	0,1337	0,1376	0,1395	0,1396	0,1383	0,1356	0,1317	0,1214	0,1088
0,70	0,1120	0,1194	0,1250	0,1290	0,1311	0,1318	0,1310	0,1288	0,1257	0,1167	0,1053
0,75	0,0932	0,1000	0,1048	0,1093	0,1113	0,1133	0,1135	0,1125	0,1107	0,1044	0,0957
0,80	0,0773	0,0834	0,0883	0,0922	0,0950	0,0968	0,0975	0,0974	0,0965	0,0924	0,0860
0,85	0,0641	0,0694	0,0737	0,0774	0,0802	0,0821	0,0832	0,0836	0,0833	0,0809	0,0764
0,90	0,0530	0,0575	0,0614	0,0647	0,0672	0,0692	0,0706	0,0713	0,0714	0,0701	0,0670
0,95	0,0437	0,0476	0,0509	0,0538	0,0562	0,0581	0,0595	0,0604	0,0608	0,0604	0,0584

Приложение 3 (продолжение)

z	α = 0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0
1,00	0,0359	0,0392	0,0421	0,0446	0,0468	0,0485	0,0499	0,0509	0,0515	0,0516	0,0504
1,10	0,0241	0,0264	0,0285	0,0304	0,0321	0,0335	0,0346	0,0355	0,0362	0,0368	0,0367
1,20	0,0160	0,0176	0,0191	0,0204	0,0216	0,0226	0,0235	0,0243	0,0250	0,0258	0,0260
1,30	0,0105	0,0116	0,0126	0,0135	0,0143	0,0151	0,0158	0,0164	0,0168	0,0176	0,0180
1,40	0,0068	0,0075	0,0082	0,0088	0,0094	0,0099	0,0104	0,0108	0,0111	0,0118	0,0122
1,50	0,0046	0,0048	0,0053	0,0057	0,0061	0,0065	0,0068	0,0071	0,0078	0,0078	0,0081
1,60	0,0027	0,0030	0,0033	0,0036	0,0039	0,0041	0,0043	0,0045	0,0047	0,0050	0,0053
1,70	0,0017	0,0019	0,0021	0,0023	0,0024	0,0026	0,0027	0,0029	0,0030	0,0032	0,0034
1,80	0,0010	0,0011	0,0013	0,0014	0,0015	0,0016	0,0017	0,0018	0,0019	0,0020	0,0021
1,90	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0009	0,0010	0,0010	0,0011	0,0011	0,0012	0,0013
2,00	0,0004	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0007	0,0008	0,0008
2,10	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005
2,20	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
2,30	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
2,40	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
2,50	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

Приложение 3 (окончание)

z	α = 2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0,00	0,1108	0,0907	0,0743	0,0608	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,40	0,1108	0,0907	0,0743	0,0608	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,42	0,1105	0,0906	0,0743	0,0608	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,44	0,1102	0,0905	0,0742	0,0608	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,46	0,1099	0,0904	0,0742	0,0608	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,48	0,1096	0,0903	0,0741	0,0608	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,50	0,1093	0,0902	0,0741	0,0607	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025

0,52	0,1086	0,0898	0,0740	0,0606	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,54	0,1077	0,0894	0,0738	0,0606	0,0497	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,56	0,1066	0,0887	0,0734	0,0605	0,0496	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,58	0,1053	0,0879	0,0731	0,0603	0,0496	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,60	0,1037	0,0872	0,0727	0,0601	0,0495	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,62	0,1019	0,0862	0,0721	0,0598	0,0493	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,64	0,0999	0,0850	0,0714	0,0594	0,0491	0,0301	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,66	0,0979	0,0836	0,0705	0,0589	0,0489	0,0301	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,68	0,0955	0,0820	0,0695	0,0584	0,0486	0,0300	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,70	0,0930	0,0803	0,0684	0,0577	0,0482	0,0299	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,75	0,0859	0,0754	0,0652	0,0555	0,0468	0,0296	0,0182	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025
0,80	0,0784	0,0698	0,0611	0,0528	0,0450	0,0291	0,0181	0,0110	0,0067	0,0041	0,0025
0,85	0,0705	0,0637	0,0565	0,0495	0,0427	0,0282	0,0178	0,0110	0,0067	0,0031	0,0025
0,90	0,0628	0,0575	0,0518	0,0458	0,0400	0,0271	0,0175	0,0109	0,0067	0,0041	0,0025
0,95	0,0553	0,0512	0,0466	0,0418	0,0370	0,0258	0,0170	0,0107	0,0067	0,0041	0,0025
1,00	0,0482	0,0452	0,0416	0,0378	0,0338	0,0242	0,0163	0,0105	0,0066	0,0040	0,0025
1,10	0,0358	0,0341	0,0320	0,0298	0,0271	0,0205	0,0145	0,0097	0,0663	0,0039	0,0024
1,20	0,0257	0,0250	0,0238	0,0225	0,0210	0,0166	0,0123	0,0086	0,0058	0,0037	0,0024
1,30	0,0180	0,0177	0,0171	0,0165	0,0156	0,0129	0,0099	0,0073	0,0051	0,0034	0,0022
1,40	0,0124	0,0123	0,0120	0,0117	0,0112	0,0096	0,0077	0,0059	0,0043	0,0030	0,0020
1,50	0,0083	0,0083	0,0082	0,0081	0,0078	0,0069	0,0058	0,0046	0,0034	0,0024	0,0017
1,60	0,0054	0,0055	0,0055	0,0055	0,0053	0,0049	0,0042	0,0034	0,0026	0,0018	0,0014
1,70	0,0035	0,0036	0,0036	0,0036	0,0035	0,0033	0,0029	0,0025	0,0020	0,0015	0,0011
1,80	0,0022	0,0022	0,0023	0,0023	0,0023	0,0022	0,0020	0,0017	0,0014	0,0011	0,0009
1,90	0,0014	0,0014	0,0014	0,0014	0,0015	0,0014	0,0013	0,0012	0,0010	0,0008	0,0006
2,00	0,0008	0,0008	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0007	0,0006	0,0005
2,10	0,0005	0,0005	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0003
2,20	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
2,30	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001
2,40	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
2,50	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000

Приложение 4

Таблицы значений функций $F_1(u)$, $F_2(u)$

Функции $F_1(u)$, $F_2(u)$ заданы формулами

$$F_1(u) = u\Phi^*(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}; \; F_2(u) = \sqrt{F_3(u) - F_1^2(u)},$$

$$F_3(u) = ue^{-u^2/2}/\sqrt{2\pi} + (1+u^2)\Phi^*(u);$$

Приведены значения этих функций в интервале $-2{,}00 \leqslant u \leqslant 2{,}00$ с шагом 0,01, причем четвертый знак в таблицах округлен до ближайшего целого значения.

При больших значениях u, $u \geqslant 3{,}0$ функции могут рассчитываться по асимптотическим формулам:

$$F_1(u) \approx u + \frac{e^{-u^2/2}}{u^2\sqrt{2\pi}}; \; F_2(u) \approx 1 - \frac{e^{-u^2/2}}{u\sqrt{2\pi}}$$

(точность до четвертого знака начинается со значения $u \geqslant 3{,}40$); при больших по модулю отрицательных значениях u аналогично

$$F_1(u) \approx \frac{e^{-u^2/2}}{u^2\sqrt{2\pi}}; \quad F_2(u) \approx \frac{e^{-u^2/4}}{|u|^{3/2}\sqrt{2\pi}};$$

(точность до четвертого знака при $u \leqslant -3{,}40$).

Значения функций F_1, F_2

u	F_1	F_2	u	F_1	F_2
−3,00	0,0004	0,0142	−1,80	0,0143	0,1002
−2,90	0,0005	0,0171	−1,79	0,0147	0,1016
−2,80	0,0008	0,0916	−1,78	0,0150	0,1030
−2,70	0,0011	0,0245	−1,77	0,0154	0,1044
−2,60	0,0015	0,0292	−1,76	0,0158	0,1058
−2,50	0,0020	0,0346	−1,75	0,0162	0,1072
−2,40	0,0027	0,0408	−1,74	0,0166	0,1086
−2,30	0,0037	0,0478	−1,73	0,0170	0,1101
−2,20	0,0049	0,0559	−1,72	0,0174	0,1116
−2,10	0,0065	0,0651	−1,71	0,0179	0,1131
−2,00	0,0085	0,0755	−1,70	0,0183	0,1146
−1,99	0,0087	0,0766	−1,69	0,0187	0,1162
−1,98	0,0090	0,0777	−1,68	0,0192	0,1177
−1,97	0,0092	0,0788	−1,67	0,0096	0,1193
−1,96	0,0094	0,0800	−1,66	0,0202	0,1209
−1,95	0,0097	0,0811	−1,65	0,0206	0,1225
−1,94	0,0100	0,0823	−1,64	0,0211	0,1241
−1,93	0,0102	0,0835	−1,63	0,0216	0,1257
−1,92	0,0105	0,0847	−1,62	0,0221	0,1274
−1,91	0,0108	0,0859	−1,61	0,0227	0,1290
−1,90	0,0111	0,0871	−1,60	0,0232	0,1307
−1,89	0,0114	0,0884	−1,59	0,0238	0,1324
−1,88	0,0117	0,0896	−1,58	0,0243	0,1341
−1,87	0,0120	0,0909	−1,57	0,0249	0,1358
−1,86	0,0123	0,0922	−1,56	0,0255	0,1375
−1,85	0.0126	0,0935	−1.55	0,0261	0,1393

Приложение 4 (продолжение)

u	F_1	F_2	u	F_1	F_2
−1,84	0,0129	0,0948	−1,54	0,0267	0,1411
−1,83	0,0133	0,0961	−1,53	0,0273	0,1429
−1,82	0,0136	0,0975	−1,52	0,0280	0,1447
−1,81	0,0139	0,0988	−1,51	0,0286	0,1465
−1,80	0,0143	0,1002	−1,50	0,0293	0,1483
−1,49	0,0300	0,1501	−1,19	0,0573	0,2135
−1,48	0,0307	0,1520	−1,18	0,0584	0,2159
−1,47	0,0314	0,1539	−1,17	0,0596	0,2183
−1,46	0,0321	0,1558	−1,16	0,0609	0,2207
−1,45	0,0328	0,1577	−1,15	0,0621	0,2231
−1,44	0,0335	0,1596	−1,14	0,0634	0,2255
−1,43	0,0343	0,1616	−1,13	0,0646	0,2280
−1,42	0,0351	0,1636	−1,12	0,0659	0,2305
−1,41	0,0359	0,1656	−1,11	0,0673	0,2330
−1,40	0,0367	0,1676	−1,10	0,0686	0,2355
−1,39	0,0375	0,1696	−1,09	0,0699	0,2380
−1,38	0,0383	0,1716	−1,08	0,0714	0,2406
−1,37	0,0392	0,1737	−1,07	0,0728	0,2431
−1,36	0,0400	0,1757	−1,06	0,0742	0,2457
−1,35	0,0409	0,1778	−1,05	0,0757	0,2483
−1,34	0,0418	0,1799	−1,04	0,0772	0,2509
−1,33	0,0427	0,1820	−1,03	0,0787	0,2535
−1,32	0,0436	0,1842	−1,02	0,0802	0,2562
−1,31	0,0445	0,1863	−1,01	0,0817	0,2588
−1,30	0,0455	0,1885	−1,00	0,0833	0,2615
−1,29	0,0465	0,1907	−0,99	0,0849	0,2642
−1,28	0,0475	0,1929	−0,98	0,0866	0,2669
−1,27	0,0485	0,1951	−0,97	0,0882	0,2696
−1,26	0,0495	0,1973	−0,96	0,0899	0,2723
−1,25	0,0506	0,1996	−0,95	0,916	0,2751
−1,24	0,0517	0,2019	−0,94	0,0933	0,2779
−1,23	0,0528	0,2042	−0,93	0,0951	0,2807
−1,22	0,0539	0,2065	−0,92	0,0968	0,2835
−1,21	0,0550	0,2088	−0,91	0,0986	0,2863
−1,20	0,0561	0,2112	−0,90	0,1004	0,2891
−0,89	0,1023	0,2919	−0,59	0,1714	0,3835
−0,88	0,1042	0,2948	−0,58	0,1742	0,3868
−0,87	0,1061	0,2977	−0,57	0,1771	0,3900
−0,86	0,1080	0,3006	−0,56	0,1799	0,3932
−0,85	0,1100	0,3035	−0,55	0,1828	0,3965
−0,84	0,1120	0,3065	−0,54	0,1857	0,3998
−0,83	0,1140	0,3094	−0,53	0,1187	0,4030
−0,82	0,1160	0,3124	−0,52	0,1917	0,4063
−0,81	0,1181	0,3155	−0,51	0,1947	0,4096
−0,80	0,1202	0,3182	−0,50	0,1978	0,4129
−0,79	0,1223	0,3214	−0,49	0,2009	0,4162
−0,78	0,1245	0,3243	−0,48	0,2041	0,4196
−0,77	0,1267	0,3272	−0,47	0,2072	0,4229
−0,76	0,1289	0,3302	−0,46	0,2105	0,4263
−0,75	0,1312	0,3332	−0,45	0,2137	0,4296

Приложение 4 (продолжение)

u	F_1	F_2	u	F_1	F_2
−0,74	0,1335	0,3362	−0,44	0,2170	0,4330
−0,73	0,1358	0,3393	−0,43	0,2203	0,4363
−0,72	0,1381	0,3424	−0,42	0,2236	0,4397
−0,71	0,1405	0,3455	−0,41	0,2270	0,4430
−0,70	0,1429	0,3486	−0,40	0,2304	0,4464
−0,69	0,1453	0,3517	−0,39	0,2339	0,4498
−0,68	0,1478	0,3548	−0,33	0,2374	0,4532
−0,67	0,1503	0,3580	−0,37	0,2409	0,4566
−0,66	0,1528	0,3611	−0,36	0,2445	0,4600
−0,65	0,1554	0,3643	−0,35	0,2481	0,4634
−0,64	0,1580	0,3675	−0,34	0,2518	0,4668
−0,63	0,1606	0,3707	−0,33	0,2555	0,4702
−0,62	0,1633	0,3739	−0,32	0,2592	0,4736
−0,61	0,1660	0,3771	−0,31	0,2630	0,4771
−0,60	0,1687	0,3803	−0,30	0,2668	0,4805
−0,29	0,2706	0,4839	0,01	0,4039	0,5872
−0,28	0,2745	0,4874	0,02	0,4090	0,5906
−0,27	0,2784	0,4908	0,03	0,4141	0,5940
−0,26	0,2823	0,4943	0,04	0,4192	0,5974
−0,25	0,2863	0,4977	0,05	0,4244	0,6008
−0,24	0,2903	0,5012	0,06	0,4296	0,6042
−0,23	0,2944	0,5046	0,07	0,4349	0,6076
−0,22	0,2985	0,5081	0,08	0,4402	0,6110
−0,21	0,3027	0,5115	0,09	0,4455	0,6143
−0,20	0,3069	0,5150	0,10	0,4509	0,6177
−0,19	0,3111	0,5184	0,11	0,4562	0,6211
−0,18	0,3154	0,5219	0,12	0,4616	0,6244
−0,17	0,3197	0,5253	0,13	0,4670	0,6277
−0,16	0,3240	0,5288	0,14	0,4725	0,6311
−0,15	0,3284	0,5322	0,15	0,4784	0,6344
−0,14	0,3328	0,5357	0,16	0,4837	0,6377
−0,13	0,3373	0,5391	0,17	0,4894	0,6410
−0,12	0,3418	0,5426	0,18	0,4954	0,6443
−0,11	0,3463	0,5460	0,19	0,5011	0,6476
−0,10	0,3509	0,5495	0,20	0,5069	0,6509
−0,09	0,3556	0,5529	0,21	0,5127	0,6542
−0,08	0,3602	0,5564	0,22	0,5185	0,6575
−0,07	0,3649	0,5598	0,23	0,5244	0,6607
−0,06	0,3696	0,5633	0,24	0,5303	0,6640
−0,05	0,3744	0,5667	0,25	0,5363	0,6672
−0,04	0,3792	0,5701	0,26	0,5423	0,6704
−0,03	0,3841	0,5736	0,27	0,5484	0,6736
−0,02	0,3890	0,5770	0,28	0,5545	0,6768
−0,01	0,3939	0,5804	0,29	0,5606	0,6800
0,00	0,3989	0,5838	0,30	0,5668	0,6832
0,31	0,5730	0,6864	0,61	0,7760	0,7748
0,32	0,5792	0,6895	0,62	0,7833	0,7775
0,33	0,5855	0,6927	0,63	0,7906	0,7802
0,34	0,5918	0,6958	0,64	0,7980	0,7829

Приложение 4 (продолжение)

u	F_1	F_2	u	F_1	F_2
0,35	0,5981	0,6989	0,65	0,8054	0,7855
0,36	0,6054	0,7020	0,66	0,8128	0,7881
0,37	0,6109	0,7051	0,67	0,8203	0,7907
0,38	0,6174	0,7081	0,68	0,8278	0,7933
0,39	0,6239	0,7112	0,69	0,8353	0,7959
0,40	0,6304	0,7142	0,70	0,8429	0,7985
0,41	0,6370	0,7173	0,71	0,8505	0,8010
0,42	0,6436	0,7203	0,72	0,8581	0,8035
0,43	0,6503	0,7233	0,73	0,8657	0,8060
0,44	0,6570	0,7263	0,74	0,8734	0,8085
0,45	0,6637	0,7293	0,75	0,8811	0,8110
0,46	0,6705	0,7323	0,76	0,8888	0,8135
0,47	0,6772	0,7352	0,77	0,8966	0,8159
0,48	0,6841	0,7381	0,78	0,9045	0,8183
0,49	0,6909	0,7410	0,79	0,9123	0,8207
0,50	0,6978	0,7439	0,80	0,9202	0,8231
0,51	0,7047	0,7468	0,81	0,9278	0,8255
0,52	0,7117	0,7497	0,82	0,9356	0,8278
0,53	0,7187	0,7525	0,83	0,9436	0,8301
0,54	0,7257	0,7554	0,84	0,9517	0,8324
0,55	0,7328	0,7582	0,85	0,9600	0,8347
0,56	0,7399	0,7610	0,86	0,9685	0,8370
0,57	0,7471	0,7638	0,87	0,9771	0,8392
0,58	0,7542	0,7666	0,88	0,9859	0,8415
0,59	0,7614	0,7694	0,89	0,9949	0,8437
0,60	0,7887	0,7721	0,90	1,0004	0,8459
0,91	1,0112	0,8481	1,21	1,2650	0,9041
0,92	1,0185	0,8502	1,22	1,2739	0,9057
0,93	1,0261	0,8523	1,23	1,2882	0,9072
0,94	1,0337	0,8544	1,24	1,2917	0,9088
0,95	1,0416	0,8565	1,25	1,3006	0,9103
0,96	1,0496	0,8586	1,26	1,3095	0,9118
0,97	1,0578	0,8606	1,27	1,3185	0,9133
0,98	1,0661	0,8627	1,28	1,3275	0,9147
0,99	1,0746	0,8647	1,29	1,3365	0,9162
1,00	1,0833	0,8667	1,30	1,3455	0,9176
1,01	1,0917	0,8687	1,31	1,3545	0,9190
1,02	1,1002	0,8706	1,32	1,3636	0,9204
1,03	1,1087	0,8725	1,33	1,3727	0,9217
1,04	1,1172	0,8744	1,34	1,3818	0,9231
1,05	1,1257	0,8763	1,35	1,3909	0,9244
1,06	1,1342	0,8782	1,36	1,4000	0,9257
1,07	1,1428	0,8800	1,37	1,4092	0,9270
1,08	1,1514	0,8819	1,38	1,4183	0,9283
1,09	1,1600	0,8837	1,39	1,4275	0,9296
1,10	1,1686	0,8855	1,40	1,4367	0,9309
1,11	1,1773	0,8873	1,41	1,4458	0,9321
1,12	1,1859	0,8890	1,42	1,4551	0,9333
1,13	1,1946	0,8908	1,43	1,4643	0,9345

Приложение 4 (окончание)

u	F_1	F_2	u	F_1	F_2
1,14	1,2034	0,8925	1,44	1,4735	0,9357
1,15	1,2121	0,8942	1,45	1,4828	0,9369
1,16	1,2209	0,8959	1,46	1,4921	0,9381
1,17	1,2296	0,8976	1,47	1,5014	0,9392
1,18	1,2384	0,8992	1,48	1,5107	0,9404
1,19	1,2473	0,9009	1,49	1,5200	0,9414
1,20	1,2561	0,9025	1,50	1,5293	0,9425
1,51	1,5386	0,9436	1,81	1,8239	0,9693
1,52	1,5480	0,9447	1,82	1,8336	0,9699
1,53	1,5573	0,9457	1,83	1,8433	0,9705
1,54	1,5667	0,9468	1,84	1,8529	0,9712
1,55	1,5761	0,9478	1,85	1,8626	0,9718
1,56	1,5855	0,9488	1,86	1,8723	0,9724
1,57	1,5949	0,9498	1,87	1,8820	0,9730
1,58	1,6043	0,9507	1,88	1,8917	0,9736
1,59	1,6138	0,9517	1,89	1,9014	0,9742
1,60	1,6232	0,9526	1,90	1,9111	0,9748
1,61	1,6327	0,9535	1,91	1,9208	0,9753
1,62	1,6421	0,9544	1,92	1,9305	0,9759
1,63	1,6516	0,9553	1,93	1,9402	0,9764
1,64	1,6611	0,9562	1,94	1,9500	0,9769
1,65	1,6706	0,9571	1,95	1,9597	0,9774
1,66	1,6801	0,9580	1,96	1,9694	0,9779
1,67	1,6896	0,9588	1,97	1,9792	0,9784
1,68	1,6992	0,9597	1,98	1,9890	0,9789
1,69	1,7087	0,9605	1,99	1,9987	0,9794
1,70	1,7183	0,9613	2,00	2,0085	0,9799
1,71	1,7279	0,9621	2,10	2,1065	0,9841
1,72	1,7374	0,9629	2,20	2,2049	0,9876
1,73	1,7470	0,9636	2,30	2,3037	0,9904
1,74	1,7566	0,9644	2,40	2,4027	0,9926
1,75	1,7662	0,9651	2,50	2,5020	0,9944
1,76	1,7758	0,9658	2,60	2,6015	0,9958
1,77	1,7854	0,9665	2,70	2,7011	0,9968
1,78	1,7950	0,9672	2,80	2,8008	0,9977
1,79	1,8047	0,9679	2,90	2,9005	0,9983
1,80	1,8143	0,9686	3,00	3,0004	0,9988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Альтшуль А.Х., Калинин М.Ю., Федяев А.П.* Прогнозная оценка эксплуатационных ресурсов подземных вод и сокращения речного стока от работы водозабора (методом ЭГДА) //Гидрологические и инженерно-геологические условия Белоруссии. Минск, 1978. С. 32–43.

2. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.

3. *Бабушкин В.Д., Ванькова Н.Н., Лебедянская З.П.* и др. Изменение гидрогеологических условий при разработке месторождений твердых полезных ископаемых и мероприятия по охране водных ресурсов//Вод. ресурсы. 1977. № 6. С. 59–75.

4. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Математическая теория надежности. М.: Сов. радио, 1969. 488 с.

5. *Белецкий С.С., Томин И.С.* Изменение водности рек под влиянием отбора подземных вод//Мелиорация земель Полесья и охрана окружающей среды. Киев, 1979. С. 45–48.

6. *Бочевер Ф.М.* Неустановившийся приток грунтовых вод к скважине в долинах рек//Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, 1959. № 1.

7. *Бочевер Ф.М.* Теория и практические методы расчета эксплуатационных запасов подземных вод. М.: Недра, 1968. 328 с.

8. *Бутковский А.Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами: (Справочное пособие). М.: Наука, 1979. 224 с.

9. *Бэйтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 344 с.

10. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.

11. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 528 с.

12. Водный кодекс Узбекской ССР. Ташкент: Узбекистан, 1972. 50 с.

13. *Воропаев Г.В., Местечкин В.Б.* Физико-географические основы формирования водохозяйственных балансов. М.: Наука, 1981. 135 с.

14. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

15. *Гохберг Л.К., Лапшин Н.Н.* Решение гидрогеологических задач с помощью численных методов преобразования Лапласа//Тр. ВНИИ ВСЕГИНГЕО. 1970. Вып. 32. С. 93–105.

16. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах на собственные значения. М.: Мир, 1970. 248 с.

17. *Давыдов Э.Г.* Игры, графы, ресурсы. М.: Радио и связь, 1981. 113 с.

18. *Епихов Г.П.* Об одной математической модели речного бассейна//Вод. ресурсы. 1978. № 5. С. 69–78.

19. *Епихов Г.П.* Математическая модель плановой фильтрации во взаимосвязи с речным стоком и ее реализация//Вод. ресурсы. 1980. № 2. С. 35–44.

20. *Злотник В.А.* Методы расчета береговых водозаборов подземных вод с оценкой их влияния на водный режим водоемов и водотоков: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М.: 1979. 18 с.

21. *Злотник В.А., Усенко В.С.* Математические модели и численные методы в задачах взаимосвязи безнапорных подземных и поверхностных вод//Фильтрация воды в пористых средах: Докл. 3-го междунар. симпоз. Киев, 1978. Ч. 4. С. 108–117.

22. *Злотник В.А., Мурашко М.Г.* Расчеты фильтрационных потерь водоемов под влиянием береговых водозаборов//Вод. ресурсы. 1982. № 2. С. 82–88.

23. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

24. *Каплинский М.И.* Комплексное использование поверхностных и подземных вод межгорных впадин (на примере Чуйской впадины Киргизской ССР) //

Некоторые вопросы развития мелиорации в СССР. М., 1975. С. 99–115.

25. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями М.: Наука, 1968. 504 с.

26. *Костяков А.Н., Фаворин Н.Н., Аверьянов С.Ф.* Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 451 с.

27. *Крашин И.И.* Моделирование взаимосвязи поверхностных и подземных вод при оценке запасов инфильтрационного водозабора на р. Серге. – В кн.: Взаимодействие поверхностного и подземного стока. М., 1979. с. 31–42.

28. *Крылов В.И., Скобля Н.С.* Методы приближенного преобразования Фурье и численного обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 233 с.

29. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.

30. *Лапшин Н.Н.* О методике прогноза режима подземных вод в условиях искусственного пополнения//Тр. ВНИИ ВОДГЕО. 1977. Вып. 70. С. 1–3.

31. *Манукьян Д.А., Шестаков В.М.* Методика расчета производительности водозаборных скважин с периодически меняющимся водоотбором//Разведка и охрана недр. 1970. № 6. С. 43–47.

32. *Минкин Е.Л.* Определение количества поверхностных вод, привлекаемых инфильтрационными водозаборами из реки//Вопросы оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод. М., 1969. С. 8–29.

33. *Минкин Е.Л.* Влияние эксплуатации подземных вод на поверхностный сток в пределах речных бассейнов// Вопросы оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод. М., 1970. С. 14–28.

34. *Минкин Е.Л.* К методике учета подземных вод в водохозяйственных балансах//Гидротехн. стр-во. 1972. № 8. С. 2–9.

35. *Минкин Е.Л.* Взаимосвязь подземных и поверхностных вод и ее значение при решении некоторых гидрогеологических и водохозяйственных задач. М.: Стройиздат, 1973. 102 с.

36. *Минкин Е.Л.* Влияние эксплуатации подземных вод на речной сток//Региональная оценка ресурсов подземных вод. М., 1975. С. 121–130.

37. *Минкин Е.Л., Аширова К.Н.* Влияние эксплуатации подземных вод на поверхностный сток в орошаемых районах//Некоторые вопросы развития мелиорации в СССР. М., 1975. С. 144–153.

38. *Минкин Е.Л., Концебовский С.Я.* Учет ресурсов подземных вод при разработке водохозяйственных балансов// Вод. ресурсы. 1979. № 5. С. 61–68.

39. *Минкин Е.Л., Концебовский С.Я.* Влияние эксплуатации подземных вод на речной сток//Тр. Междунар. ассоц. гидрогеологов. 1979. Т. 15. С. 22–30.

40. *Минкин Е.Л., Концебовский С.Я.* Об оценке ущерба речному стоку при эксплуатации подземных вод//Вод. ресурсы. 1980. № 3. С. 60–71.

41. *Мирзаев С.Ш.* Формирование и размещение запасов подземных вод Узбекистана, вопросы их изучения и проблемы возможного использования. Ташкент: Фан, 1974. 224 с.

42. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 400 с.

43. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 368 с.

44. *Первозванский А.А.* Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М.: Физматгиз, 1962. 351 с.

45. *Пискунов Н.С.* Определение передвижения контура нефтеносности и падения давления при эксплуатации крупных месторождений//Тр. ВНИИНефть. 1954. Вып. 6.

46. *Побережский Л.Н.* Водный баланс зоны аэрации в условиях орошения. Л.: Гидрометеоиздат, 1977. 159 с.

47. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.

48. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* . Интегралы и ряды: Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.

49. *Рвачев В.Л., Слесаренко А.П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. Киев.: Наук. думка, 1976. 283 с.

50. *Свешников А.А.* Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1970. 656 с.

51. *Серебренников М.Г.* Гармонический анализ. М.: Гостехиздат, 1948. 338 с.

52. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами/М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

53. *Де Уист Р.* Гидрогеология с основами гидрологии суши. М.: Мир, 1969. 312 с.

54. *Хантуш М.С.* Новое в теории перетекания//Вопросы гидрологических расчетов. М., 1964. С. 43–60.

55. *Харченко С.И.* Гидрология орошаемых земель. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 308 с.

56. *Чарный И.А.* Методы расчета неустановившегося притока грунтовых вод к скважинам при глубинном водопонижении//Инж. сб. 1956. Т. 23.

57. *Черепанский М.М.* Разработка расчетной схемы для оценки влияния отбора подземных вод//Тр. ВНИИ гидротехники и мелиорации. 1979. № 7. С. 91–96.

58. *Шаймуратов Р.В.* Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта. М.: Недра, 1980. 203 с.

59. *Шестаков В.М.* Динамика подземных вод. М.: Изд-во МГУ. 386 с.

60. *Штаковский А., Черепанский М.* Прогнозирование и учет влияния интенсивного отбора подземных вод на режим малых рек//Актуальные проблемы охраны природы. Иваново, 1977. С. 86–90.

61. *Cunningham A.B.* Modelling and analysis of hydraulic interchange of surface and ground water: Doct. diss./Univ. of Nevada, Reno, 1977.

62. *Davies B., Martin B.* Numerical inversion of the Laplace transforms: A survey and comparison of methods//J. Comput. Phys., 1979. Vol. 33. N 1. P. 1–32.

63. *Glover R.E., Balmer G.G.* River depletion resulting from pumping a well near a river//Trans. Amer. Geophys. Union. 1954. Vol. 35. N 3. P. 468–470.

64. *Hantush M.S.* Hydraulics of wells// Adv. Hydrosci. 1964, Vol. 1. P. 281–432.

65. *Hantush M.S.* Depletion of storage, leakage and river flow by gravity wells in sloping sands//J. Geophys. Res. 1964. Vol. 69. N 12. P. 2551–2560.

66. *Hantush M.S.* Depletion of flow in right-angle stream bends by steady wells//Water Resour. Res. 1967. Vol. 3. N 1. P. 235–240.

67. *Houdaille A., de Marsily G.* Débits soustraits à une rivière par un pompage effectué dans une nappe alluviale//Eau, 1969. N 1. P. 19–23.

68. *Jenkins C.T.* Techniques for computing rate and volume of stream depletion by wells//Ground Water. 1968. Vol. 6. N 6. P. 27–34.

69. *Lelièvre R.-F., Peaudecerf P., Prudhomme P.* Influence des pompages en nappes alluviales sur le régime des cours d'eau//Bull. Bur. rech. géol. et minières. Sec. III. 1976. N 3/4. P. 151–157.

70. *De Marsily G., Durousseau M.* Recherche de la meilleure implantation des forages pour suralimenter une rivière par injections dans la nappe//Intern. Assoc. Hydrogeol. Mem. 1977. Vol. 13. Pt 1. C1–C13.

71. *Maknoon R., Burges S.J.* Conjunctive use of ground and surface waters//Amer. Water Works Assoc. J. 1978. Vol. 70. N 8. P. 419–424.

72. *Rousselot D.* Conditions de simulation des cours d'eau à pénétration partielle dans les modèles monocouches//Bull. Bur. rech. géol. et minières. Sec. III. N 3/4. P. 159–168.

73. *Saxena R., Chandra Satish.* Effect of ground water pumpage on flow in Ganga river//Irrig. and Power, 1978. Vol. 35. N 2. P. 251–256.

74. *Taylor O.J., Luckey R.R.* Water management studies of a stream-aquifer system, Arkansas river valley, Colorado//Ground Water. 1974. Vol. 12. N 1. P. 22–38.

75. *Theis C.V.* The effect of a well on a nearby stream//Trans. Amer. Geophys. Union. 1941. Vol. 22. P. 734–738.

76. *Walton W.C.* Groundwater resources evaluation. N.Y.: McGrow-Hill. 1970. 664 p.

77. *Young R.A., Bredehoeft J.D.* Digital computer simulation for solving management problems of conjunctive use of groundwater and surface water//Water Resour. Res. 1972. Vol. 8. N 3. P. 553–556.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Глава 1. Общие вопросы методики оценки ресурсов подземных вод и их учета в водохозяйственных балансах 7
1.1. Постановка задач геофильтрационных расчетов. Природные и хозяйственные факторы формирования эксплуатационных ресурсов подземных вод 7
1.2. Методический аппарат исследования реакций геофильтрационных систем 17
1.3. Построение передаточных функций понижения и редукции для условий ограниченных в плане водоносных пластов 24
1.4. Линеаризация зависимости эвапотранспирации грунтовых вод от глубины их залегания для использования в уравнениях фильтрации 49

Глава 2. Оценка эксплуатационных ресурсов подземных вод при их постоянном во времени отборе 60
2.1. Схемы неограниченных однородных пластов 61
2.2. Схемы однородных пластов с границей питания в плане 72
2.3. Схемы пластов-полос 76

Глава 3. Оценка редукции поверхностного стока при постоянном во времени отборе подземных вод 84
3.1. Редукция поверхностного стока в условиях однородного водоносного горизонта с прямолинейным контуром питания в плане 85
3.2. Редукция поверхностного стока в условиях плановой фильтрационной неоднородности 91
3.3. Схемы пластов-полос 106

Глава 4. Оценка эксплуатационных ресурсов подземных вод при периодическом режиме их отбора 115
4.1. Гармонический анализ гидрографа водоотбора 117
4.2. Расчет периодической составляющей понижения в условиях неограниченного однородного пласта 120
4.3. Схема полуограниченного пласта с контуром питания 125
4.4. Особенности режима эксплуатационных колебаний уровня (напора) подземных вод при их периодическом отборе 127
4.5. Схемы пластов-полос 139

Глава 5. Оценка редукции поверхностного стока при периодическом режиме отбора подземных вод 142
5.1. Однородный водоносный пласт с прямолинейной границей питания в плане 143
5.2. Схемы пластов-полос 150

Глава 6. Гидрогеологические расчеты систем совместного использования подземных и поверхностных вод 152
6.1. Вероятностные характеристики случайных процессов в геофильтрационных системах 153
6.2. Надежность систем совместного использования поверхностных и подземных вод и методы ее оценки 161
6.3. Оптимальное распределение нагрузки между месторождениями подземных вод на основе принципа максимума надежности системы 167

Заключение 174

Приложения 176

Литература 195

Станислав Яковлевич Концебовский
Ефим Львович Минкин

РЕСУРСЫ ПОДЗЕМНЫХ ВОД В ВОДОХОЗЯЙСТВЕННЫХ БАЛАНСАХ ОРОШАЕМЫХ ТЕРРИТОРИЙ

Утверждено к печати
Институтом водных проблем АН СССР

Редактор *Л.П. Ладычук*
Художник *С.А. Резников*
Художественный редактор *Н.Н. Власик*
Технические редакторы
О.В. Аредова, Г.А. Фетисова
Корректор *О.А. Разуменко*

Набор выполнен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 31712

Подписано к печати 14.03.86
Т – 01543. Формат 60 × 90 1/16
Бумага офсетная № 2. Гарнитура Пресс-Роман
Печать офсетная. Усл. печ.-л. 12,5
Усл. кр.-отт. 12,7. Уч.-изд. л. 13,5
Тираж 1100 экз. Тип. зак. 257
Цена 2 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука", 117864 ГСП-7
Москва В-485, Профсоюзная ул., д. 90

Ордена Трудового Красного Знамени
1-я типография издательства "Наука"
199034, Ленинград В-34, 9-я линия, 12